蘇州大學

SOOCHOW UNIVERSITY

硕士学位论文

论文题目 Orlicz-Lorentz空间的一致凸性与局部一致凸性

研究生姓名 宁 哲

指导教师姓名 王金才

专业名称 基础数学

研究方向 泛函分析

论文提交日期 2010年5月

苏州大学学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得苏州大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

论文作者签名：宁哲 日　期：2010.4.15.

苏州大学学位论文使用授权声明

本人完全了解苏州大学关于收集、保存和使用学位论文的规定，即：学位论文著作权归属苏州大学。本学位论文电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。苏州大学有权向国家图书馆、中国社科院文献信息情报中心、中国科学技术信息研究所（含万方数据电子出版社）、中国学术期刊（光盘版）电子杂志社送交本学位论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存和汇编学位论文，可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索。

涉密论文□

本学位论文属　　　　　　在＿＿＿年＿＿月解密后适用本规定。

非涉密论文☑

论文作者签名：宁雪　　　日　期：2010、4.15

导 师 签 名：王金才　　　日　期：2010、4.15

摘 要

自从 A.Kamińska 1990 年提出并研究了 Orlicz–Lorentz 空间的以来, 关于赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的几何研究成果已硕果累累. 但从 1999 年吴从炘和任丽伟开始对赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间研究严格凸性以后, 关于这种赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的几何研究成果却很少, 并且缺乏系统性. 本文的主要工作: 1. 给出赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 序列空间一致凸性的刻划. 2. 给出赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间局部一致凸性的刻划. 我们证明了: Orlicz–Lorentz 空间 $\lambda^{\circ}_{\varphi,w}$ 是一致凸的当且仅当下列条件满足:

(1) $\varphi \in \delta_2$,

(2) w 是正则的, $i.e. \frac{S(2n)}{S(n)} \geq K > 1$, 其中 $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} w(i)$,

(3) φ 在 $[0, q(\psi^{-1}(\frac{1}{w(1)}))]$ 上是一致凸的.

设 ω 对较大的变量满足正则性条件, 则 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,w}[0,\infty)$ 是局部一致凸的当且仅当满足下面 2 个条件:

(i) φ 在 $[0,\infty)$ 上是严格凸的;

(ii) $\varphi \in \Delta_2$ 且 $\psi \in \Delta_2$.

全文共分为三个章节, 分别有所侧重地进行了某一方面的研究.

第一章主要叙述 Orlicz-Lorentz 空间的基本理论, 特别是 Orlicz-Lorentz 序列空间上的一些重要的基础定理.

第二章继续考虑序列空间的情况, 在参考了有关函数空间里关于 Luxemburg 范数的一致凸性已知结果的情况下, 我们给出并证明了序列空间中关于 Orlicz 范数的一致凸性的刻划. 本章的工作有难度和深度.

在最后一章, 我们转向函数空间, 该章也是有难度的一章, 我们重点研究了赋 Orlicz

范数的 Orlicz–Lorentz 函数空间中局部一致凸性的等价刻划.

关键词: Orlicz-Lorentz 空间; Luxemburg 范数; Orlicz 范数; 一致凸; 局部一致凸

作　　者: 宁哲

指导老师: 王金才副教授

Uniform Rotundity And Locally Uniform Rotundity of Orlicz–Lorentz Spaces

Abstract

Since A.Kamińska gave the notion of Orlicz–Lorentz space in 1990, many conclusions about the Orlicz–Lorentz space with the Luxemburg norm have been obtained. Wu and Ren's giving the Orlicz norm of Orlicz–Lorentz space in 1999, the results about the Orlicz–Lorentz space with this norm was sporadic, and lack of system. The main work of this paper is: 1.Gave the characterization of uniform rotundity in Orlicz-Lorentz sequence space with the Orlicz norm. 2.Gave the characterization of locally uniform rotundity in Orlicz-Lorentz function space with the Orlicz norm.We verified that: Orlicz–Lorentz sequence space with the Orlicz norm is uniform rotundity iff

(1) $\varphi \in \delta_2$,

(2) w is regular,*i.e.* $\frac{S(2n)}{S(n)} \geq K > 1$, where $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} w(i)$,

(3) φ is uniform rotundity on $[0, q(\psi^{-1}(\frac{1}{w(1)}))]$.

Let ω be regular for large arguments. Then $\Lambda^{\circ}_{\varphi,w}[0,\infty)$ is locally uniform rotundity (LUR) if and only if the following two conditions are satisfied:

(i) φ is strictly convex on $[0,\infty)$

(ii) $\varphi \in \Delta_2$ and $\psi \in \Delta_2$.

This paper has three chapters, each of them investigated different aspect respectively.

The first chapter mainly states the fundamental theories of Orlicz–Lorentz spaces, respectively some important basic theorems of Orlicz–Lorentz sequence space.

The second chapter keeps on considering the sequence spaces. Reference to the theory of uniform rotundity in function space with the Luxemburg norm , we give the characterization of uniform rotundity in sequence spaces with the Orlicz norm.The work of this chapter is difficult and profound.

In the last chapter, we turn to the function spaces. It is also a difficult chapter. We mainly research the characterization of locally uniform rotundity in Orlicz–Lorentz spaces with the Orlicz norm.

Keywords: Orlicz-Lorentz space; Luxemburg norm; Orlicz norm;uniform rotundity; locally uniform rotundity

Written by Ning Zhe
Supervised by Prof. Wang Jincai

目 录

引 言

一 背景

早在 1990 年，A.Kamińska 开始对赋 Luxemburg 范数的 Orlicz−Lorentz 空间的几何性质进行研究 (见 [1],[2]), 此后在其论文 (见 [3]) 中，又给出并证明了在 $\gamma=\infty$ 的情况下该空间一致凸性的等价性条件. 1995 年，A.Kamińska 又与 P.Lin 以及 H.Sun 一起，在论文 (见 [4]) 中刻划出一致正规结构的等价条件. 紧接着在 H.Hudzik, A.Kamińska 和 M.Mastylo 1996 年合著的论文 [5] 中，得出了 $\gamma=\infty$ 的情况下 Orlicz−Lorentz 空间的一致非方性的等价条件以及一系列关于该空间性质的结论. 1997 年，吴从炘和任丽伟 (见 [6]) 又给出了 Orlicz−Lorentz 空间局部一致凸的等价刻划. 2007 年在 A.Kamińska 与 C.Lennard, M.Mastylo 以及 S.Mikuska 合著的论文 [7] 中，对 Orlicz−Lorentz 空间的弱一致 Kadec-Klee 性质，弱 * 一致 Kadec-Klee 性质作了研究. 总之关于赋 Luxemburg 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的几何性质的研究已是硕果累累.

与函数空间相比，Orlicz-Lorentz 序列空间的研究相对较少，姚正安等人在 [9] 中给出了 Orlicz-Lorentz 序列空间的构造，得出并证明了该空间自反当且仅当 $\varphi\in\Delta_2\cap\nabla_2$ 的重要结论，并且讨论了序列空间的子空间的某些问题. 在 2008 年 P.Foralewski, H.Hudzik 和 L.Szymaszkiewicz 的论文 [10] 中，对 Orlicz−Lorentz 序列空间的几何性质和拓扑性质都做了研究，使得该空间的理论得到补充和完善.

1999 年，吴从炘和任丽伟 (见 [8]) 在 Orlicz-Lorentz($\gamma<\infty$) 空间上定义了 Orlicz 范数

$$\|f\|^o=\sup_{\rho_\psi(g)\le 1}\int_0^\gamma f^*(t)g^*(t)w(t)dt.$$

并给出了在这个范数下严格凸性的刻划. 然而后继的工作很少. 2009 年，王金才和陈怡把吴从炘和任丽伟关于 Orlicz 范数的定义推广到一般情形 ($\gamma\le\infty$), 并得到了关于赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间的一致凸性的等价刻画 ([28]). 本文将首先研

究赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 序列空间的一致凸性，并给出其等价刻画. 由于序列空间是定义在有原子测度集合上的，而函数空间是定义在无原子测度集合上的，所以序列空间的一致凸性不是函数空间一致凸性的平凡推广. 最后我们将研究赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间的局部一致凸性，并给出其等价刻画.

二 基本概念和命题

本文用 R 、 R_+ 、 N 分别表示实数集，非负实数集和自然数集.

一个函数 $\varphi : R_+ \to R_+$ 称为 Orlicz 函数，若它满足: (1)φ 为凸的，连续的; (2)$\varphi(0)=0$, $\varphi(u)>0(u>0)$; (3)$\frac{\varphi(u)}{u}\to\infty(u\to\infty)$, $\frac{\varphi(u)}{u}\to 0(u\to 0)$.

函数 φ 的 Young 共轭 ψ 函数 (余函数) 为: $\psi(v)=\sup\limits_{u>0}\{|uv|-\varphi(u)\}$. 在本文中我们总假定 φ 为 Orlicz 函数. 如果 φ 为 Orlicz 函数，则其余函数 ψ 也是 Orlicz 函数. 设 $p(u)$ 和 $q(u)$ 分别是 $\varphi(u)$ 和 $\psi(u)$ 的右导数，则 $p(u)$ 和 $q(u)$ 是非降的，右连续的，且满足: $\varphi(u)=\int_0^u p(t)dt, \psi(u)=\int_0^u q(t)dt$, 并且有 $p(0)=q(0)=0$, $p(\infty)=q(\infty)=\infty$. 由 $q(t)=\sup\{s:p(s)\le t\}$, 我们容易得到 $p(q(t)-\varepsilon)\le t$ 及 $t\le q(p(t))$. 众所周知 φ 和其余函数 ψ 满足 Young 不等式，即对任意的 $u,v\ge 0$ 都有 $uv\le\varphi(u)+\psi(v)$ 成立，并且该式等号成立当且仅当 $v=p(u)$. 由于 Orlicz 函数 $\varphi(u)$ 是凸的，故有

(a) 对 $0<\alpha\le 1$, 有 $\varphi(\alpha x)\le\alpha\varphi(x)$; 对 $\alpha\ge 1$, 有 $\varphi(\alpha x)\ge\alpha\varphi(x)$.

(b) 对任意的实数 $u,v,\alpha\in[0,1]$, 都有 $\varphi(\alpha u+(1-\alpha)v)\le\alpha\varphi(u)+(1-\alpha)\varphi(v)$(见 [11]).

函数 φ 称为严格凸的，如果对 $u,v\in\mathbf{R},\mathbf{u}\neq\mathbf{v}$ 都有

$$\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)<\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}.$$

函数 φ 称为在 $[0,\gamma]$ 上一致凸，如果对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $[0,\gamma]$ 上满足 $|u-v|\ge\varepsilon\max(|u|,|v|)$ 的 u,v 都有

$$\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)<(1-\delta)\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}.$$

为方便，我们把 [11] 中关于一致凸函数的一些有用的性质列在下面的命题中.

命题 0.1 ：(i) φ 在 $[0,\gamma]$ 上一致凸当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$ 及 $[a,b]\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $\alpha\in[a,b]$ 及 $[0,\gamma]$ 上满足 $|u-v|\ge\varepsilon\max(|u|,|v|)$ 的一切 u,v, 都有

$$\varphi[\alpha u+(1-\alpha)v]\le(1-\delta)[\alpha\varphi(u)+(1-\alpha)\varphi(v)].$$

(ii) 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $K>1$, 使得

$$p((1+\varepsilon)t)\ge Kp(t),(t\in[0,\gamma]),$$

则 φ 在 $[0,\gamma]$ 上一致凸.

我们称 φ 满足 Δ_2 条件 (较大变量的 Δ_2 条件; 较小变量的 Δ_2 条件), 若存在 $k>1$, 使得对任意的 $u\ge0$(存在 $k>1$, $u_0\ge0$ 使得对任意的 $u\ge u_0$; 存在 $k>1$, $u_0\ge0$ 使得对任意的 $0\le u\le u_0$) 都有 $\varphi(2u)\le k\varphi(u)$, 记为 $\varphi\in\Delta_2(\varphi\in\Delta_2(\infty);\varphi\in\delta_2)$. 若 $\varphi\in\Delta_2(\varphi\in\Delta_2(\infty);\varphi\in\delta_2)$, 则称 $\psi\in\nabla_2(\psi\in\nabla_2(\infty);\psi\in\nabla_2(0))$.

关于 Δ_2 条件，我们有以下有用的性质： (见 [11])

$\varphi\in\Delta_2\Leftrightarrow$ 存在 $l>1,x_0>0,K>1$, 对任意的 $x>x_0$, 都有 $\varphi(lx)\le K\varphi(x)$.

下面我们给出 Orlicz–Lorentz 空间的一些基本概念.

令 L^0 为所有关于 Lebesgue 测度 m 可测的函数 $f:[0,\gamma)\to R$ 组成的函数集. 一个函数 $w(t):[0,\gamma)\to R$ $(\gamma\le\infty)$ 被称作权函数，如果它是非增并且局部可积的.

对于任意的 $f\in L^0$ 定义其分布函数为：

$$d_f(\theta)=m\{t\in[0,\gamma):|f(t)|>\theta\},$$

其中 $\theta\ge0$. 它的右逆函数

$$f^*(t)=\inf\{\theta>0:d_f(\theta)\le t\},t\in[0,\gamma)$$

称为 f 的非增等可测重排. 显然 $\varphi(f^*(t))=\varphi(f(t))^*$.

定义 φ 的模 $\rho_\varphi:L^0\to[0,\infty]$ 如下：

$$\rho_\varphi(f):=\int_0^\gamma\varphi(f^*)w=\int_0^\gamma\varphi(f)^*w=\int_0^\gamma\varphi(f(t))^*w(t)dm(t).$$

它有下列性质： (i) $\rho_\varphi(f)=0$ 当且仅当 $f=0$; (ii)$\rho_\varphi(f)=\rho_\varphi(-f)$; (iii) (次可加性) 若 $\mathrm{supp}f\cap\mathrm{supp}g=\emptyset$, 则 $\rho_\varphi(f+g)\le\rho_\varphi(f)+\rho_\varphi(g)$; (iv) $\rho_\varphi(\alpha f+\beta g)\le\alpha\rho_\varphi(f)+\beta\rho_\varphi(g)$, 其中 $\alpha+\beta=1$, $\alpha,\beta\ge0$. .

Orlicz-Lorentz 空间 $\Lambda_{\varphi,w}$ 定义为

$$\Lambda_{\varphi,w}=\{f\in L^0:\text{存在}\lambda>0,\text{使}\rho_\varphi(\lambda f)<\infty\}.$$

定义：

$$\|f\|=\inf\{\varepsilon>0:\rho_\varphi(f/\varepsilon)\le1\}.$$

易知 $\|\cdot\|$ 是 $\Lambda_{\varphi,w}$ 上的范数，我们称其为 Luxemburg 范数. 记 $\Lambda_{\varphi,\omega}=(\Lambda_{\varphi,\omega},\|\cdot\|)$, 则 $\Lambda_{\varphi,w}$ 为一 Banach 空间 ([1]).

$\Lambda_{\varphi,\omega}$ 上的 Orlicz 范数 ([28]) 定义为：

$$\|f\|^\circ=\inf_{k>0}\frac{1}{k}[1+\rho_\varphi(kf)].$$

赋 Orlicz 范数的 $\Lambda_{\varphi,\omega}$ 记为 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}$. 赋 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数的 Orlicz−Lorentz 序列空间记为 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 和 $\lambda^\circ_{\varphi,\omega}$.

一个函数 $\sigma:[0,\gamma)\to[0,\gamma)$ 被称作保测变换，若对于任意可测集 $E\subset[0,\gamma)$, $\sigma^{-1}(E)$ 是可测的，并且有 $mE=m(\sigma^{-1}(E))$.

S 为 φ 的所有严格凸点组成的集合， i.e.,

$$S=\{0\}\cup\left\{u\in R^+:\forall\,0\le v_1<v_2\,,u=\frac{v_1+v_2}{2}\Rightarrow\varphi(u)<\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2}\right\}.$$

显然，若 $S=R^+$, 则 φ 是严格凸的，并且众所周知有 S'(S 的余集) 是 φ 的所有线性结构区间 (α_i,β_i) 的并组成的集合.

第一章 Orlicz−Lorentz 空间的基本理论

陈述涛在 [11] 中已经对 Orlicz 函数空间中的基本理论作了详细的研究，并形成了一个较为完整的理论体系．这些基本理论一般来说容易推广到无原子有限测度的函数空间 $\Lambda_{\varphi,\omega},\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 中，而对于一般的测度为无限的 Orlicz-Lorentz 空间，特别是 Orlicz-Lorentz 序列空间还需要验证． [28],[29], [30] 已经验证了 Orlicz-Lorentz 序列空间和函数空间的相关性质．为完整性，我们把所需要的性质重新叙述在本章中．为此，我们先从基本的定义开始．

l^0 定义为所有 $x:N\to R$ 这样的序列构成的集合．对于每一个 $x=(x(i))_{i=1}^{\infty}\in l^0$, 定义 $\mathrm{supp}x=\{i\in N:x(i)\neq 0\}$, 且记 $|x|(i)=|x(i)|$, 这里 $i\in N$.

对于任意的 $x\in l^0$, 定义其分布函数为 $\mu_x:R_+\to\{\infty\}\cup N$, 其中 $\mu_x(\lambda)=m\{i\in N:|x(i)|>\lambda\}$. 定义其非增重排序列 $x^*=(x^*(i))_{i=1}^{\infty}$, 其中 $x^*(i)=\inf\{\lambda:\mu_x(\lambda)<i\}$.

一个序列 $\omega:N\to R_+$ 被称为权序列，若它满足： $(1)\omega(1)\geq\omega(2)\geq\cdots\geq\omega(n)\geq\omega(n+1)\geq\cdots$； $(2)\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega(i)=+\infty$.

对于 $x=(x(i))_{i=1}^{\infty}\in l^0$, 令 $\rho_{\varphi}(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(x^*(i))\omega(i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(x(i))^*\omega(i)$. $\lambda_{\varphi,\omega}$ 表示由模 ρ_{φ} 生成的 Orlicz-Lorentz 序列空间，即

$$\lambda_{\varphi,\omega}=\{x=(x(i)):\text{存在 }\lambda>0,\text{ 使得 }\rho_{\varphi}(\lambda x)<\infty\},$$

且 $\|x\|=\inf\{\lambda>0:\rho_{\varphi}(\frac{x}{\lambda})\leq 1\}$, 这里 “$\|\cdot\|$” 即之为序列空间中的 Luxemburg 范数．

与 Luxemburg 范数相对应的该空间中另一个重要范数定义如下：

对于 $x\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 定义 $\|x\|^{\circ}=\|x\|^{\circ}_{\varphi}=\inf\limits_{k>0}\frac{1}{k}[1+\rho_{\varphi}(kf)]$. 这里 “$\|\cdot\|^{\circ}$” 称之为 Orlicz 范数．

下面我们给出 [28],[29],[30] 中证明的关于 Orlicz-Lorentz 空间中 Orlicz 范数的性质，这里我们以序列空间的形式给出，函数空间也有相应的性质：

定理 1.1 (1) 若 $\|x\|^{\circ}\leq 1$, 则 $\rho_{\psi}(p(|x|))\leq 1$; (2) 若 $\|x\|^{\circ}\leq 1$, 则 $\rho_{\varphi}(x)\leq\|x\|^{\circ}$.

定理 1.2 若存在 $k>0$, 使得 $\rho_\varphi(p(k|x|))=1$, 则有:

$$\|x\|^\circ=\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(kx^*(i))\omega(i)=\frac{1}{k}[1+\rho_\varphi(kx)].$$

定理 1.3 对任意的 $x\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 有

$$\|x\|^\circ=\sup_{\rho_\psi(y)\le 1}\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i).$$

定理 1.4 对任意的 $x\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 当且仅当 $k\in K(x)=[k^*,k^{**}]$ 时，有

$$\|x\|^\circ=\frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kx))=\inf_{h>0}\frac{1}{h}(1+\rho_\varphi(hx)),$$

这里 $k^*=\inf\{k>0:\rho_\psi(p(k|x|))\ge 1\},k^{**}=\sup\{k>0:\rho_\psi(p(k|x|))\le 1\}$.

定理 1.5 设 $x\in\lambda_{\varphi,\omega},y\in\lambda_{\psi,\omega}$ ，则有

(1) $\|x\|\le 1\Rightarrow\rho_\varphi(x)\le\|x\|$;

(2) $\|x\|>1\Rightarrow\rho_\varphi(x)>\|x\|$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i)\le\|x\|_\varphi^\circ\|y\|_\psi,i\in N$;

(4) $\|x\|\le\|x\|^\circ\le 2\|x\|$.

定理 1.6 (1) $\inf\{k:k\in K(x),\|x\|^\circ=1\}>1$ 当且仅当 $\varphi\in\delta_2$.

(2) 对于每一个 $b\ge a>0$, 集合 $Q=\cup\{K(f):a\le\|f\|^\circ\le b\}$ 是有界的当且仅当 $\varphi\in\nabla_2(0)$.

定理 1.7 $\|\chi_{[0,t]}\|_{\Lambda_{\varphi,w}}^\circ=\psi^{-1}\left(\frac{1}{\int_0^t w(s)ds}\right)\int_0^t w(s)ds$. $\|\chi_{[0,t]}\|_{\Lambda_{\varphi,w}}=\frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{\int_0^t w(s)ds}\right)}$

对于 Orlicz–Lorentz 序列空间，我们有相应的结果 (证明同上类似).

$$\|\chi_{1,n}\|_{\lambda_{\varphi,w}}^\circ=\psi^{-1}\left(\frac{1}{S(n)}\right)S(n).\|\chi_{1,n}\|_{\lambda_{\varphi,w}}=\frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{S(n)}\right)}$$

其中 $\chi_{1,n}=\sum\limits_{k=1}^{n}e_k,S(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}w(k)$, 和 $e_k=(0,0,\cdots 0,1,0,\cdots)$. 这里 1 在第 k 个位置.

定理 1.8 若 $\varphi\notin\delta_2$, 则存在 $x_n\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 使得 $\|x_n\|=1$, 但是 $\rho_\varphi(x_n)<\frac{1}{n}$.

定理 1.9 模收敛与范数收敛等价当且仅当 $\varphi\in\delta_2$.

定理 1.10 设 $\varphi\in\delta_2$ 且 $x_n,x\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 则

(1) $\rho_\varphi(x_n)\to\infty\Rightarrow\|x_n\|\to\infty$;

(2) $\|x\| = 1 \Rightarrow \rho_\varphi(x) = 1$;

(3) 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|x\| \geq \varepsilon$ 时，有 $\rho_\varphi(x) \geq \delta$;

(4) 任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\rho_\varphi(x) \leq 1 - \varepsilon$ 时，有 $\|x\| \leq 1 - \delta$;

(5) 任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\rho_\varphi(x) > 1 + \varepsilon$ 时，有 $\|x\| \geq 1 + \delta$.

定理 1.11 设 $\varphi \in \delta_2$, 则对任意 $L > 0, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\rho_\varphi(x) \leq L, \rho_\varphi(y) \leq \delta$ 时，有 $|\rho_\varphi(x + y) - \rho_\varphi(x)| < \varepsilon$.

第二章　赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 序列空间的一致凸性

本章我们将研究赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 序列空间的一致凸性. 我们先来给出需要用到的一些基本定义.

一个 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 称为严格凸的，如果对于任意 $x,y\in X$ 且 $\|x\|=\|y\|=1, x\neq y$, 则 $\|\frac{x+y}{2}\|<1$.

一个 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 称为一致凸的，如果对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $x,y\in X$ 满足 $\|x\|\leq 1$, $\|y\|\leq 1$, $\|x-y\|\geq\varepsilon$, 就有 $\|\frac{x+y}{2}\|\leq 1-\delta(\varepsilon)$. 或等价地 $x_n,y_n\in S(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

权序列 $\omega=(\omega(k))$ 称为正则的，若存在常数 $K>1$, 使得对于任意的 $n\in N$, 均有 $S(2n)\geq KS(n)$, 其中 $S(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\omega(k)$.

第一节　Orlicz-Lorentz 序列空间的严格凸性

引理 2.1([10, 引理 6.5]). 如果 $x,y\in c_0$ 并且 $x\neq y$ 以及 $x^*=y^*$, 则 $(\frac{x+y}{2})^*\neq x^*$.

定理 2.2 $\lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 是严格凸的当且仅当 φ 在 $[0,q(\psi^{-1}(\frac{1}{\omega(1)}))]$ 上是严格凸的，这里 q 是 ψ 的右导数.

证明 必要性. 令 $\gamma=q(\psi^{-1}(\frac{1}{\omega(1)}))$. 假设 φ 在 $[0,\gamma]$ 上不是严格凸的. 则存在区间 $[a,b]\subset[0,\gamma]$ (其中 $a>0,b<\gamma$) 使得 φ 在 $[a,b]$ 上是线性的. 因此 p (φ 的右导数) 在 $[a,b]$ 上是常数 A. 令

$$S_0=\psi(A)\omega(1).$$

取 $\varepsilon>0$ 使得 $b<\gamma-\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned} S_0 &= \psi(p(b))\omega(1)\\ &\leq \psi(p(\gamma-\varepsilon))\omega(1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi\left(p\left(q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)-\varepsilon\right)\right)\omega(1)\\
&\le \psi\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)\omega(1)\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

情形 I: 假设 $S_0 < 1$. 因为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega(i) = \infty$ 以及 p 在 0 点是连续的，我们可以选择 $0<\alpha\le a$ 和 $m \ge 2$ 使得

$$\psi(p(\alpha))\sum_{i=2}^{m}\omega(i) = 1 - S_0.$$

令

$$k_1 = aA\omega(1) + \alpha p(\alpha)\sum_{i=2}^{m}\omega(i),$$

$$k_2 = bA\omega(1) + \alpha p(\alpha)\sum_{i=2}^{m}\omega(i).$$

定义

$$f = \frac{1}{k_1}[ae_1 + \alpha(e_2 + \cdots + e_m)],$$

$$g = \frac{1}{k_2}[be_1 + \alpha(e_2 + \cdots + e_m)].$$

我们有 $f = f^*$, $g = g^*$, $f \ne g$, $(f+g)^* = f+g$, 并且

$$
\begin{aligned}
\rho_\psi(p(k_1 f)) &= \psi(p(a))\omega(1) + \psi(p(\alpha))\sum_{i=2}^{m}\omega(i)\\
&= S_0 + \psi(p(\alpha))\sum_{i=2}^{m}\omega(i)\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

类似地，我们有 $\rho_\psi(p(k_2 g)) = 1$. 记 $k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$. 则

$$
\begin{aligned}
&\rho_\psi(p(k(f+g))) = \rho_\psi\left(p\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}k_1 f + \frac{k_1}{k_1+k_2}k_2 g\right)\right)\\
&= \psi\left(p\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}a + \frac{k_1}{k_1+k_2}b\right)\right)\omega(1) + \psi(p(\alpha))\sum_{i=2}^{m}\omega(i) = 1.
\end{aligned}
$$

由定理 1.2 得,

$$\begin{aligned}\|f\|^{\circ} &= \sum_{n=1}^{\infty} f^*(n)p(k_1 f^*(n))\omega(n) \\ &= \frac{1}{k_1}\left[ap(a)\omega(1)+\alpha p(\alpha)\sum_{i=2}^{m}\omega(i)\right] \\ &= 1.\end{aligned}$$

同理, $\|g\|^{\circ}=1$.

$$\|f+g\|^{\circ}=\sum_{n=1}^{\infty}(f+g)^*(n)p(k(f+g)^*(n))\omega(n)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{k_1}a+\frac{1}{k_2}b\right)p\left(k\left(\frac{1}{k_1}a+\frac{1}{k_2}b\right)\right)\omega(1) \\ &+ \left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)\alpha p\left(k\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)\alpha\right)\sum_{i=2}^{\infty}\omega(k) \\ &= \frac{1}{k_1}[aA\omega(1)+\alpha p(\alpha)\sum_{i=2}^{\infty}\omega(k)]+\frac{1}{k_2}[bA\omega(1)+\alpha p(\alpha)\sum_{i=2}^{\infty}\omega(k)]=2.\end{aligned}$$

因此, $\lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 不是严凸的, 这是一个矛盾.

情形 II: 假设 $S_0=1$ 以及 $\omega=(\omega(k))$ 不是常数序列. (当 $\omega=(\omega(k))$ 是常数序列时, $\lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 就是 Orlicz 空间 l°_{φ} 并且结果在 [11] 中已经证明). 不失一般性, 我们假设 $\omega(2)<\omega(1)$. 因此, $s_0=\psi(A)\omega(2)<S_0=1$. 用 s_0 代替情形 I 中 S_0 , 并且使用同样的方法, 我们可以知道存在 f 和 g 使得 $\|f\|^{\circ}=\|g\|^{\circ}=\|\frac{f+g}{2}\|^{\circ}=1$ 但是 $f\neq g$. 因此, $\lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 不是严格凸的, 这是一个矛盾.

充分性. 令 φ 在 $[0,\gamma]$ 上严格凸. 我们首先证明 $\lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}\in(R^*)(E\in(R^*)$ 是指当且仅当考虑非增非负函数的时候, E 是严凸的). 令 $x=x^*$, $y=y^*$, $\|x\|^{\circ}=\|y\|^{\circ}=1$, 以及 $x\neq y$. 我们将要证明存在 $n\in\mathbf{N}$ 使得对于任意 $\alpha>0,\beta>0$ 满足 $\alpha+\beta=1$, 有

$$\varphi(\alpha x(n)+\beta y(n))<\alpha\varphi(x(n))+\beta\varphi(y(n)) \tag{2.1}$$

如果 $supp\ x\neq supp\ y$, 则 (2.1) 式显然成立. 如果 $A=supp\ x=supp\ y$, 并且 Card(A)≥ 2.

我们定义

$$B=\{n\in A: x(n)\geq\gamma_1\ \ and\ \ y(n)\geq\gamma_1\},$$

这里

$$\gamma_1 = q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) - \varepsilon_1\right), \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) - \psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)+\omega(2)}\right)\right].$$

如果 Card(B)≥ 2, 则 $\{1,2\} \subset B$. 进而

$$\begin{aligned}\rho_\psi(p(x)) &\geq \psi(p(x(1)))\omega(1) + \psi(p(x(2)))\omega(2)\\ &\geq \psi(p(\gamma_1))[\omega(1)+\omega(2)]\\ &\geq \psi\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) - \varepsilon_1\right)[\omega(1)+\omega(2)]\\ &> 1,\end{aligned}$$

这蕴含 $k^{**}(x) \leq 1$. 另一方面，对于任意 $k \in [k^*(x), k^{**}(x)]$, 有 $1 = \|x\|^\circ = \frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kx))$. 则 $k^{**} = 1 + \rho_\varphi(k^{**}x) > 1$, 这是一个矛盾. 因此， Card B ≤ 1.

如果 Card B $= 0$, 则对于任意 $n \in A$, 或者 $x(n) < \gamma_1$ 或者 $y(n) < \gamma_1$, 从而 (2.1) 式成立.

如果 Card B $= 1$, 则 $B = \{1\}$. 由于 $x \neq y$, 所以存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $x(n) \neq y(n)$. 情形 I: 如果 $n \in A\backslash B$, 则 (2.1) 式对于这个 n 成立. 情形 II: $n = 1 \in B$. 不失一般性，我们假设 $x(1) > y(1)$ 以及当 $i \geq 2$ 时， $x(i) = y(i)$. 如果 $x(1) > y(1) \geq \gamma$, 则

$$\begin{aligned}\rho_\psi(p(x)) &> \rho_\psi(p(y)) \geq \psi(p(y(1)))\omega(1) \geq \psi(p(\gamma))\omega(1)\\ &\geq \psi\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)\omega(1) = 1,\end{aligned}$$

这蕴含着 $k^{**}(x) \leq 1$. 但是有 $\|x\|^\circ = 1$, 我们得到 $k^{**}(x) > 1$, 这是不可能的. 因此， $y(1) < \gamma$, 此时当 $n = 1$ 时， (2.1) 式成立.

令 $k_1 \in K(x)$, $k_2 \in K(y)$. 则

$$\begin{aligned}2 &= \|x\|^\circ + \|y\|^\circ\\ &= \frac{1}{k_1}(1+\rho_\varphi(k_1x)) + \frac{1}{k_2}(1+\rho_\varphi(k_2y))\\ &= \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\left[1 + \frac{k_2}{k_1+k_2}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(k_1(x(n))\omega(n) + \frac{k_1}{k_1+k_2}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(k_2(y(n))\omega(n)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left[\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(x(n)+y(n))\right]\omega(n)\right\}\\
&\geq \|x+y\|^{\circ},
\end{aligned}
$$

即 $\|\frac{x+y}{2}\|^{\circ}<1$.

现在，我们假设 $x\neq x^*$ 或者 $y\neq y^*$ 并且 $x\neq y, \|x\|^{\circ}=\|y\|^{\circ}=1$. 如果 $x^*\neq y^*$, 由前面的证明我们得到 $\|\frac{x+y}{2}\|^{\circ}<1$. 因为 $\|x\|^{\circ}=\|y\|^{\circ}=1$, 则 $\|x\|\leq 1$ 以及 $\|y\|\leq 1$. 因此由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$, 有 $x,y\in c_0$. 如果 $x^*=y^*$, 则定义 $z=\frac{x+y}{2}$, 由引理 2.1, 我们得到 $z\neq x$ 并且 $z^*\neq x^*$. 如果 $\|z\|^{\circ}=1$, 则由前面的证明，我们有 $\|\frac{z+x}{2}\|^{\circ}<1$. 因此，

$$
\begin{aligned}
\|z\|^{\circ} &= \left\|\frac{2}{3}(\frac{x+z}{2})+\frac{1}{3}y\right\|^{\circ}\\
&\leq \frac{2}{3}\left\|\frac{x+z}{2}\right\|^{\circ}+\frac{1}{3}\|y\|^{\circ}\\
&< 1,
\end{aligned}
$$

这是一个矛盾.

如果 $\omega(k)\equiv 1$, 我们就得到下面的推论:

推论 2.3([11]). l_{φ}° 是严格凸的当且仅当 φ 在 $[0,\pi_{\varphi}(1)]$ 上是严格凸的，这里 $\pi_{\varphi}(\alpha)=\inf\{t>0:\psi(p(t))\geq\alpha\}$.

第二节　Orlicz-Lorentz 序列空间的一致凸性

为了证明主要定理，我们给出如下一系列引理.

首先，我们容易推广 Kamińska 的引理 (见 [3] 引理 4) 到序列的情况.

引理 2.4 若权序列 $\omega=(\omega(k))$ 是正则的，则对于每一个 $\varepsilon>0$, 存在 $\varepsilon_1>0$, 使得对于每一个非增有限序列 $h=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ke_k$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}h(k)\omega(k)\leq M($ 这里 M 是一个常数), 及对于集合 $A\subset\mathbf{N}$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(h\chi_A)^*(k)\omega(k)\geq\varepsilon$, 都有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(h\chi_A)(k)\omega(k)\geq\varepsilon_1$.

证明: 与 [3] 中引理 4 的证明相似，略.

引理 2.5 设 $\varphi\in\delta_2$. 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\varepsilon_1>0$, 使得对于 $f,g\in S(\lambda_{\varphi,\omega}^{\circ})$, 满足 $\|f-g\|^{\circ}>\varepsilon$, 及每一个 $k\in K(f),h\in K(g)$, 均有 $\rho_{\varphi}(kf-hg)>\varepsilon_1$.

证明: 假设结论不成立. 则存在 $\varepsilon>0$, $f_n,g_n\in S(\lambda_{\varphi,\omega}^{\circ})$ 满足 $\|f_n-g_n\|^{\circ}>\varepsilon$ 以及 $k_n\in$

$K(f_n), h_n \in K(g_n)$ 使得 $\rho_\varphi(k_nf_n - h_ng_n) \to 0$. 由 $\varphi \in \delta_2$, 我们有 $\|k_nf_n - h_ng_n\|^\circ \to 0$. 因此 $|k_n - h_n| = |k_n\|f_n\|^\circ - h_n\|g_n\|^\circ| \le \|k_nf_n - h_ng_n\|^\circ \to 0$. 同样由于 $\varphi \in \delta_2$, 存在 $K > 0$, 使得 $\varphi(2u) \le K\varphi(u)$. 这里 $0 \le u \le 2\gamma$, $\gamma = q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)$. 固定 $n \in \mathbf{N}$, 对于任意 $0 < \varepsilon < k_n$, 有 $\psi(p((k_n - \varepsilon)f^*(1)))\omega(1) \le \rho_\psi(p((k_n - \varepsilon)f_n^*)) \le 1$, 即 $(k_n - \varepsilon)f_n^*(1) \le q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)$. 因此, 对于任意 $i \in \mathbf{N}$, 有 $k_nf_n(i) \le k_nf_n^*(1) \le \gamma$. 同理, 对于任意 $i \in \mathbf{N}$, 我们有 $h_ng_n(i) \le \gamma$. 因此，对于充分大的 n,

$$
\begin{aligned}
\rho_\varphi(h_n(f_n - g_n)) &= \rho_\varphi(k_nf_n - h_ng_n - (k_n - h_n)f_n) \\
&\le \rho_\varphi(|k_nf_n - h_ng_n| + |k_n - h_n||f_n|) \\
&\le \frac{1}{2}\rho_\varphi(2|k_nf_n - h_ng_n|) + \frac{1}{2}\rho_\varphi(2|k_n - h_n||f_n|) \\
&\le \frac{K}{2}\rho_\varphi(k_nf_n - h_ng_n) + |k_n - h_n|\rho_\varphi(f_n).
\end{aligned}
$$

由 $\varphi \in \delta_2$, 存在 $\varepsilon' > 0$ 使得 $\rho_\varphi(f_n - g_n) > \varepsilon'$. 因此，对于充分大的 n,

$$
\begin{aligned}
\rho_\varphi(k_nf_n - h_ng_n) &\ge \frac{2}{K}[\rho_\varphi(h_n(f_n - g_n)) - |k_n - h_n|\rho_\varphi(f_n)] \\
&\ge \frac{2}{K}[\rho(f_n - g_n) - \frac{\varepsilon'}{2}] \ge \frac{\varepsilon'}{K}.
\end{aligned}
$$

这是一个矛盾.

引理 2.6 ([25,261 页]) 设 $a_j, b_j > 0, j = 1,2,3\cdots$ 则当 $\{a_j\}, \{b_j\}$ 都是非增重排时，$\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_jb_j$ 的值为最大.

引理 2.7 设 $k_n \ge a > 0$, $\|f_n\|^\circ \le M$, $\rho_\psi(p(k_nf_n)) \to 1$, 则

$$
\lim_{n\to\infty}(\|f_n\|^\circ - \sum_{k=1}^{\infty} f_n^*(i)p(k_nf_n^*(i))\omega(i)) = 0.
$$

证明: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时，有 $\rho_\psi\left(\frac{1}{1+\varepsilon}p(k_nf_n)\right) \le \frac{1}{1+\varepsilon}\rho_\psi(p(k_nf_n)) \le 1$ 以及 $1 \le \rho_\psi(p(k_nf_n)) + a\varepsilon$. 这样，由定理 1.3 有

$$
\|f_n\|^\circ \ge \sum_{i=1}^{\infty} f_n^*(i)\frac{1}{1+\varepsilon}p(k_nf_n^*(i))\omega(i),
$$

这等价于

$$
\sum_{i=1}^{\infty} f_n^*(i)p(k_nf_n^*(i))\omega(i) \le (1+\varepsilon)\|f_n\|^\circ \le \|f_n\|^\circ + M\varepsilon.
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
-M\varepsilon &\le \|f_n\|^\circ - \sum_{i=1}^{\infty} f_n^*(i)p(k_n f_n^*(i))\omega(i) \\
&\le \frac{1}{k_n}(1+\rho_\varphi(k_n f_n)) - \sum_{i=1}^{\infty} f_n^*(i)p(k_n f_n^*(i))\omega(i) \\
&< \frac{1}{k_n}(\rho_\psi(p(k_n f_n))) + \rho_\varphi(k_n f_n) + a\varepsilon) - \sum_{i=1}^{\infty} f_n^*(i)p(k_n f_n^*(i))\omega(i) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

引理 2.8 设 $0<a<1, u>v>0$ 满足 $\psi(p(u))(\omega(1)+\omega(2))<1$. 对于任意 $j\in N, i=1,\cdots,j$ 定义

$$g(i,j)=\psi(p(u))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\psi(p(av))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k),$$

$$h(i,j)=\psi(p(au))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\psi(p(v))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k),$$

$$f(i,j)=g(i,j)-h(i,j),$$

其中 $\sum_{k\in\emptyset}\omega(k)=0$, 则

(1) 对于每一个 $j=2,3,\cdots$, 则存在一个数 $i(j)\in\{0,1,\cdots,j-1\}$, 使得 $f(i(j),j)\le 0, f(i(j)+1,j)\ge 0$.

(2) 存在 $j\ge 2$, 使得 $g(i(j),j)\le 1, g(i(j+1),j+1)\ge 1$.

(3) $1-3\psi(p(u))\omega(1)\le g(i(j),j)\le 1$.

(4) $1-3\psi(p(u))\omega(1)\le h(i(j),j)\le 1+2\psi(p(u))\omega(1)$.

证明： 证明类似于 [17] 中的引理 4.

引理 2.9 ([9, 定理 3.1 和定理 3.2]) Orlicz–Lorentz 空间 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 是自反的当且仅当 $\varphi\in\delta_2\cap\nabla_2(0)$.

现在我们给出本章的主要定理.

定理 2.10 空间 $\lambda_{\varphi,\omega}^\circ$ 是一致凸的当且仅当下列条件满足：

(i) $\varphi\in\delta_2$,

(ii) ω 是正则的，

(iii) φ 在区间 $[0,\gamma]$ 上是一致凸的，这里 $\gamma = q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)$.

证明 充分性. 对于每一个 $h \in \lambda^\circ_{\varphi,\omega}$, 如果令 $h_n = \sum\limits_{i=1}^{n} h(i)e_i$, 则由 $\varphi \in \delta_2$, $\|h - h_n\|^\circ \to 0 (n \to \infty)$ 并且由于 $\lambda^\circ_{\varphi,\omega}$ 是理想 Banach 序列空间，应用 [3] 中引理 1, 只需考虑非负有限序列即可. 现在我们假设 $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f(i)e_i$, $g = \sum\limits_{i=1}^{l} g(i)e_i$ 满足 $\|f\|^\circ = \|g\|^\circ = 1$ 和 $\|f - g\|^\circ > \varepsilon$. 令 $k \in K(f)$, $h \in K(g)$. 由 (iii), 我们有 $\varphi \in \nabla_2(0)$ (见 [11]). 因此由定理 1.6, 我们有

$$1 < d = \max(\sup K(f), \sup K(g)) < +\infty.$$

记

$$a = \min\left(\inf_{k\in K(f),h\in K(g)} \frac{k}{k+h}, \inf_{k\in K(f),h\in K(g)} \frac{h}{k+h}\right),$$

$$b = \max\left(\sup_{k\in K(f),h\in K(g)} \frac{k}{k+h}, \sup_{k\in K(f),h\in K(g)} \frac{h}{k+h}\right).$$

则 $[a,b] \subset (0,1)$. 由引理 2.5, 存在 $\varepsilon' > 0$, 使得对于所有 $k \in K(f), h \in K(g)$, 有 $\rho_\varphi(kf - hg) > \varepsilon'$. 由 $\varphi \in \delta_2$, 存在 $K > 1$ 使得 $\varphi(2du) \le K\varphi(u)$ (其中 $0 \le u \le 4d\gamma$). 因为 φ 在 $[0,\gamma]$ 上是一致凸的，则存在 $\delta > 0$ 使得

$$\varphi[\lambda u + (1-\lambda)v] \le (1-\delta)[\lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v)]$$

对于 $\lambda \in [a,b]$ 和所有 $u, v \in \left[0, q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)\right]$ 满足 $|u - v| \ge \frac{\varepsilon'}{4(d-1)} \max\{|u|,|v|\}$ 都成立.

注意到 f 和 g 是有限序列，则存在 $\sigma : supp(f+g)^* \to supp(f+g)$ 是双射，并且

$$(f+g)^*(i) = f(\sigma(i)) + g(\sigma(i)) \text{ 其中} i \in supp(f+g)^*. \tag{1}$$

令 $T = \{i \in \mathbf{N} : |kf(\sigma(i)) - hg(\sigma(i))| \ge \frac{\varepsilon'}{4(d-1)} \max(|kf(\sigma(i))|, |hg(\sigma(i))|)\}$. 则

$$\begin{aligned}
&\rho_\varphi((kf(\sigma) - hg(\sigma))\chi_{T^c}) \\
= &\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi(kf(\sigma) - hg(\sigma))\chi_{T^c})^*(i)\omega(i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{\varepsilon'}{4(d-1)}\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi(kf(\sigma)\chi_{T^c}+\varphi(hg(\sigma)\chi_{T^c})^*(i)\omega(i)\\
&\le \frac{\varepsilon'}{4(d-1)}(\rho_\varphi(kf)+\rho_\varphi(kg))\\
&= \frac{\varepsilon'}{4(d-1)}(k+h-2)\\
&\le \frac{\varepsilon'}{2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

另外我们还有,

$$
\begin{aligned}
&2-\|f+g\|^\circ=\|f\|^\circ+\|g\|^\circ-\|f+g\|^\circ\\
&\ge \frac{1}{k}[1+\rho_\varphi(kf)]+\frac{1}{h}[1+\rho_\varphi(hg)]\\
&\quad-\frac{k+h}{kh}\left[1+\rho_\varphi\left(\frac{kh}{k+h}(f+g)\right)\right]\\
&=\frac{k+h}{kh}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{h}{k+h}\varphi(kf(i))^*+\frac{k}{k+h}\varphi(hg(i))^*\right.\\
&\quad\left.-\varphi\left(\frac{kh}{k+h}(f(i)+g(i))\right)^*\right]\omega(i)\\
&\ge\frac{k+h}{kh}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{h}{k+h}\varphi(kf(\sigma(i)))+\frac{k}{k+h}\varphi(hg(\sigma(i)))\right.\\
&\quad\left.-\varphi\left(\frac{kh}{k+h}(f(\sigma(i))+g(\sigma(i))\right)\right]\omega(i).
\end{aligned}
$$

在最后一个不等式中，引理 2.6 和等式 (1) 被用到.

与引理 2.5 中的证明一样,我们有对于任意 $i\in\mathbf{N}$, $kf(\sigma(i))\le kf^*(1)\le\gamma$ 且 $hg(\sigma(i))\le\gamma$. 因此在 T 上，我们有

$$
\begin{aligned}
&\varphi\left(\frac{kh}{k+h}(f(\sigma(i))+g(\sigma(i)))\right)\\
&=\varphi\left(\frac{h}{k+h}kf(\sigma(i))+\frac{k}{k+h}hg(\sigma(i))\right)\\
&\le(1-\delta)\left[\frac{h}{k+h}\varphi(kf(\sigma(i)))+\frac{k}{k+h}\varphi(hg(\sigma(i)))\right]
\end{aligned}
$$

于是,

$$
2-\|f+g\|^\circ \;\ge\; \delta\cdot\frac{k+h}{kh}\sum_{i\in T}\left[\frac{h}{k+h}\varphi(kf(\sigma(i)))\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{k}{k+h}\varphi(hg(\sigma(i)))\Big]\omega(i) \\
&\geq \frac{2\delta}{d}\sum_{i\in T}\varphi\left[\frac{hk}{k+h}(f(\sigma(i))+g(\sigma(i)))\right]\omega(i) \\
&= \frac{2\delta}{d}\sum_{i\in T}\varphi\left(\frac{hk}{h+k}(f+g)\right)^*(i)\omega(i) \\
&\geq \frac{2\delta}{Kd}\sum_{i\in T}\varphi\left((f+g)\right)^*(i)\omega(i) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

由 ρ_φ 的正交次可加性 (见 [1]), $\rho_\varphi(kf-hg)>\varepsilon'$ 和 (2), 我们有 $\rho_\varphi((kf(\sigma)-hg(\sigma))\chi_T)\geq \frac{\varepsilon'}{2}$. 而且，因为 φ 满足 δ_2 和 $|f-g|\leq f+g$, 则

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon'}{2} &\leq \rho_\varphi\left((kf(\sigma)-hg(\sigma))\chi_T\right)\leq \rho_\varphi\left((kf(\sigma)+hg(\sigma))\chi_T\right) \\
&= \rho_\varphi\left(\frac{kh}{k+h}\left(\frac{k+h}{h}f(\sigma)+\frac{k+h}{k}g(\sigma)\right)\chi_T\right) \\
&\leq K\rho_\varphi\left(\frac{k+h}{h}f(\sigma)+\frac{k+h}{k}g(\sigma)\right)\chi_T \\
&\leq K\rho_\varphi((k+h)(f(\sigma)+g(\sigma))\chi_T)\leq K^2\rho_\varphi((f(\sigma)+g(\sigma))\chi_T) \\
&= K^2\rho_\varphi((f+g)^*\chi_T).
\end{aligned}
$$

因此 $\rho_\varphi((f+g)^*\chi_T)\geq\frac{\varepsilon'}{2K^2}$. 现在, 应用引理 2.4, 存在 $\varepsilon_1>0$ 使得 $\sum\limits_{i\in T}\varphi(f+g)^*(i)\omega(i)\geq\varepsilon_1$. 结合 (3), 我们便有

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^\circ<1-\frac{\delta\varepsilon_1}{Kd},$$

这就证明了 $\lambda^\circ_{\varphi,\omega}$ 是一致凸的.

必要性. (i) 因为一致凸的 Banach 空间是自反的以及 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数是等价的，由引理 2.9, 我们得到 $\varphi\in\delta_2\bigcap\nabla_2(0)$. 因此 (i) 成立.

(ii) 记 $\chi_{i,j}=\sum\limits_{k=i}^{j}e_k$. 则由定理 1.7, $\|\chi_{1,n}\|^\circ=\psi^{-1}(\frac{1}{S(n)})S(n)$. 假设 (ii) 不成立，则存在无穷序列 $\{n_k\}\subset\mathbf{N}$ 使得 $\frac{S(2n_k)}{S(n_k)}\to 1$. 令 $f_k=\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{S(n_k)})S(n_k)}\chi_{1,n_k}$, $g_k=\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{S(2n_k)})S(2n_k)}\chi_{1,2n_k}$, 我们有 $\|f_k\|^\circ=\|g_k\|^\circ=1$. 容易看到 $|f_k-g_k|\geq g_k\chi_{n_{k+1},2n_k}$. 因此

$$
\begin{aligned}
\|f_k-g_k\|^\circ &\geq \|g_k\chi_{n_{k+1},2n_k}\|^\circ \\
&= \left\|\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{S(2n_k)})S(2n_k)}\chi_{n_{k+1},2n_k}\right\|^\circ
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{S(2n_k)})S(2n_k)}\psi^{-1}\left(\frac{1}{S(n_k)}\right)S(n_k)\to 1,$$

这是因为对于充分大的 k, $(1-\varepsilon)\psi^{-1}(\frac{1}{S(2n_k)})\le\psi^{-1}((1-\varepsilon)\frac{1}{S(2n_k)})\le\psi^{-1}(\frac{S(2n_k)}{S(n_k)}\cdot\frac{1}{S(2n_k)})\le \psi^{-1}((1+\varepsilon)\frac{1}{S(2n_k)})\le(1+\varepsilon)\psi^{-1}(\frac{1}{S(2n_k)})$, 即 $1-\varepsilon<\frac{\psi^{-1}(\frac{1}{S(n_k)})}{\psi^{-1}(\frac{1}{S(2n_k)})}<1+\varepsilon$. 又因为 $\frac{\psi(u)}{u}$ 是递增的，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f_k+g_k}{2}\right\|^{\circ} &\ge \|g_k\chi_{1,n_k}\|^{\circ}\\ &= \frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{S(2n_k)})S(2n_k)}\psi^{-1}\left(\frac{1}{S(n_k)}\right)S(n_k)\to 1,\end{aligned}$$

这说明 $\lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 不是一致凸的. 从而 (ii) 成立.

(iii) 假设 φ 在 $[0,\gamma]$ 上不是一致凸的，则由命题 0.1 知存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $t_n\downarrow 0$ 使得 $p((1+\varepsilon_0)t_n)<(1+\frac{1}{n})p(t_n)$. 令 $u_n=(1+\varepsilon_0)t_n$. 则

$$p(u_n)<\left(1+\frac{1}{n}\right)p(au_n), \tag{4}$$

这里 $a=\frac{1}{1+\varepsilon_0}\in(0,1)$. 我们可以假设对于所有自然数 n, 有 $au_n>u_{n+1}$.

我们应用引理 2.8 于 $u=u_{2n-1}$ 和 $v=u_{2n}$. 记

$$k_n^f=u_{2n-1}p(u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+au_{2n}p(au_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k),$$

$$k_n^g=au_{2n-1}p(au_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+u_{2n}p(u_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k),$$

其中 j 和 $i=i(j)$ 是引理 2.8 中的. 定义

$$f_n=\frac{1}{k_n^f}(u_{2n-1}\chi_{1,i}+au_{2n}\chi_{i+1,j}), \tag{5}$$

$$g_n=\frac{1}{k_n^g}(au_{2n-1}\chi_{1,i}+u_{2n}\chi_{i+1,j}). \tag{6}$$

则 $f_n^*=f_n, g_n^*=g_n$, 而且

$$\rho_\psi(p(k_n^f f_n))=\psi(p(u_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\psi(p(au_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)=g(i(j),j), \tag{7}$$

$$\rho_\psi(p(k_n^g g_n)) = \psi(p(au_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i}\omega(k) + \psi(p(u_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k) = h(i(j),j). \tag{8}$$

因为 p 在 0 点是连续的，由引理 2.8 (iii) 和 (iv)，我们有 $\rho_\psi(p(k_n^f f_n)) \to 1$ 以及 $\rho_\psi(p(k_n^g g_n)) \to 1$. 容易看到 $k_n^f \geq g(i(j),j) \to 1, k_n^g \geq h(i(j),j) \to 1$. 我们同样可以断言 $\|g_n\|^\circ$ 和 $\|f_n\|^\circ$ 是有界的. 实际上，$\rho_\varphi(k_n^g g_n) = \varphi(au_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k) + \varphi(u_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k) \leq k_n^g$. 如果 $k_n^g \geq 1$，则 $k_n^g\rho_\varphi(g_n) \leq \rho_\varphi(k_n^g g_n) \leq k_n^g$，从而 $\|g_n\| \leq 1$. 如果 $k_n^g < 1$，则 $\|k_n^g g_n\| \leq 1$，即 $\|g_n\| \leq \frac{1}{k_n^g} \to 1$，这是因为 $1 > k_n^g \geq h(i(j),j) \to 1$. 而且从 $\sum_{i=1}^{\infty} f_n^*(i)p(k_n^f f_n^*)(i)\omega(i) = \sum_{i=1}^{\infty} g_n^*(i)p(k_n^g g_n^*)(i)\omega(i) = 1$ 以及引理 2.7，我们有 $\|f_n\|^\circ \to 1$ 和 $\|g_n\|^\circ \to 1$. 由 $\varphi \in \nabla_2(0)$（见 (i) 的证明）和定理 1.6，我们看到 $\{k_n^f\}$ 和 $\{k_n^g\}$ 是有界的. 如果有必要的话通过取子列，我们可以假设

$$u_{2n-1}p(u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k) \to k_1,$$

以及

$$au_{2n}p(au_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k) \to k_2.$$

由 (4) 我们知道 $p(u_n)/p(au_n) \to 1$. 因此，$k_n^f \to k_1 + k_2$ 和 $k_n^g \to ak_1 + \frac{1}{a}k_2$.

情形 I. $0 < k_1 < \infty$ 以及 $0 < k_2 < \infty$.

令 $L = \max\left\{\frac{2(k_1+k_2)(ak_1+\frac{1}{a}k_2)}{(\frac{1}{a}-a)k_2}, \frac{2(k_1+k_2)(ak_1+\frac{1}{a}k_2)}{(1-a^2)k_1}, 4\right\}$. 由 $\varphi \in \delta_2$，存在 $K > 1$ 使得 $\varphi(Lu) \leq K\varphi(u)$ $(0 \leq u \leq \gamma)$. 而且，$3\|f_n\| > \|f_n\|^\circ = 1$，这蕴含着 $\rho_\varphi(3f_n) > 1$. 因为

$$k_n^f = \sum_{k=1}^{\infty} k_n^f f_n(k)p(k_n^f f_n)(k)\omega(k) = \rho_\psi(p(k_n^f f_n)) + \rho_\varphi(k_n^f f_n)$$

以及 $\rho_\psi(p(k_n^f f_n)) \to 1$，我们得到 $k_n^f - \rho_\varphi(k_n^f f_n) \to 1$. 而且对于充分大的 n，$1+\varepsilon > k_n^f - \rho_\varphi(k_n^f f_n) > 1-\varepsilon$，这里 ε 满足不等式 $\frac{3}{1-\varepsilon} < 4$, $(1-\varepsilon)K > 1$, $\frac{(1-\varepsilon)^2K}{(1-\varepsilon)K-1} > 1$ 和 $\frac{(1+\varepsilon)K}{(1-\varepsilon)K-1} - 2\varepsilon(1-\varepsilon)\frac{K}{(1-\varepsilon)K-1} > 1$. 因此，对于充分大的 n，

$$\begin{aligned}
k_n^f &< (1-\varepsilon)\frac{k_n^f}{1-\varepsilon}\rho_\varphi(3f_n)\\
&\leq (1-\varepsilon)\rho_\varphi(4k_n^f f_n)\\
&= (1-\varepsilon)\varphi(4u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k) + \varphi(4au_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le (1-\varepsilon)K\left(\varphi(u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\varphi(au_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right)\\
&\le (1-\varepsilon)K(k_n^f-1+\varepsilon),
\end{aligned}
$$

这蕴含着 $k_n^f > \frac{(1-\varepsilon)^2K}{(1-\varepsilon)K-1} > 1$. 如果有必要，我们可以选择适当的子列使得

$$
\frac{(\frac{1}{a}-a)k_2}{(k_1+k_2)\left(ak_1+\frac{1}{a}k_2\right)}u_{2n-1} > \frac{(1-a^2)k_1}{(k_1+k_2)\left(ak_1+\frac{1}{a}k_2\right)}u_{2n}.
$$

现在，对于充分大的 n, 我们有

$$
\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(K^2(f_n-g_n)\right) &= \varphi\left[K^2\left(\frac{1}{k_n^f}-\frac{a}{k_n^g}\right)u_{2n-1}\right]\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\\
&\quad+\varphi\left[K^2\left(\frac{a}{k_n^f}-\frac{1}{k_n^g}\right)u_{2n}\right]\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\\
&\ge K^2\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{a}-a)k_2}{(k_1+k_2)\left(ak_1+\frac{1}{a}k_2\right)}u_{2n-1}\right)\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\right.\\
&\quad\left.+\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{(1-a^2)k_1}{(k_1+k_2)\left(ak_1+\frac{1}{a}k_2\right)}u_{2n}\right)\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right]\\
&\ge K^2\left[\varphi\left(\frac{1}{L}u_{2n-1}\right)\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\varphi\left(\frac{1}{L}au_{2n}\right)\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right]\\
&\ge K\left[\varphi(u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\varphi(u_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right]\\
&\ge K\left[\varphi(u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\varphi(au_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right]\\
&\ge K(k_n^f-1-\varepsilon)\\
&\ge K\left(\frac{(1-\varepsilon^2)K}{(1-\varepsilon)K-1}-1-\varepsilon\right)\\
&= \frac{K(1+\varepsilon)-2\varepsilon(1-\varepsilon)K}{(1-\varepsilon)K-1} > 1,
\end{aligned}
$$

这说明 $\|f_n-g_n\|^\circ \ge \|f_n-g_n\| \ge \frac{1}{K^2}$.

情形 II. $k_1=0, 0<k_2<\infty$ 或者 $0<k_1<\infty, k_2=0$.

我们仅考虑 $0<k_1<\infty$, $k_2=0$, 即 $au_{2n}p(au_{2n})\sum\limits_{k=i+1}^{j}\omega(k)\to 0$, 这蕴含着

$$
\psi(p(au_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\to 0.
$$

由 (4), 我们同样有 $u_{2n}p(u_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\to 0$, 进而 $\psi(p(u_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\to 0$. 由引理 2.8, 等式 (7) 和 (8), 我们得到 $\psi(p(u_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)\to 1$, $\psi(p(au_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)\to 1$. 即, $\frac{\psi(p(u_{2n-1}))}{\psi(p(au_{2n-1}))}\to 1$. 现在我们可以选择 $\{u_n\}$ 的一个子列, 仍记为 $\{u_n\}$, 使得 $\frac{\psi(p(u_n))}{\psi(p(au_n))}\to 1$. 使用这个新的序列 $\{u_n\}$, 我们选择 i 和 j 使得 $\psi(p(u_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)\le\frac{1}{2}$, $\psi(p(u_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i+1}\omega(k)>\frac{1}{2}$, 以及 $\psi(p(au_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\le\frac{1}{2}$,$\psi(p(au_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j+1}\omega(k)>\frac{1}{2}$. 进而,

$$\frac{1}{2}-\psi(p(u_{2n-1}))\omega(i+1)<\psi(p(u_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)\le\frac{1}{2}$$

而且

$$\frac{1}{2}-\psi(p(au_{2n}))\omega(j+1)<\psi(p(au_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\le\frac{1}{2}.$$

注意到 $\frac{\psi(p(u_n))}{\psi(p(au_n))}\to 1$, 我们得到

$$\psi(p(u_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\psi(p(au_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\to 1 \tag{9}$$

以及

$$\psi(p(au_{2n-1}))\sum_{k=1}^{i}\omega(k)+\psi(p(u_{2n}))\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\to 1. \tag{10}$$

现在我们使用新的 $\{u_n\}$ 以及新的 i,j 象情形 I 一样来定义 f_n, g_n, k_n^f 和 k_n^g , 我们有 $\rho_\psi(p(k_n^f f_n))\to 1$, $\rho_\psi(p(k_n^g g_n))\to 1$. 由引理 2.7, 我们得到 $\|f_n\|^\circ\to 1,\|g_n\|^\circ\to 1$. 象情形 I 一样, 用新的 $\{u_n\}$ 定义新的 k_1 和 k_2 . 则 $k_1\neq 0$ 和 $k_2\neq 0$. 和情形 I 中的证明相似, 我们可以证明 $\|f_n-g_n\|^\circ\ge\frac{1}{K^2}$.

记 $k_n=\frac{k_n^f k_n^g}{k_n^f+k_n^g}$, 我们有

$$\begin{aligned} k_n(f_n+g_n) &= \frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}k_n^f f_n+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}k_n^g g_n \\ &= \left(\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}\right)\chi_{1,i} \\ &\quad+\left(\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}\right)\chi_{i+1,j}. \end{aligned}$$

记

$$v_n^f=p(k_n^f f_n)=p(u_{2n-1})\chi_{1,i}+p(au_{2n})\chi_{i+1,j},$$

$$v_n^g = p(k_n^g g_n) = p(au_{2n-1})\chi_{1,i} + p(u_{2n})\chi_{i+1,j}.$$

现在，由 (7), (8), (9), (10), 定理 1.3 以及 k_n^f, k_n^g 的定义，对于充分大的 n,

$$\begin{aligned}
&\|k_n(f_n+g_n)\|^\circ \\
&\geq \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k_n(f_n+g_n)^*(k)\frac{v_n^f(k)}{1+\varepsilon}\omega(k) + \sum_{k=1}^{\infty} k_n(f_n+g_n)^*(k)\frac{v_n^g(k)}{1+\varepsilon}\omega(k)\right] \\
&= \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\left[\left(\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}p(u_{2n-1}) + \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}p(u_{2n-1})\right)\sum_{k=1}^{i}\omega(k)\right. \\
&\quad + \left(\frac{k_n^g}{k_n^1+k_n^g}au_{2n}p(au_{2n}) + \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}p(au_{2n})\right)\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k) \\
&\quad + \left(\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}p(au_{2n-1}) + \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}p(au_{2n-1})\right)\sum_{k=1}^{i}\omega(k) \\
&\quad \left. + \left(\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}p(u_{2n}) + \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}p(u_{2n})\right)\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right] \\
&= \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\left[2k_n + \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}p(u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k)\right. \\
&\quad + \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}p(au_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k) \\
&\quad \left. + \frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}p(au_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k) + \frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}p(u_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right] \\
&\geq \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\left[2k_n + \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}p(au_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k)\right. \\
&\quad + \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}u_{2n}p(u_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k) \\
&\quad + \frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}\frac{1}{1+\frac{1}{2n-1}}u_{2n-1}p(u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k) \\
&\quad \left. + \frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}p(au_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right] \\
&= \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\left[2k_n + k_n - \frac{1}{1+2n}\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}p(u_{2n})\sum_{k=i+1}^{j}\omega(k)\right. \\
&\quad \left. + k_n - \frac{1}{2n}\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}p(u_{2n-1})\sum_{k=1}^{i}\omega(k)\right]
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\left[4k_n - \frac{1}{1+2n}\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}k_n^g - \frac{1}{2n}\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}k_n^f\right]$$
$$\geq \frac{1}{2(1+\varepsilon)}(4-\frac{1}{n})k_n.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 我们得到 $\|f_n+g_n\|^\circ \geq 2-\frac{1}{2n} \to 2$, 这矛盾于 $\lambda^\circ_{\varphi,\omega}$ 的一致凸性.

如果 ω 是常数序列，我们就得到赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间一致凸性的判别法则 ([11]):

推论 2.11 l°_φ 是一致凸的当且仅当 (i) $\varphi \in \delta_2$ 以及 (ii) φ 在 $[0, q(\psi^{-1}(1))]$ 上是一致凸的.

第三章　赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 函数空间的局部一致凸性

我们先给出本章需要用到的有关定义.

一个 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 称为局部一致凸的, 如果 $x, y_n \in S(X)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x+y_n\| = 2$ 蕴含 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x-y_n\| = 0$, 其中 $S(X)$ 是 X 的单位球面. $X \in (\mathrm{LUR}^*)$ 意味着 X 仅对于非增非负元有局部一致凸性质.

称 x_n 局部依测度收敛到 x, 若对于每一个有限测度集 A, x_n 在 A 上依测度收敛到 x.

权函数 $\omega = \omega(x)$ 称为对较大的变量满足正则性条件, 若存在 $K > 1, x_0 > 0$ 使得对于任意 $x > x_0$, 均有 $W(2x) \geq KW(x)$, 其中 $W(x) = \int_0^x \omega(t)dt$.

为了便于后面的证明, 现把第一章中的对应的函数空间的有关性质罗列于此.

1°. 任意 $f \in \Lambda_{\varphi,\omega}$, $\|f\| \leq \|f\|^\circ \leq 2\|f\|$.

2°. 如果 $\|f\|^\circ \leq 1$, 则 $\rho_\varphi(f) \leq \|f\|^\circ$.

3°. $\|f\|^\circ = \sup\limits_{\rho_\psi(g)\leq 1} \int_0^\gamma f^*(t)g^*(t)\omega(t)dt$

4°. $\|\chi_{[0,t]}\|^\circ_{\Lambda_{\varphi,\omega}} = \psi^{-1}\left(\frac{1}{\int_0^t \omega(s)ds}\right)\int_0^t \omega(s)ds$. $\|\chi_{[0,t]}\|_{\Lambda_{\varphi,\omega}} = \frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{\int_0^t \omega(s)ds}\right)}$

5°. 任意 $f \in \Lambda_{\varphi,\omega}$, $k \in K(f) = [k^*, k^{**}]$ 当且仅当

$$\|f\|^\circ = \frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kf)) = \inf_{h>0}\frac{1}{h}(1+\rho_\varphi(hf)),$$

其中 $k^* = \inf\{h>0 : \rho_\psi(p(h|f|)) \geq 1\}, k^{**} = \sup\{h>0 : \rho_\psi(p(h|f|)) \leq 1\}$.

6°. (i) $\inf\{k : k \in K(x), \|x\|^\circ = 1\} > 1$ 当且仅当 $\varphi \in \Delta_2$.

(ii) 对于每一对 $b \geq a > 0$ 集合 $Q = \bigcup\{K(f) : a \leq \|f\|^\circ \leq b\}$ 是有界的当且仅当 $\varphi \in \nabla_2$.

在证明主要定理之前先给出几个引理.

引理 3.1 令 $\varphi\in\Delta_2$. 则对于任意 $L>0$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$\rho_\varphi(u)\le L,\rho_\varphi(v)\le\delta\Rightarrow|\rho_\varphi(u+v)-\rho_\varphi(u)|<\varepsilon,$$

其中 $u=u^*,v=v^*$.

证明: 类似于 [11, 引理 1.40], 略.

引理 3.2 假设 ω 对较大变量满足正则性条件，即存在 $k>1$ 和 $t_0>0$ 使得 $W(2x)\ge kW(x)$ 其中 $x>t_0$. 令 $E=[t,\infty)$ 和 $E'=[2t,\infty)$, 这里 $t>t_0$. 则对于 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\rho_{\varphi,t}(x)<\delta$ 时，有 $\rho_\varphi(x|_{E'})<\varepsilon$. 这里 $x=x^*$, $\rho_{\varphi,t}(x)=\int_t^\infty\varphi(x(s))\omega(s)ds$. 其中 δ 独立于 x 和 t.

证明: 首先，$\int_t^{2t}\omega(s)ds=W(2t)-W(t)\ge(k-1)W(t)$. 对于 $\varepsilon>0$, 选择 $\delta=\frac{\varepsilon}{1+\frac{1}{k-1}}$. 当 $\rho_{\varphi,t}(x)<\delta$, 有 $\varphi(x(2t))\int_t^{2t}\omega(s)ds\le\int_t^{2t}\varphi(x(s))\omega(s)ds\le\rho_{\varphi,t}(x)<\delta$. 因此

$$\begin{aligned}\rho_\varphi(x|_{E'}) &\le \int_0^t\varphi(x(2t+s)\omega(s)ds+\delta\\ &\le \varphi(x(2t))\int_0^t\omega(s)ds+\delta\\ &\le \frac{\delta}{\int_t^{2t}\omega(s)ds}\int_0^t\omega(s)ds+\delta\\ &\le \delta\left(\frac{1}{k-1}+1\right)=\varepsilon.\end{aligned}$$

引理 3.3: 设 ω 对较大变量满足正则性条件，$\varphi\in\Delta_2,\psi\in\Delta_2$, $x_n=x_n^*,y_n=y_n^*\in S(\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}[0,\infty))$ 满足 $\|x_n+y_n\|^\circ\to2$, $E=[t,\infty)$, $E'=[2t,\infty)(t>t_0$, 这里 t_0 是引理 3.2 中定义的). 则对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n'\in\mathbf{N}$ 和 $\delta>0$, 当 $n>n'$ 时, $\|y_n|_E\|^\circ<\delta\Longrightarrow\|x_n|_{E'}\|^\circ<\varepsilon$.

证明: 假设 $\|x_n\|^\circ=\|y_n\|^\circ=1$, 和 $k_n^x\in K(x_n),k_n^y\in K(y_n)$. 由于 $\psi\in\Delta_2$ 和 6°, $\{k_n^x\},\{k_n^y\}$ 是有界的，即存在 $d>1$, 使得 $k_n^x\le d$, $k_n^y\le d$. 我们看到 $\frac{k_n^x}{k_n^x+k_n^y},\frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}\in[a,b]\subset(0,1)$, 这里 $a=\frac{1}{1+d},b=\frac{d}{1+d}$. 同样由于 $\psi\in\Delta_2$, 我们断言对于任意 $l\in[a,b]$, 存在 $\beta>0$, (独立于 l), 使得

$$\varphi(lu)\le(l-\beta)\varphi(u),0\le u\le\infty. \tag{1}$$

实际上，固定 $u\in(0,\infty)$, 让 $F(t)=\frac{\varphi(tu)}{t\varphi(u)},t\in[a,b]$, 则右导数 $F'(t)\ge0$. 因此 $F(t)$

在 $[a,b]$ 上是非减的. 对于任意 $l\in[a,b]$, $F(l)\le F(b)$. 由 $\psi\in\Delta_2$, 存在 $\eta>0$ 使得 $\varphi(bu)\le(b-\eta)\varphi(u)$,$u\in[0,\infty)$, 即 $F(b)\le(1-\frac{\eta}{b})$. 因此，对于任意 $l\in[a,b]$,

$$\varphi(lu)\le l(1-\frac{\eta}{b})\varphi(u)=(l-\frac{l}{b}\eta)\varphi(u)\le(l-\frac{a}{b}\eta)\varphi(u),u\in[0,\infty).$$

取 $\beta=\frac{a}{b}\eta$. 则 (1) 成立.

由引理 3.1, 对于任意 $\alpha>0$, 存在 $\delta>0$ 使得 $\rho_\varphi(x)\le d$ 和 $\rho_\varphi(y)<\delta$ 可导出 $|\rho_\varphi(x+y)-\rho_\varphi(x)|<\alpha$.

记 $k_n=\frac{k_n^xk_n^y}{k_n^x+k_n^y}$. 则

$$\rho_\varphi(k_nx_n)\le\frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^xx_n)=\frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}(k_n^x-1)\le d.$$

因此 $\rho_\varphi(k_ny_n|_E)<\delta$ 可推出

$$|\rho_{\varphi,t}(k_n(x_n+y_n))-\rho_{\varphi,t}(k_nx_n)|\le|\rho_\varphi(k_n(x_n+y_n)|_E)-\rho_\varphi(k_nx_n|_E)|<\alpha. \tag{2}$$

我们容易看到 $\|y_n|_E\|^\circ<\frac{\delta}{d}$ 可推出 $\rho_\varphi(k_ny_n|_E)\le\|k_ny_n|_E\|\le\|k_ny_n|_E\|^\circ<\delta$. 因此若 y_n 满足 $\|y_n|_E\|^\circ<\frac{\delta}{d}$, 则由 (1) 和 (2), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_t^\infty\varphi(k_n(x_n+y_n)(s))\omega(s)ds\\ &\le\int_t^\infty\varphi(k_nx_n(s))\omega(s)ds+\alpha\\ &\le\left(\frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}-\beta\right)\int_t^\infty\varphi(k_n^xx_n(s))\omega(s)ds+\alpha.\end{aligned}$$

注意到 $\rho_\varphi(k_n^xx_n)=k_n^x-1,\rho_\varphi(k_n^yy_n)=k_n^y-1$, 和 $\|x_n+y_n\|^\circ\to2$, 我们有

$$\begin{aligned}2&\ge\|x_n\|^\circ+\|y_n\|^\circ=\frac{1}{k_n^x}[1+\rho_\varphi(k_n^xx_n)]+\frac{1}{k_n^y}[1+\rho_\varphi(k_n^yy_n)]\\ &=\frac{k_n^x+k_n^y}{k_n^xk_n^y}\left[1+\frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^xx_n)+\frac{k_n^x}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^yy_n)\right]\\ &\ge\frac{k_n^x+k_n^y}{k_n^xk_n^y}\left[1+\rho_\varphi\left(\frac{k_n^xk_n^y}{k_n^x+k_n^y}(x_n+y_n)\right)\right]\\ &\ge\|x_n+y_n\|^\circ\to2.\end{aligned}$$

因此存在 $n' \in \mathbf{N}$, 当 $n > n'$ 时, 有 $\frac{1}{k_n}[1+\rho_\varphi(k_n(x_n+y_n))] > 2-\alpha$. 因此

$$\begin{aligned} k_n\alpha &> 2k_n - 1 - \rho_\varphi(k_n(x_n+y_n)) \\ &= \frac{k_n^x}{k_n^x+k_n^y}(k_n^y-1) + \frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}(k_n^x-1) - \rho_\varphi(k_n(x_n+y_n)) \\ &= \frac{k_n^x}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^y y_n) + \frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^x x_n) - \rho_\varphi(k_n(x_n+y_n)) \\ &\geq \beta\int_t^\infty \varphi(k_n^x x_n(t))\omega(t)dt - \alpha. \end{aligned}$$

所以

$$\rho_{\varphi,t}(k_n^x x_n) \leq \frac{(k_n+1)\alpha}{\beta} < \frac{d+1}{\beta}\alpha.$$

由于 $\varphi \in \Delta_2$ 和引理 3.2, 我们选择充分小的 α 使得 $\|x_n|_{E'}\| \leq \|k_n^x x_n|_{E'}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而当 $n > n'$ 时, 有 $\|x_n|_{E'}\|^\circ \leq 2\|x_n|_{E'}\| < \varepsilon$.

引理 3.4: 设 φ 在 $[0,\infty)$ 上是严格凸的, $\varphi \in \Delta_2$ 和 $\psi \in \Delta_2$, 让 $f = f^*, g_n = g_n^* \in S(\Lambda_{\varphi,\omega}^\circ[0,\gamma))$ 使得 $\|f+g_n\|^\circ \to 2$. 则 $h_n g_n$ 局部依测度收敛到 kf, 这里 $h_n \in K(g_n), k \in K(f)$.

证明: 任取有限测度可测集 $A \subset [0,\gamma)$. 固定正数 ε 和 δ 并且定义可测集合

$$A_n = \{t \in A : |h_n g_n(t) - kf(t)| \geq \delta\},$$

$$B_n = \left\{t \in A : \varphi(g_n(t)) > \frac{2}{W(\frac{\varepsilon}{2})}\right\} \bigcup \left\{t \in A : \varphi(f(t)) > \frac{2}{W(\frac{\varepsilon}{2})}\right\},$$

则对于 $n \in \mathbf{N}$,

$$2 \geq \rho_\varphi(g_n) + \rho_\varphi(f) \geq \int_0^{m(B_n)} \left(\frac{2}{W\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)\omega(t)dt = \left(\frac{2}{W\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)W(m(B_n)).$$

因此 $W(m(B_n)) \leq W(\frac{\varepsilon}{2})$, 即 $m(B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. 对于 $i \in \mathbf{N}$, 定义

$$C_i = \left\{t \in A : \omega(t) > \frac{1}{i}\right\}.$$

我们得到 $C_i \uparrow$ 以及 $\bigcup_{i=1}^\infty C_i = A$. 而且当 $i \to \infty$ 时, $m(A \backslash C_i) \to 0$, 因此对于某个不依赖于 n 的 i, 有 $m((A_n \backslash B_n) \backslash C_i) < \frac{\varepsilon}{4}$. 现在我们估计 $m((A_n \backslash B_n) \bigcap C_i)$.

因为 $\varphi \in \Delta_2$, 所以存在 $l > 1$ 使得 $\varphi(du) \le l\varphi(u)$ 这里 $u \in [0, \infty)$. 由于 6° 和 $\psi \in \Delta_2$, 我们得到

$$1 < \inf_{k \in K(f), h_n \in K(g_n)} \{k, h_n\} \le d = \sup_{k \in K(f), h_n \in K(g_n)} \{k, h_n\} < +\infty.$$

记

$$a = \inf_{k \in K(f), h_n \in K(g_n)} \left\{ \frac{k}{k+h_n}, \frac{h_n}{k+h_n} \right\}, \ b = \sup_{k \in K(f), h_n \in K(g_n)} \left\{ \frac{k}{k+h_n}, \frac{h_n}{k+h_n} \right\}.$$

则 $[a, b] \subset (0, 1)$. 由于 φ 是严格凸的，所以存在 $p \in (0, 1)$ 使得

$$\varphi[\alpha u + (1-\alpha)v] \le (1-p)[\alpha\varphi(u) + (1-\alpha)\varphi(v)]$$

对于所有 $\alpha \in [a, b]$, $|u - v| \ge \delta$, $\max\{\varphi(u), \varphi(v)\} \le \frac{2l}{W(\frac{\epsilon}{2})}, u, v \ge 0$ 均成立. 而且对于每一个 $t \in A_n \backslash B_n$, 我们推出

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\frac{h_n k}{h_n + k}(g_n(t) + f(t))\right) \\
&= \varphi\left(\frac{k}{k+h_n} h_n g_n(t) + \frac{h_n}{k+h_n} k f(t)\right) \\
&\le (1-p)\left[\frac{k}{k+h_n}\varphi(h_n g_n(t)) + \frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(t))\right].
\end{aligned}$$

于是若记 $D = (A_n \backslash B_n) \bigcap C_i$, 我们有

$$\begin{aligned}
&2 - \|f + g_n\|^\circ = \|f\|^\circ + \|g_n\|^\circ - \|f + g_n\|^\circ \\
&\ge \frac{1}{k}[1 + \rho_\varphi(kf)] + \frac{1}{h_n}[1 + \rho_\varphi(h_n g_n)] \\
&\quad - \frac{k+h_n}{kh_n}\left[1 + \rho_\varphi\left(\frac{kh_n}{k+h_n}(f + g_n)\right)\right] \\
&= \frac{k+h_n}{kh_n}\int_0^\infty \left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(t))^* + \frac{k}{k+h_n}\varphi(hg_n(t))^*\right. \\
&\quad \left. - \varphi\left(\frac{kh}{k+h}(f(t) + g_n(t))\right)^*\right]\omega(t)dt \\
&\ge p\frac{k+h_n}{kh_n}\int_D \left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(t)) + \frac{k}{k+h_n}\varphi(h_n g_n(t))\right]\omega(t)dt \\
&= p\int_D \left[\frac{1}{k}\varphi(kf(t)) + \frac{1}{h_n}\varphi(h_n g_n(t))\right]\omega(t)dt
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{p}{d}\int_D [\varphi(k(f(t)) + \varphi(h_n g_n(t))]\,\omega(t)dt$$
$$\geq \frac{2p}{d}\int_D \varphi\left(\frac{kf(t)-h_n g_n(t)}{2}\right)\omega(t)dt$$
$$\geq \frac{2p}{di}\varphi\left(\frac{\delta}{2}\right)m(D).$$

因为 $\varphi \in \Delta_2$ 和 $\|f+g_n\|^\circ \to 2$, 我们得到对于充分大的 n , $m\left((A_n\backslash B_n)\bigcap C_i\right) < \frac{\varepsilon}{4}$. 现在我们有

$$m(A_n) \leq m(B_n) + m\left((A_n\backslash B_n)\backslash C_i\right) + m\left((A_n\backslash B_n)\bigcap C_i\right) < \varepsilon$$

这样我们就证明了 $h_n g_n$ 局部依测度收敛到 kf.

下面我们给出本章的主要定理.

定理 3.5: 设 ω 对较大的变量满足正则性条件. 则 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}[0,\infty)$ 是局部一致凸的 (LUR) 当且仅当满足下面的条件:

(i) φ 在 $[0,\infty)$ 上是严格凸的,

(ii) $\varphi \in \Delta_2$ 且 $\psi \in \Delta_2$.

证明: 充分性. 由 [17, 定理 1 和引理 3], 我们仅证明 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}[0,\infty) \in$ (LUR*). 因为简单函数空间在 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}[0,\infty)$ 中是稠密的, 并且 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}[0,\infty)$ 是理想 Banach 函数空间, 应用 [3] 中引理 1, 仅需考虑具有紧支集的非负简单函数即可. 取非负简单函数 $f = f^*, g_n = g_n^* \in S(\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}[0,\infty))$ 使得 $\|f+g_n\|^\circ \to 2$. 令 $k \in K(f)$, $h_n \in K(g_n)$. 由条件 (ii) 和 6°, 我们有

$$1 < \inf_{k\in K(f),h_n\in K(g_n)}\{k, h_n\} \leq d = \sup_{k\in K(f),h_n\in K(g_n)}\{k, h_n\} < +\infty.$$

记

$$a = \inf_{k\in K(f),h_n\in K(g_n)}\left\{\frac{k}{k+h_n}, \frac{h_n}{k+h_n}\right\},\ b = \sup_{k\in K(f),h_n\in K(g_n)}\left\{\frac{k}{k+h_n}, \frac{h_n}{k+h_n}\right\}.$$

则 $[a,b] \subset (0,1)$.

因为 ω 对较大变量满足正则性条件, 即存在 $k>1$ 和 $t_0>0$ 使得 $W(2x) \geq kW(x)$(其中 $x \geq t_0$), 由此我们还有 $\int_0^{+\infty}\omega(t)dt = +\infty$. 因此 $f(t) \to 0 (t\to\infty)$. 对于 $\varepsilon > 0$, 存在

$t_1 > t_0$ 使得

$$\|f\chi_A\| < \frac{\varepsilon}{4d}, \tag{3}$$

这里 $A = [t_1, \infty)$. 由引理 3.3, 对于 $E = [t, \infty)(t > t_0)$, 存在 $n' \in \mathbf{N}$ 以及 $\delta_1 > 0$, 当 $n > n'$, $\|f|_E\|^\circ < \delta_1$ 时，有 $\|g_n|_{E'}\|^\circ < \frac{\varepsilon}{4d}$, 这里 $E' = [2t, \infty)$. 取 $t_2 > t_1$ 并且令 $B = [t_2, \infty)$ 使得 $\|f|_B\|^\circ < \delta_1$. 则对于 $n > n'$, 我们有

$$\|g_n|_{B'}\|^\circ < \frac{\varepsilon}{4d}, \tag{4}$$

这里 $B' = [2t_2, \infty)$. 记 $c = f(2t_2)$. 则当 $t \in B'$ 时 $f(t) \le c$ 和当 $t \in \mathbf{R}/B'$ 时 $f(t) \ge c$. 为了方便起见，我们记 $D = \mathbf{R}/B'$. 由引理 3.4, $h_n g_n$ 在 D 上依测度收敛到 kf. 因此 $(h_n g_n|_D)^* \to (kf|_D)^*$ (见 [12]). 进而我们可以选择充分小的 $\delta > 0$ 使得对于每一个 $F \subset D$ 满足 $mF < \delta$, 有

$$\|f|_F\|^\circ \le \|kf|_F\|^\circ < \frac{\varepsilon}{8d}, \|g_n|_F\|^\circ \le \|h_n g_n|_F\|^\circ < \frac{\varepsilon}{8d}. \tag{5}$$

记 $F_n = \left\{t \in D : \varphi(g_n(t)) > \frac{2}{W(\frac{\delta}{2})}\right\} \bigcup \left\{t \in D : \varphi(f(t)) > \frac{2}{W(\frac{\delta}{2})}\right\}$. 由引理 3.4 的证明，我们有 $m(F_n) \le \frac{\delta}{2}$.

由于 $\varphi \in \Delta_2$, 存在 $l > 1$, 使得 $\varphi(du) \le l\varphi(u), u \ge 0$. 因为 φ 在 $[0, \infty)$ 上是严格凸的，所以由 [11, 命题 1.4] 知，存在 $p > 0$ 使得

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) \le (1-p)[\lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v)]$$

对于任意 $\varepsilon_1 > 0$, $\lambda \in [a, b]$, $\max(|u|, |v|) \in [c, \eta]$ 和 $|u - v| \ge \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)} \max\{|u|, |v|\}$, 这里 $\eta = \varphi^{-1}\left(\frac{2}{W(\frac{\delta}{2})}\right)$. 记

$$T_n = \{t \in D\backslash F_n : |kf(t) - h_n g_n(t)| \ge \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)} \max(|kf(t)|, |h_n g_n(t)|)\}.$$

则

$$\begin{aligned}
&\rho_\varphi((kf - h_n g_n)\chi_{(D\backslash F_n)\backslash T_n}) \\
&= \int_0^\infty (\varphi(kf - h_n g_n)\chi_{(D\backslash F_n)\backslash T_n})^*(t)\omega(t)dt \\
&\le \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)} \int_0^\infty (\varphi(k(f\chi_{(D\backslash F_n)\backslash T_n})^*(t)) + \varphi(h_n(g_n\chi_{D\backslash F_n\backslash T_n})^*(t))\omega(t)dt \\
&\le \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)} (\rho_\varphi(kf) + \rho_\varphi(h_n g_n))
\end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)}(k+h_n-2) \le \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{6}$$

同样,

$$\begin{aligned}
&2-\|f+g_n\|^\circ = \|f\|^\circ + \|g_n\|^\circ - \|f+g_n\|^\circ \\
&\ge \frac{1}{k}[1+\rho_\varphi(kf)] + \frac{1}{h_n}[1+\rho_\varphi(h_n g_n)] \\
&\quad -\frac{k+h_n}{kh_n}\left[1+\rho_\varphi\left(\frac{kh_n}{k+h_n}(f+g_n)\right)\right] \\
&= \frac{k+h_n}{kh_n}\int_0^\infty \left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(t)) + \frac{k}{k+h_n}\varphi(h_n g_n(t))\right. \\
&\quad \left. -\varphi\left(\frac{kh_n}{k+h_n}(f(t)+g_n(t))\right)\right]\omega(t)dt \\
&\ge \frac{k+h_n}{kh_n}\int_0^\infty \left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(t)\chi_{T_n}) + \frac{k}{k+h_n}\varphi(h_n g_n(t)\chi_{T_n})\right. \\
&\quad \left. -\varphi\left(\frac{kh_n}{k+h_n}(f(t)+g_n(t))\chi_{T_n}\right)\right]\omega(t)dt
\end{aligned}$$

在 T_n 上，我们得到

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{kh_n}{k+h_n}(f(t)+g_n(t)\right) &= \varphi\left(\frac{h_n}{k+h_n}kf(t) + \frac{k}{k+h_n}h_n g_n(t)\right) \\
&\le (1-p)\left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(t)) + \frac{k}{k+h_n}\varphi(h_n g_n(t))\right].
\end{aligned}$$

而且,

$$\begin{aligned}
2-\|f+g_n\|^\circ &\ge p\cdot\frac{k+h_n}{kh_n}\int_0^\infty \left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(t)\chi_{T_n})\right. \\
&+ \left.\frac{k}{k+h_n}\varphi(h_n g_n(t)\chi_{T_n})\right]\omega(t)dt \\
&= p\int_0^\infty \left[\frac{1}{k}\varphi(kf(t)\chi_{T_n}) + \frac{1}{h_n}\varphi(h_n g_n(t)\chi_{T_n})\right]\omega(t)dt \\
&\ge \frac{p}{d}\int_0^\infty [\varphi(kf(t)\chi_{T_n} + \varphi(h_n g_n(t)\chi_{T_n}]\,\omega(t)dt
\end{aligned}$$

让 $n\to\infty$, 我们有

$$\int_0^\infty [\varphi(kf(t)\chi_{T_n}) + \varphi(h_n g_n(t)\chi_{T_n})]\,\omega(t)dt \to 0. \tag{7}$$

由

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left[\varphi(kf(t)\chi_{T_n}) + \varphi(h_n g_n(t)\chi_{T_n})\right]\omega(t)dt\\ &\geq \int_0^\infty \varphi(kf(t)\chi_{T_n})\omega(t)dt\\ &\geq \varphi(2kt_2)\omega(2t_2)m(T_n)\end{aligned}$$

和 (7), 我们推出 $mT_n \to 0$. 因此由 $(h_n g_n(t)|_D) \to (kf|_D)$, $T_n \subset D = [0, t_1]$, 得

$$\int_0^\infty \left[\varphi(kf(t)\chi_{T_n})^* + \varphi(h_n g_n(t)\chi_{T_n})^*\right]\omega(t)dt \to 0.$$

又因为

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \varphi\left(\frac{kf(t) - h_n g_n(t)}{2}\chi_{T_n}\right)^* \omega(t)dt\\ &\leq \int_0^\infty \left[\frac{\varphi(kf(t)\chi_{T_n}) + \varphi(-h_n g_n(t)\chi_{T_n})}{2}\right]^* \omega(t)dt \to 0,\end{aligned}$$

我们有

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{kf(t)\chi_{T_n} - h_n g_n(t)\chi_{T_n}}{2}\right)^* \omega(t)dt \to 0,$$

即存在 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得对于所有 $n > n_0$

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{kf(t)\chi_{T_n} - h_n g_n(t)\chi_{T_n}}{2}\right)^* \omega(t) < \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{8}$$

由 (6) 和 (8), 对于所有 $n > n_0$,

$$\begin{aligned}&\rho_\varphi\left(\frac{kf - h_n g_n}{2}\chi_{D\setminus F_n}\right) \leq \rho_\varphi\left(\frac{kf - h_n g_n}{2}\chi_{T_n}\right) + \rho_\varphi\left(\frac{kf - h_n g_n}{2}\chi_{(D\setminus F_n)\setminus T_n}\right)\\ &< \varepsilon_1,\end{aligned}$$

即

$$\rho_\varphi\left(\frac{kf - h_n g_n}{2}\chi_{D\setminus F_n}\right) \to 0 (n \to \infty).$$

因为 $\varphi \in \Delta_2$, 我们得到 $\|(kf - h_n g_n)\chi_{D\setminus F_n}\|^\circ \to 0$, 即存在 $n_1 \in \mathbf{N}$, 对于所有 $n > n_1$, 我们得到

$$\|(kf - h_n g_n)\chi_{D\setminus F_n}\|^\circ < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9}$$

因此，由 (3), (4), (5), (9), 对于 $n > \max\{n_1, n'\}$, 我们得到

$$\begin{aligned}\|kf - h_n g_n\|^\circ &\le \|(kf - h_n g_n)\chi_{D\setminus F_n}\|^\circ + \|(kf)\chi_B\|^\circ + \|(h_n g_n)\chi_B\|^\circ \\ &\quad + \|(kf)\chi_{F_n}\|^\circ + \|(h_n g_n)\chi_{F_n}\|^\circ \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + d\frac{\varepsilon}{4d} + d\frac{\varepsilon}{4d} + d\frac{\varepsilon}{8d} + d\frac{\varepsilon}{8d} = \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\|kf - h_n g_n\|^\circ \to 0$. 而且,

$$\begin{aligned}|k - h_n| &= |k\|f\|^\circ - h_n\|g_n\|^\circ| \\ &\le \|kf - h_n g_n\|^\circ \to 0,\end{aligned}$$

即 $k - h_n \to 0$. 因此，$\|f - g_n\|^\circ \to 0$, 我们完成证明.

必要性. (i) 显然局部一致凸蕴含严格凸. 由 [28, 定理 1], (i) 成立.

(ii) 令 $\varphi \notin \Delta_2$. 由 [1, 引理 2.3], 我们可以构造一个递减函数

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \chi_{[t_{k-1}, t_k]} = f^*$$

满足 $\rho_\varphi(f) \le \frac{1}{2}$, $\rho_\varphi(\lambda f) = +\infty$(其中 $\lambda > 1$), 容易看到 $\|f\|^\circ > \|f\| = 1$. 记 $g = \frac{f}{\|f\|^\circ}$, 和定义 $g_n = \frac{1}{\|f\|^\circ}\sum_{k=1}^{n} u_k \chi_{[t_{k-1}, t_k]}$. 则对于 $l \le \|f\|^\circ$, $\rho_\varphi(lg_n) \to \rho_\varphi(lg)$ 和对于 $l > \|f\|^\circ$, $\rho_\varphi(lg_n) \to \infty$. 因此

$$1 \ge \|g_n\|^\circ = \inf_{l>0} \frac{1}{l}[1 + \rho_\varphi(lg_n)] \to \inf_{l>0} \frac{1}{l}[1 + \rho_\varphi(lg)] = \|g\|^\circ = 1.$$

显然，$\|\frac{g+g_n}{2}\|^\circ \ge \|g_n\|^\circ \to 1$. 我们容易看到 $\rho_\varphi\left(\frac{g-g_n}{\frac{1}{\|f\|^\circ}}\right) \le 1$ 和 $\rho_\varphi\left(\lambda\frac{g-g_n}{\frac{1}{\|f\|^\circ}}\right) = \infty$ (其中 $\lambda > 1$). 因此 $\|g - g_n\| = \frac{1}{\|f\|^\circ}$, 并且 $\|g - g_n\|^\circ > \|g - g_n\| = \frac{1}{\|f\|^\circ} > 0$, 这蕴含 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}[0, \infty) \notin (LUR)$.

现在令 $\psi \notin \Delta_2$. 不妨假设 ψ 对较小的变量不满足 Δ_2 条件，则存在 $v_n \to 0$ 使得

$$\psi(v_n) < \min\left(\frac{1}{n}, \psi\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{W(1)}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right), \quad \psi\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} v_n\right) > 2n\psi(v_n).$$

取实数 m_n 使得

$$\psi(v_n) \int_0^{m_n} \omega(t)dt = \frac{1}{n}$$

定义 $r_n = v_n\chi_{[1,1+m_n]}$. 则

$$\rho_\psi(r_n) = \psi(v_n)W(m_n) \le 1,$$

$$\rho_\psi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}r_n\right) > 2n\psi(v_n)W(m_n) = 2 > 1.$$

因此 $1 \ge \|r_n\|_{\Lambda_{\psi,\omega}} \ge 1-\frac{1}{n}$. 记 $u_n = \frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{W(m_n)}\right)W(m_n)}$, $x_n = u_n\chi_{[1,1+m_n]}$, 则由 4°, $\|x_n\|^\circ = u_n\|\chi_{[1,m_n+1]}\|^\circ = 1$ 和

$$u_nv_nW(m_n) = \|r_n\|_{\Lambda_{\psi,\omega}} \ge 1-\frac{1}{n}. \tag{10}$$

令 $u = \frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{W(1)}\right)W(1)}$. 定义 $x = u\chi_{[0,1]}$. 则 $u \ge u_n$ 和 $\|x\|^\circ = 1$. 令 $f_n = t_n\chi_{[0,1]}$, 这里 $t_n = (1-\frac{1}{n})\psi^{-1}\left(\frac{1}{W(1)}\right)$. 则

$$\rho_\psi(f_n) = \psi\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{W(1)}\right)\right]W(1) \le 1-\frac{1}{n},$$

并且

$$ut_nW(1) = 1-\frac{1}{n}.$$

定义 $g_n = r_n + f_n$. 则

$$\rho_\psi(g_n) = \psi(t_n)W(1) + \psi(v_n)\int_1^{1+m_n}\omega(t)dt \le (1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = 1.$$

因此由 3° 和 (10)

$$\begin{aligned}\|x_n+x\|^\circ &\ge \int_0^\infty g_n^*(t)(x_n+x)^*(t)\omega(t)dt = t_nuW(1) + u_nv_n\int_1^{1+m_n}\omega(t)dt \\ &= 1-\frac{1}{n} + u_nv_nW(m_n+1) - u_nv_nW(1) \\ &\ge 1-\frac{1}{n} + 1-\frac{1}{n} - u_nv_nW(1) \to 2.\end{aligned}$$

记 $h_n = r_n - f_n$. 则 $\rho_\psi(h_n) = \rho_\psi(g_n) \le 1$, 和 $\|x_n - x\|^\circ \ge \int_0^\infty h_n^*(t)(x_n-x)^*(t)\omega(t)dt = t_nuW(1) + u_nv_nW(1+m_n) \to 2$, 这矛盾于 $\Lambda_{\varphi,\omega}^\circ[0,\infty)$ 的局部一致凸性.

当 $\omega(t) \equiv 1$, 我们得到下面的推论.

推论 3.6:([11]) $L_\varphi^\circ[0,\infty)$ 是 LUR 当且仅当 $\varphi \in \Delta_2, \psi \in \Delta_2$ 且 φ 在 $[0,\infty)$ 上是严格凸的.

参 考 文 献

[1] A.Kamińska, *Some remarks on Orlicz-Lorentz Spaces*, Math. Nachr., **147**(1990), 29-38.

[2] A.Kamińska, *Extreme points in Orlicz-Lorentz spaces*, Arch. Math., **55**(1990), 173-180.

[3] A.Kamińska, *Uniform convexity of generaliaed Lorentz spaces*, Arch. Math., **56**(1991), 181-188.

[4] A.Kamińska, P.Lin, and H.Sun, *Uniformly normal structure of Orlicz-Lorentz spaces*, Lect. Notes in Pure and App. Math. **175**,229-238 (1995).

[5] H.Hudzik, A.Kamińska and M.Mastylo, *Geometric properties of some Calderón-Lozanovskiĭ spaces and Orlicz-Lorentz spaces*, Houston J. Math. **22**, No.3, (1996), 639-663.

[6] 吴从炘，任丽伟， *Orlicz–Lorentz 空间的局部一致凸*，数学研究. (1997), 146-150.

[7] A.Kamińska,C.Lennard, M.Mastylo and S.Mikuska, *The uniform Kadec-Klee property for Orlicz-Lorentz spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soci., **143**(2007), 349-374.

[8] 吴从炘，任丽伟， 赋 *Orlicz* 范数的 *Orlicz–Lorentz* 空间的严格凸性，数学杂志. **19**(1999), 235-240.

[9] 姚正安，程庆平，宋述刚， *Orlicz–Lorentz* 序列空间，数学年刊， 13A (增刊). (1992), 80-91.

[10] P.Foralewski,H.Hudzik and L.Szymaszkiewicz, *On some geometric and topological properties of generalized Orlicz-Lorentz sequence spaces*, Math. Nachr. **281**,No.2,181-198(2008).

[11] S.T.Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertations Mathematicae 356, Warzawa, (1996).

[12] S. G. Krein, Yu. I. Petunin and E. M. Semenov, *it Interpolation of Linear Operators*,Moscow, 1978, Russian; English tranl., Amer. Math. Soc., Providence, 1982.

[13] P.K.Lin and H.Y.Sun, *Some geometric properties of Lorentz-Orlicz spaces*, Arch. Math., **64**(1995), 500-511..

[14] M.M.Rao and Z.D.Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker, NewYork,(1991).

[15] M.M.Rao andZ.D.Ren, *Applications of Orlicz spaces*, Marcel Dekker, NewYork,(2002).

[16] A.Kamińska and L.Maligranda, *On Lorentz spaces* $\Gamma_{p,\omega}$, Israel J. Math., **140**(2004), 285-318.

[17] J.Cerda, H.Hudzik, A.Kamińska and M.Mastylo, *Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz-Lorentz spaces*, Positivity, **2**(1998), 311-337.

[18] H.Hudzik,A.Kamińska and M.Mastylo, *On the dual of Orlicz-Lorentz Space*, Proc. Amer. Math. Soci.,**130**(6), 1645-1654 (2002).

[19] Montgomery-Smith, S.J., *Comparison of Orlicz-Lorentz Spaces*,StudiaMath. **103**,161-189 (1992).

[20] 吴从炘，王廷辅，陈述涛，王玉文， *Orlicz* 空间几何理论，哈尔滨，哈尔滨工业大学出版社， (1986).

[21] A.Kamińska and L.Maligranda, *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,\omega}$, $0 < p < \infty$, Studia Math.**160**(3) (2004), 267-286.

[22] P.K.Lin, *K-uniform rotundity of Lorentz-Orlicz spaces*,J.Math.Anal.Appli. **204**,(1996), 29-45.

[23] R.Kumar and R.Kumar, *Composition Operators on Orlicz-Lorentz Spaces*, Integr.equ. oper.theory **60**, (2008), 79-88.

[24] P.Kolwicz, *Rotundity Properties in Calderón-Lozanovskiĭ Spaces*, Houston Journal of Mathematicsc **31**, No.3, (2005).

[25] G.H.Hardy,J.E.Littlewood and G.Pólya,*Inequalities*,2nd ed.,Cambridge University Press, Cambridge UK.,(1952).

[26] Jincai Wang, Zhe Ning,*Rotundity and Uniform Rotundity of Orlicz-Lorentz Sequence Spaces with Orlicz Norm*,Mathematische Nachrichten,(2010).

[27] Zhe Ning, Jincai Wang,赋 *Orlicz* 范数的 *Orlicz-Lorentz* 空间特征函数的范数计算，苏州大学学报， (2010).

[28] J.Wang,Y.Chen,*Rotundity and Uniform Rotundity of Orlicz-Lorentz Spaces with Orlicz*

Norm,Houston J.Math.,accepted.

[29] 王晶晶， Orlicz-Lorentz 空间中的端点，苏州大学硕士论文， 2009, 5.

[30] 陈怡，广义 Orlicz 空间的一致凸性，苏州大学硕士论文， 2009, 5.

攻读硕士期间发表的论文

1. 宁哲，王金才， 赋 *Orlicz* 范数的 *Orlicz-Lorentz* 空间特征函数的范数计算, 苏州大学学报， (2010).

致 谢

本学位论文是在导师王金才副教授的悉心指导下完成的．三年来，他给我热情的关怀和鼓励．他严谨的治学态度和勤奋的敬业精神使我深受感染．他宽厚的为人和高尚的品德更加令我感动．从论文的选题到成文，王老师都倾注了大量的心血．在此衷心感谢导师三年来对我的指导和教诲，没有他的关心，支持和鼓励，就不会有我的这篇论文．

感谢严亚强老师给予我的莫大的帮助．他所教授的基础知识为我完成论文奠定了良好的基础，并且在平时的学习生活中给我解答了很多学术上的问题，使我受益良多．

感谢苏州大学数学科学学院所有老师和同学的帮助和支持，让我顺利完成研究生阶段的学业．

感谢潘敬红和尹雪同学在平时的学习及论文的完成过程中给予我的帮助和支持．

苏州大学

硕士学位论文

苏州大学研究生部统一印制