DIE RELATIVE GEOMETRIE DER FLÄCHEN IM PROJEKTIVEN RAUME.

A. Norden.

Einleitung.

Der Begriff der relativen Geometrie der Flächen im affinen Raume wurde von Müller [1] eingeführt. Neben der Hauptfläche s betrachtete er eine Hilfsfläche s_0, die mit s durch eine Punktabbildung derart verbunden ist, dass die Tangentialebenen beider Flächen in den entsprechenden Punkten einander parallel sind. Indem Müller den Radiusvektor eines Punktes der Hilfsfläche als Vektor der „Pseudonormalen" der Hauptfläche ansieht, gelangt er zur Definition der relativen Krümmungslinien, der relativen Krümmung, des relativen Flächeninhalts usw. Indem ich der Müllerschen Theorie den Begriff der relativen innern Geometrie beifügte, habe ich einen Apparat der relativen Geometrie aufgebaut [2], vermittels dessen sich sowohl der Formelnapparat der affinen Flächengeometrie von Prof. Blaschke als auch derjenige der klassischen Flächengeometrie ableiten lässt; dabei wird auch die geometrische Bedeutung jener Spezialisierungen durchsichtig, welche die Konfiguration in den beiden erwähnten Fällen erfährt.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, eine relative Geometrie der Flächen des projektiven Raumes aufzubauen. Es zeigt sich, dass in diesem weiteren Schema ausser der Müllerschen Theorie auch die von Fubini-čech entwickelte und endlich noch die Theorie der Flächen nicht-euklidischer Räume konstanter Krümmung enthalten sind. Die dadurch hergestellte Vereinigung erlaubt es alle die zahlreichen Analogien in den erwähnten Theorien zu erklären. Das betrachtete Schema ist auch in jener Hinsicht von Interesse, dass es darin gelingt, das Prinzip der Dualität weitgehend durchzuführen, wobei dasselbe seine Bedeutung auch bei den verschiedenen Spezialisierungen keineswegs verliert.

Es ist auch zu vermuten, dass der hier entwickelte Apparat ausserdem noch für das Studium der Laplaceschen Kurvennetze nützlich sein wird; hier will ich jedoch diese mögliche Richtung weiterer Untersuchungen nur flüchtig andeuten.

---

1 Monatshefte für Math und Phys., XXXI, 1921.

2 A. Norden, C. R. de l'Acad. de Sci., 192, p. 136, 1931.

§ 1. Definition. Kanonische Koordinaten.

Es seien s, S, $\sum$ drei Flächen im dreidimensionalen projektiven Raume, zwischen deren Punkten eine reziproke Abbildung derart festgesetzt sei, dass die Kongruenz der Geraden, welche die entsprechenden Punkte der Flächen s und S verbinden, zur Fläche s konjugiert, indessen die Kongruenz der Schnittgeraden entsprechender Tangentialebenen an s und $\sum$ zur Fläche s harmonisch sei.

Ich werde die Fläche s als Hauptfläche und die Flächen S und $\sum$ als Ergänzungsflächen erster und zweiter Art bezeichnen. Das System der projektiv-invarianten Eigenschaften sei als relative Geometrie der Fläche s bezüglich ihrer Ergänzung durch die Flächen S und $\sum$ bezeichnet.

Wir zeigen zunächst, dass für die gegebene Konfiguration bei festgesetzter Punktverwandtschaft von angegebener Art die homogenen Koordinaten auf eine bestimmte Weise normiert werden können; die dadurch festgelegten Koordinaten werden wir als k a n o n i s c h e bezeichnen.

Es seien

$$\overline{x}\,(\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \overline{x}^{(3)}, \overline{x}^{(4)}) \text{ und } \overline{X}\,(\overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}, \overline{X}^{(3)}, \overline{X}^{(4)})$$

willkürliche homogene Koordinaten der Punkte der Flächen s und S und

$$\overline{\xi}\;(\overline{\xi}^{(1)}, \overline{\xi}^{(2)}, \overline{\xi}^{(3)}, \overline{\xi}^{(4)}) \quad \text{und} \quad \overline{\Xi}\;(\overline{\Xi}^{(1)}, \overline{\Xi}^{(2)}, \overline{\Xi}^{(3)}, \overline{\Xi}^{(4)})$$

willkürliche Tangentialkoordinaten der Tangentialebenen an die Flächen s und S

Durch Einführung der abgekürzten Bezeichnung:

$$\overline{x}\overline{\xi} = \sum_{1}^{4} \overline{x}^{(i)}\overline{\xi}^{(i)}$$

erhalten wir, indem wir

$$\overline{x}_i = \frac{\partial \overline{x}}{\partial u^i}; \quad \overline{\xi}_i = \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial u^i}$$

setzen (unter u^1, u^2 sind hier krummlinige Koordinaten auf der Fläche s zu verstehen)

$$\overline{x}\,\overline{\xi} = 0; \quad \overline{x}\overline{\xi}_i = 0; \quad \overline{x}_i\,\overline{\xi} = 0. \tag{1}$$

Bedeuten d und δ Symbole der Differentiation nach zwei auf der Fläche konjugierten Richtungen, so gilt:

$$d\overline{x}\cdot\delta\overline{\xi} = \overline{x}_\alpha\overline{\xi}_\beta du^\alpha \delta u^\beta = 0,$$

wobei

$$\overline{x}_i\overline{\xi}_j = -\overline{x}_{ij}\overline{\xi},$$

so dass $\overline{x}_i\overline{\xi}_j = \overline{x}_j\overline{\xi}_i$ ist.

Um den Umstand zu berücksichtigen, dass die Kongruenz x, X der Fläche s konjugiert ist, suchen wir ihre abwickelbaren Flächen auf; da zwei ihrer unendlich benachbarten Erzeugenden sich schneiden müssen, so müssen die Punkte $\overline{x}$, $\overline{X}$, $\overline{x}+\underset{k}{d}\overline{x}$, $\overline{X}+\underset{k}{d}\overline{X}$ in einer Ebene liegen; $\underset{k}{d}$ $(k=1, 2)$ bedeutet hier das Differentiationssymbol nach der entsprechenden Richtung. Hieraus folgt:

$$\underset{k}{\tau}\overline{X}+\underset{k}{\sigma}\overline{x}+\underset{kk}{\nu d}\overline{x}+\underset{k}{d}\overline{X}=0.$$

Unter Benützung der Formeln (1) erhalten wir

$$\underset{k}{\tau}\overline{\xi}\overline{X}+\overline{\xi}\underset{k}{d}\overline{X}=0,$$

$$\underset{k}{\tau}\overline{X}\underset{l}{d}\overline{\xi}+\underset{kk}{\nu d}\overline{x}\underset{l}{d}\overline{\xi}+\underset{k}{d}\overline{X}\underset{l}{d}\overline{\xi}=0.$$

Sind k und l voneinander verschieden, so gilt zufolge des Umstandes, dass die Richtungen $\underset{1}{d}$ und $\underset{2}{d}$ konjugiert sind:

$$\underset{k}{d}\overline{x}\underset{l}{d}\overline{\xi}=0,$$

$$(\overline{\xi}\underset{k}{d}\overline{X})(\overline{X}\underset{l}{d}\overline{\xi})-(\overline{X}\overline{\xi})(\underset{k}{d}\overline{X}\underset{l}{d}\overline{\xi})=0.$$

Führen wir eine Transposition von k und l aus und setzen wir die linken Seiten der beiden Gleichungen einander gleich, wobei wir beiden Seiten je den Ausdruck

$$(\overline{\xi}\underset{kl}{dd}\overline{X})(\overline{X}\overline{\xi})-(\underset{k}{d}\overline{X}\overline{\xi})(\underset{l}{d}\overline{X}\overline{\xi})=0$$

hinzufügen, so erhalten wir nach Division durch $(\overline{X}\overline{\xi})^2$

$$\underset{k}{d}\left(\frac{\overline{\xi}\underset{l}{d}\overline{X}}{\overline{\xi}\overline{X}}\right)=\underset{l}{d}\left(\frac{\overline{\xi}\underset{k}{d}\overline{X}}{\overline{\xi}\overline{X}}\right).$$

Wir nehmen an, dass die zwei Arten abwickelbarer Flächen der Kongruenz voneinander verschieden und infolgedessen die Richtungen $\underset{1}{d}$, $\underset{2}{d}$ voneinander unabhängig sind. Dann folgt aus der letzten Gleichung, dass der Ausdruck

$$-\frac{\overline{\xi}d\overline{X}}{\overline{\xi}\overline{X}}=\frac{d\lambda}{\lambda}$$

ein vollständiges Differential darstellt.

Setzen wir daher

$$-\lg\lambda=\int\frac{\overline{\xi}d\overline{X}}{\overline{\xi}\overline{X}},$$

so wird dadurch λ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Normalisieren wir jetzt die Koordinaten $\bar{\xi}$ und $\bar{X}$ indem wir

$$\bar{X} = \lambda X; \quad \bar{\xi} = \lambda (\bar{X}\bar{\xi})\, \xi$$

setzen, so wird

$$d\bar{X}\bar{\xi} = d\lambda X\bar{\xi} + \lambda (dX\bar{\xi});$$

$$\bar{X}\bar{\xi} = (\bar{X}\bar{\xi})\,(X\xi)$$

oder

$$X\xi = 1, \quad X\xi_i = X_i\xi = 0. \tag{2'}$$

Führen wir eine analoge Überlegung für die Kongruenzen $\bar{\xi}$, $\bar{\Xi}$ durch, so finden wir solche koordinaten, für welche

$$x\Xi = 1, \quad x_i\Xi = x\Xi_i = 0 \tag{2''}$$

ist.

Diejenigen Koordinaten, die dem System (2) genügen, werden wir als **kanonische** bezeichnen. Wir werden weiterhin stets voraussetzen, dass die Koordinaten kanonisch sind.

§ 2. Asymptotische Linien.

Bereits in § 1 ist uns die quadratische Form $\bar{x}_\alpha \bar{\xi}_\beta du^\alpha du^\beta$ begegnet; zufolge der Unbestimmtheit der homogenen Koordinaten war aber dieselbe nicht invariant. Nun führen wir die invariante Form ein:

$$-dx \cdot d\xi = -x_\alpha \xi_\beta du^\alpha du^\beta.$$

Setzen wir

$$b_{ij} = -x_i\xi_j = -x_j\xi_i = x_{ij}\xi = x\xi_{ij}, \tag{3}$$

so wird b_{ij} zu einem symmetrischen Tensor.

Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien der Fläche s wird lauten;

$$b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0. \tag{4}$$

Die Bedingung dafür, dass die Richtungen du^i und δu^j konjugiert sind, lautet:

$$b_{\alpha\beta} du^\alpha \delta u^\beta = 0. \tag{5}$$

Die Diskriminante der quadratischen Form

$$b = \begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{vmatrix} \tag{6}$$

werden wir als von Null verschieden annehmen, wodurch wir die abwickelbare Fläche aus der Betrachtung ausschliessen.

§ 3. Normale. Krümmungslinie. Krümmungen.

Indem wir zur Behandlung der Grundeigenschaften der Konfiguration übergehen, machen wir in erster Linie auf den projektiv-dualen Charakter der ganzen Konstruktion aufmerksam. In der Tat sind die Formeln (1), (2) und (3) in Bezug auf die Transposition von x und ξ, X und Ξ symmetrisch. Diese Tatsache erlaubt uns im folgenden, den Beweis einer ganzen Reihe von Sätzen zu unterdrücken, insofern nur die Grunddefinitionen die nötige Symmetrie bewahren.

Wir gehen zu den Definitionen über:

1) Eine Gerade, die entsprechende Punkte der Flächen s und S verbindet, nennen wir **Normale erster Art der Fläche** s.

2) Eine Linie längs welcher die Normalen erster Art eine abwickelbare Fläche bilden, nennen wir **Krümmungslinie erster Art.**

1) Eine Schnittgerade entsprechender Tangentialebenen von s und $\sum$ nennen wir **Normale zweiter Art der Fläche** s.

2) Eine Linie, deren Punkten eine Folge von Normalen zweiter Art entspricht, die eine abwickelbare Fläche bilden, nennen wir **eine Krümmungslinie zweiter Art.**

Durch jeden Punkt der Fläche s gehen im allgemeinen je zwei Krümmungslinien sowohl der einen wie der andern Art. Es ist indessen auch der Fall möglich, dass diese Linien sich zu einer verschmelzen, indem sie mit einer der asymptotischen Linien zusammenfallen. Die Krümmungslinien können auch unbestimmt werden, auf welchen Fall wir unten ausführlicher zurückkommen.

Wir suchen die Richtungen der Krümmungslinien erster Art auf und werden die erhaltenen Resultate dem Dualitätsprinzip zufolge verdoppeln. Wir schreiben aufs neue die in § 1 erhaltene Bedingung an:

$$\sigma x + \tau X + \nu dx + dX = 0.$$

Zufolge (1) und (2) gilt:

$$\tau (X\xi) = \tau = 0$$

und

$$(\nu\xi_i x_\alpha + \xi_i X_\alpha)\, du^\alpha = 0.$$

Wir führen jetzt den Tensor $e_{ij} = \xi_i X_j$ ein, welcher zufolge der Gleichungen:

$$(X_i \xi)_j = X_{ij}\xi + X_i \xi_j = 0$$

$$e_{ij} = \xi_i X_j = -X\xi_{ij} = -\xi X_{ij} \quad (7') \quad | \quad e_{ij} = x_i \Xi_j = -x_{ij}\Xi = -x\Xi_{ij} \quad (7'')$$

symmetrisch sein wird.

Dann ergibt sich, dass die gesuchte Richtung durch das System der Gleichungen

$$(e_{i\alpha} - \nu b_{i\alpha})\, du^{\alpha} = 0.$$

bestimmt ist:

Wir stellen die charakteristische Gleichung dieses Systems auf, und bezeichnen mit einem Buchstaben ohne Index die Diskriminante, mit $\bar{b}^{ij}$ aber die reduzierten Minoren der Matrix $\| b_{ij} \|$, sodann erhalten wir

$$K - 2H\nu + \nu^2 = 0.$$

Die Invarianten K und $2H$ werden wir als v o l l e u n d m i t t l e r e Krümmung erster Art bezeichnen, so dass

$$K = \frac{e}{b} = \nu_1 \nu_2 \qquad (8')$$

die volle Krümmung erster Art,

$$2H = \bar{b}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = \nu_1 \nu_2 \qquad (9')$$

die mittlere Krümmung erster Art

$$H = \frac{\varepsilon}{b} \qquad (8'')$$

die volle Krümmung zweiter Art,

$$2\chi = b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (9'')$$

die mittlere Krümmung zweiter Art

bedeutet.

Die Grössen $R_1 = \frac{1}{\nu_1}$; $R_2 = \frac{1}{\nu_2}$ darf man als Hauptkrümmungsradien erster Art bezeichnen. Es ist leicht zu zeigen, dass diese Grössen die Koordinaten der Brennpunkte der Normalenkongruenz erster Art nach der affinen Skala sein werden, welche auf der Geraden x, X festgelegt werden kann, indem man x als Anfangspunkt, $x + X$ als Einheitspunkt und X als unendlich ferner Punkt annimmt.

Hieraus folgt unter anderm:

a) Ist $K = 0$, so fällt die Fläche S mit einer der Fokalflächen der Normalenkongruenz erster Art zusammen.

b) Ist $2H = 0$, so werden die Brennpunkte der Normalenkongruenz durch die Punkte x und X harmonisch getrennt. Analoge Schlussfolgerungen können ohne Mühe auch für die Normalen der zweiten Art gezogen werden.

§ 4. Die Grundgleichungen.

Die Punkte x, x_1, x_2, X und die Ebenen ξ, ξ_1, ξ_2, Ξ bilden zwei Tetraeder, auf welche die Koordinaten der Punkte oder Ebenen bezogen werden können, die mit der Konfiguration verbunden sind. Führen wir jetzt die Zerlegung der Punkte $x_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}$ und der Ebenen $\xi_{ij} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^i \partial u^j}$ aus, so finden wir:

$$x_{ij} = G_{ij}^{\alpha} x_{\alpha} + p_{ij} x + b_{ij} X, \quad (10') \qquad \xi_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \xi_{\alpha} + \pi_{ij} \xi + b_{ij} \Xi. \quad (10'')$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist der Tensor b_{ij} in beiden Fällen eben derselbe, der in § 2 angegeben wurde. Um aber nun p_{ij} zu bestimmen, führen wir eine neue Invariante ein:

$$X\Xi = \Omega. \tag{11}$$

Da

$$x_{ij}\Xi = p_{ij}x\Xi + b_{ij}X\Xi$$

ist, werden wir dann haben:

$$p_{ij} \doteq -\varepsilon_{ij} - b_{ij}\Omega, \quad (12') \quad | \quad \pi_{ij} = -e_{ij} - b_{ij}\Omega. \quad (12'')$$

Hieraus folgt, dass p_{ij} und π_{ij} symmetrische Tensoren sind.

Wir stellen noch die Zerlegung von X_i und Ξ_i auf. Indem wir die Bedingungen

$$X_i\xi = 0, \quad \Xi_i x = 0,$$

berücksichtigen, setzen wir:

$$X_i = s_i^\alpha x_\alpha + s_i x, \quad (13') \quad | \quad \Xi_i = \sigma_i^\alpha \xi_\alpha + \sigma_i \xi. \quad (13'')$$

Da ferner $X_i\xi_j = s_i^\alpha x_\alpha \xi_j$, so ist

$$s_i^j = -\widetilde{b}^{j\alpha} e_{\alpha i}, \quad (14') \quad | \quad \sigma_i^j = -\widetilde{b}^{j\alpha}\varepsilon_{\alpha i}. \quad (14'')$$

§ 5. Parallelübertragung und innere Geometrie.

Der Tensorcharakter der Grössen p_{ij} und π_{ij} erlaubt uns, aus den Formeln (10) zu schliessen, dass die Ausdrücke

$$x_{ij} - G_{ij}^\alpha x_\alpha, \qquad \xi_{ij} - \Gamma_{ij}^\alpha \xi_\alpha$$

so transformiert werden wie Tensoren bei Transformation krummliniger Koordinaten. Hieraus folgt, dass die Grössen $G_{ij}^\varkappa$ und $\Gamma_{ij}^\varkappa$ dabei ebenso transformiert werden wie die Christoffelschen Symbole einer quadratischen Form. Dies erlaubt, mit Hilfe dieser Grössen zwei Arten der kovarianten Tensordifferentiationen der Mannigfaltigkeit u^1, u^2 zu bestimmen.

Wir bezeichnen als kovariante Ableitung erster Art des Vektors v^i den Ausdruck

$$v^i_{\,j} = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} + G_{\alpha j}^i v^\alpha, \quad (15')$$

Wir bezeichnen als kovariante Ableitung zweiter Art des Vektors v^i den Ausdruck

$$v^{(i)}{}_{j} = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma_{\alpha j}^i v^\alpha. \quad (15'')$$

Die Differentiation der zweiten Art werden wir dadurch bezeichnen, dass wir die Indizes des zu differenzierenden Tensors in Klammern einschliessen Die Grundformeln (10) lassen sich jetzt umschreiben:

$$x_{ij} = p_{ij}x + b_{ij}X \quad (10'\text{bis}) \quad | \quad \xi_{(i)j} = \pi_{ij}\xi + b_{ij}\Xi. \quad (10''\text{bis})$$

Entsprechend den zwei Arten der kovarianten Differenzierung in der Mannigfaltigkeit u^1, u^2 werden zwei Geometrien von affiner Zusammenhang definiert, welche wir als innere Geometrien der ersten und zweiten Art der Fläche s bezeichnen werden.

Wir wollen jetzt die geometrische Interpretation der Parallelübertragung eines Vektor in diesen geometrischen Systemen auffinden. Jedem kontravarianten Vektor v^i der Mannigfaltigkeit u^1, u^2 kann man ein Punkt $v = v^\alpha x_\alpha$ und eine Ebene $\beta = v^\alpha \xi_\alpha$ entsprechen lassen, wobei der Punkt v auf einer Normalen der zweiten Art liegt und die Ebene β durch eine Normale der ersten Art geht, was aus den Gleichungen

$$v\xi = v\Xi = 0; \quad \beta x = \beta X = 0$$

hervorgeht.

Nehmen wir jetzt an, dass der Vektor v^i beim Übergang vom Punkte u^i zum Punkte $u^i + du^i$ eine Parallelübetragung erster Art erfährt, so dass

$$\nabla v^i = \lambda v^i.$$

Dabei erleidet der Punkt v die Verpflanzung, welche durch die Gleichung

$$dv = \nabla v^\alpha x_\alpha + v_\alpha x_{\alpha/\beta} du^\beta = \lambda v^\alpha x_\alpha + v^\alpha (p_{\alpha\beta} x + b_{\alpha\beta} x)\, du^\beta$$

bestimmt ist.

Wird der Punkt $v + dv$ aus dem Punkte x auf die Ebene ξ projiziert, so erhalten wir

$$\text{Pr.}(v + dv) = \mu v + \lambda x.$$

Mithin gilt:

Bei einer Parallelübertragung erster Art des Vektors v^i wird die Projektion des ihm entsprechenden Punktes aus dem Punkte X auf die Tangentialebene längs der Geraden verschoben, die diesen Punkt mit dem Punkte x verbindet.

Bei einer Parallelübertragung zweiter Art des Vektors v^i dreht sich die Ebene, die durch den Punkt x und durch die Schnittgerade der dem Vektor entsprechenden Ebene mit der Ebene Ξ geht, um die Schnittgerade der dem Vektor entsprechenden Ebene mit der Ebene ξ.

Wir wollen jetzt die geometrische Charakteristik der geodätischen Linien erster und zweiter Art auffinden. Ist $\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt}$ der Tangentialvektor der geodätichen Linie erster Art, so hat ihre Differentialgleichung die Gestalt:

$$\frac{\nabla \dot{u}^i}{dt} = \lambda \dot{u}^i.$$

Ist x ein Punkt dieser Linie, so gilt: $\dot{x} = \dot{u}^\alpha x_\alpha$ oder

$$\ddot{x} = \lambda x + \mu \dot{x} + \nu X.$$

Hieraus schliessen wir:

Eine Linie der Fläche s ist eine geodätische Linie erster Art, wenn ihre Schmiegebene in den entsprechenden Punkten durch die Normalen erster Art geht.

Eine Linie der Fläche s ist eine geodätische Linie zweiter Art, wenn die charakteristischen Punkte der abwickelbaren Fläche, die von den Tangentialebenen längs dieser Linie gebildet wird, auf den entsprechenden Normalen der zweiten Art liegen.

Stellen wir diese Resultate den früheren gegenüber, so erhalten wir zwei Eigenschaften der geodätischen Linien:

a) Ist eine geodätische Linie erster Art gleichzeitig eine Krümmungslinie erster Art, so ist sie eine ebene Kurve.

a) Ist eine geodätische Linie zweiter Art gleichzeitig eine Krümmungslinie zweiter Art, so ist sie die Berührungslinie der Erzeugenden eines die Fläche berührenden Kegels.

b) Ist eine geodätische Linie erster oder zweiter Art gleichzeitig eine asymptotische Linie, so ist sie eine gerade Linie.

§ 6. Charakter der Geometrie. Flächenelement.

Die antisymmetrischen Tensoren

$$L_{ij} = (X x x_i x_j), \quad (16') \qquad \Lambda_{ij} = (\Xi \xi \xi_i \xi_j) \quad (16'')$$

bezeichnen wir als **Hauptdiskriminantentensoren erster und zweiter Art**. Einzeitig betrachten wir die ihnen zugeordneten Tensoren L^{ij} und Λ^{ij}, die durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$L^{i\alpha} L_{\alpha j} = \delta^i_j, \quad (17') \qquad \Lambda^{i\alpha} \Lambda_{\alpha j} = \delta^i_j. \quad (17'')$$

Diese Tensoren besitzen je nur eine unabhängige Koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} L_{11} = L_{22} = 0;\, L_{12} = -L_{21} = W, \\ L^{11} = L^{22} = 0;\, L^{21} = -L^{12} = \dfrac{1}{W}, \end{array}\right\} (18') \qquad \left.\begin{array}{l} \Lambda_{11} = \Lambda_{22} = 0;\, \Lambda_{12} = -\Lambda_{21} = \omega, \\ \Lambda^{11} = \Lambda^{22} = 0;\, \Lambda^{21} = -\Lambda^{12} = \dfrac{1}{\omega}. \end{array}\right\} (18'')$$

Wir stellen die kova.iante Ableitung des Tensors L_{ij} auf:

$$L_{ij/k} = (S^\alpha_k x_\alpha + S_k x, x_k, x_i, x_j) + (X, x_k, x_i, x_j) +$$
$$+ (X, x, p_{ik} x + b_{ik} X, x_j) + (X, x, x_i, p_{jk} x + b_{jk} X) = 0.$$

Aus (17) erhalten wir durch Differenziation, wenn wir dabei die letzten Gleichungen berücksichtigen:

$$\begin{array}{l} L_{ij/k} = 0, \\ L^{ij}_{\cdot\cdot/k} = 0, \end{array} \quad (19') \qquad \begin{array}{l} \Lambda_{(i)(j)/k} = 0, \\ \Lambda^{(i)(j)}_{\cdot\cdot/k} = 0. \end{array} \quad (19'')$$

Die letztere Eigenschaft macht die Tensoren L_{ij} und Λ_{ij} zum „Heben und Senken" von Indizes geeignet. Wir werden aber dazu nur den Tensor L_{ij} benutzen, um keine besonderen Bezeichnungen einführen zu müssen; dabei setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} a^{i}_{.jk} &= \quad L^{i\alpha}a_{\alpha jk} = -L^{\alpha i}a_{\alpha jk}, \\ a_{ijk} &= -L_{\alpha i}a^{\alpha}_{.jk} = \quad L_{i\alpha}a^{\alpha}_{.jk}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Als innere Geometrien können nicht beliebige Geometrien von affinem Zusammenhange erscheinen. Um dies zu zeigen, betrachten wir die bilinearen Formen

$$L_{\alpha\beta}du^{\alpha}\delta u^{\beta} = = W(du^{1}\delta u^{2} - du^{2}\delta u^{1}), \tag{21'}$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}du^{\alpha}\delta u^{\beta} = = \omega(du^{1}\delta u^{2} - du^{2}\delta u^{1}), \tag{21''}$$

welche wir als **Flächenelemente der ersten und zweiten Art** bezeichnen. Wir nehmen an, dass die Vektoren du^{i} und δu^{i} sich so parallel übertragen lassen, dass somit

$$\nabla du^{i} = \nabla\delta u^{i} = 0.$$

Dann gilt:

$$d(L_{\alpha\beta}du^{\alpha}\delta u^{\beta}) = 0.$$

Mithin bleibt ein **Flächenelement bei einer Parallelübertragung der entsprechenden Art unverändert erhalten.** Hieraus folgt, dass **die inneren Geometrien beider Arten inhaltstreue im Sinne der Terminologie von J. Schouten sind.**

§ 7. Zusammenhang zwischen den Geometrien.

Die inneren Geometrien können nicht voneinander unabhängig definiert werden. Um den Zusammenhang zwischen ihnen festzulegen, definieren wir den Begriff der gemischten Tensordifferentiation.

Setzen wir nämlich

$$a_{i(j)/k} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{k}} - G^{\alpha}_{ki}a_{\alpha j} - \Gamma^{\alpha}_{kj}a_{i\alpha}, \tag{22}$$

so lässt sich leicht die folgende Formel verifizieren:

$$(c^{\cdots i\cdot}a_{\alpha j\ldots})_{/k} = c^{\cdots i(\alpha)}{}_{/k}a_{\alpha j\ldots} + a_{(\alpha)j\ldots/k}c^{\cdot\cdot i\alpha}. \tag{23}$$

Wir finden die gemischte Ableitung des Tensors b_{ij} auf; es ist

$$b_{i(j)/k} = -(x_{i}\xi_{(j)})_{/k} = -(p_{ik}x + b_{ik}X)\xi_{j} - x_{i}(\pi_{jk}\xi + b_{ij}\Xi).$$

Hieraus ergibt sich

$$b_{i(j)/k} = 0. \tag{24}$$

Unter Benützung der Formel (23) erhalten wir:

$$(b_{i\alpha}a^{\alpha j\cdots})_{|k}=b_{i(\alpha)|k}a^{\alpha j\cdots}+b_{i\alpha}a^{(\alpha)j\cdots}{}_{|k},$$

$$(b_{i\alpha}a^{\alpha j\cdots})_{|k}=b_{i\alpha}a^{(\alpha)j\cdots}{}_{|k}. \tag{25}$$

Differenzieren wir den Ausdruck

$$\delta^i_j=\breve{b}^{i\alpha}b_{\alpha j},$$

so ergibt sich:

$$0=\breve{b}^{i(\alpha)}{}_{\cdot\cdot|k}b_{\alpha j}$$

oder

$$\breve{b}^{i(j)}{}_{\cdot\cdot|k}=0. \tag{26}$$

Aber ebenso auch

$$(\breve{b}^{i\alpha}a_{\alpha j\cdot\cdot})_{|k}=\breve{b}^{i\alpha}a_{\cdot(\alpha)j\cdot|k}. \tag{27}$$

Aus der Gleichung (24) ergibt sich:

$$b_{i(j)|k}=b_{ij|k}+(G^{\alpha}_{kj}-\Gamma^{\alpha}_{kj})\,b_{\alpha i}=b_{(i)(j)|k}+(\Gamma^{\alpha}_{kj}-G^{\alpha}_{kj})\,b_{\alpha i}$$

und daher

$$b_{ij|k}=-b_{(i)(j)|k}, \tag{28}$$

$$\Gamma^i_{kj}-G^i_{kj}=\breve{b}^{i\alpha}b_{\alpha j|k}=-\breve{b}^{i\alpha}b_{(\alpha)(j)|k}. \tag{29}$$

Endlich, um den Zusammenhang zwischen den Flächenelementen herzustellen, multiplizieren wir W und ω

$$W\cdot\omega=(Xxx_1x_2)(\Xi\xi\xi_1\xi_2)=\begin{vmatrix}\Omega & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -b_{11} & -b_{12}\\ 0 & 0 & -b_{21} & -b_{22}\end{vmatrix}$$

oder

$$W\cdot\omega=-b. \tag{30}$$

Die Formel (24) lässt eine geometrische Interpretation zu. Es seien v_i und w^j zwei Vektoren konjugierter Richtungen, so dass

$$b_{\alpha\beta}v^{\alpha}w^{\beta}=0.$$

Differenzieren wir die linke Seite, so erhalten wir:

$$d\,(b_{\alpha\beta}v^{\alpha}w^{\beta})=b_{\alpha\beta}v^{\alpha}\nabla w^{\beta}+b_{\alpha\beta}\nabla v^{(\alpha)}w^{\beta}=0.$$

Nehmen wir an, dass der Vektor w^i eine Parallelübertragung erster Art erfährt. Dann haben wir

$$b_{\alpha\beta}\nabla v^{(\alpha)}w^{\beta}=0.$$

Vergleichen wir dies mit der Bedingung dafür, dass die Vektoren v^i und w^j konjugie t seien, so erhalten wir

$$\nabla v^{(\alpha)}=\lambda v^{\alpha}.$$

Es gilt mithin:

Erfährt ein Vektor eine Parallelübertragung irgendeiner Art, so erfährt der zu ihm konjugierte Vektor eine Parallelübertragung der anderen Art. Hieraus folgt folgende Eigenschaft der geodätischen Linie: *Ein Vektor, dessen Richtung einer geodätischen Linie der einen Art konjugiert ist, erleidet längs dieser Linie eine Parallelübertragung der anderen Art.*

Wir führen den Begriff des Tschebyschewnetzes ein. Dies ist ein Netz von Linien auf einer Fläche, für welches die Tangenten an die Linien der einen Schar längs den Linien der anderen Schar parallel übertragen werden. Das konjugierte Tschebyschewnetz hat die charakteristische Eigenschaft, dass es ein geodätisches Netz dualer Art ist. In dieser Eigenschaft lässt sich die charakteristische Eigenschaft des Laplaceschen Netzes mit gleichen Invarianten erkennen [1]. Dass das konjugierte Tschebyschewnetz wirklich ein Netz gleicher Invarianten ist, lässt sich leicht durch eine spezielle Wahl des Koordinatensystems bestätigen.

§ 8. Die Integrabilitätsbedigungen.

Wir wollen die Bedingungen der Integrabilität der Hauptgleichungen aufstellen. Zur Vereinfachung der Berechnungen bemerken wir vor allem, dass man anstatt des Alternationszeichens

$$a_{[ij]} = a_{ij} - a_{ji}$$

auch

$$L^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = \frac{1}{w}(a_{ij} - a_{ji})$$

schreiben kann, oder zufolge der Übereinkunft über das Heben der Indizes

$$a_{ij} - a_{ji} = w \cdot a_{\alpha\cdot}^{\cdot\alpha} = -w \cdot a^{\alpha\cdot}_{\cdot\alpha}.$$

Wir benützen ausserdem die Inhaltstreue der inneren Geometrie. Es sei $R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot l}$ der Krümmungstensor der inneren Geometrie, z. B., der ersten Art. Wir führen den Riccitensor

$$R_{ij} = -R_{\alpha ij\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}, \qquad (31') \quad \Big| \quad \rho_{ij} = -\rho_{\alpha ij}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \qquad (31'')$$

ein.

Infolge der Inhaltstreue muss dieser Tensor symmetrisch sein [2]. Andererseits gilt:

$$R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot l} = -R_{jik\cdot}^{\cdot\cdot\cdot l},$$

woraus folgt:

$$R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot l} = L_{ij} A^{\cdot l}_{\cdot k}; \quad A_{jk} = -R_{jk}.$$

---

[1] Eisenhart, Transformation of surfaces, 124, Ex. 10 und 153, Ex. 12.

[2] Schouten, Ricci-Kalkül, 2 Abschnitt, § 15.

Unter Benützung dieser Beziehungen ist es leicht die Relation

$$R^{\alpha\cdot\cdot l}_{\cdot\alpha k\cdot} = 2\,R^l_k \tag{32}$$

zu verifizieren.

In Übereinstimmung mit diesem Ausdruck lässt sich die zweite alternierte Ableitung des Vektors in der Form darstellen:

$$w_{l\alpha/\cdot}^{\cdot\alpha} = R^\alpha_l w_\alpha. \tag{33}$$

Wir wollen jetzt die Gleichung (10bis) differenzieren, indem wir dabei die Gleichung (13) benutzen. Wir erhalten als Resultat:

$$x_{l\alpha/\cdot}^{\cdot\alpha} = R^\alpha_l x_\alpha = p_{l\alpha/\cdot}^{\cdot\alpha} x - p^\alpha_l x_\alpha + b_{l\alpha/\cdot}^{\cdot\alpha} X - b^\alpha_l s^\beta_\alpha x_\beta + b_{l\alpha} s^\alpha x.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir aus Gleichung (13):

$$0 = s^\beta_\alpha p^\alpha_\beta x + s^\beta_\alpha b^\alpha_\beta X + s^{\beta\ \alpha}_{\alpha/\cdot} x_\beta - s^\alpha x_\alpha + s^{\cdot\alpha}_{\alpha/\cdot} x.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten der gleichartigen Punkte erhalten wir folgendes System von Bedindungen:

$$\left.\begin{array}{llrl} R^l_i + p^l_i = -b^\alpha_i s^l_\alpha & \text{(I);} & b_{l\alpha/\cdot}^{\cdot\alpha} = 0 & \text{(II);} \\ p_{l\alpha/\cdot}^{\cdot\alpha} = b^\alpha_l s_\alpha & \text{(III);} & s^\beta_\alpha p^\alpha_\beta + s_{\alpha/\cdot}^{\cdot\alpha} = 0 & \text{(IV);} \\ s^{l\ \alpha}_{\alpha/\cdot} = s^l & \text{(V);} & s^\beta_\alpha b^\alpha_\beta = 0 & \text{(VI).} \end{array}\right\} \tag{34}$$

Aus diesem System können die Grössen s^l_i und s_i eliminiert werden.

Aus (I) finden wir:

$$s^l_i = \breve{b}^\alpha_i (R^l_\alpha + p^l_\alpha) \tag{35}$$

und aus (III)

$$s_i = -\breve{b}^\alpha_i p_{\alpha\beta/\cdot}^{\cdot\beta}; \tag{36}$$

Durch Substitution dieser Werte in (IV) erhalten wir:

$$s^\beta_\alpha p^\alpha_\beta = \breve{b}^\lambda_\alpha (R^\beta_\lambda + p^\beta_\lambda)\, p^\alpha_\beta$$

anderseits ist

$$\breve{b}^\lambda_\alpha p^\beta_\lambda p^\alpha_\beta = -\breve{b}^\lambda_\alpha p_{\lambda\beta} p^{\alpha\beta} = \mu\, \breve{b}^\lambda_\alpha \delta^\alpha_\lambda = \mu\, \breve{b}^\alpha_\alpha = 0.$$

Hieraus folgt:

$$s^\beta_\alpha p^\alpha_\beta = -\breve{b}^\lambda_\alpha R^\beta_\lambda p^\alpha_\beta$$

und durch Substitution in (VI):

$$s^\beta_\alpha b^\alpha_\beta = \breve{b}^\lambda_\alpha (R^\beta_\lambda + p^\beta_\lambda)\, b^\alpha_\beta = R^\alpha_\alpha + p^\alpha_\alpha = R^\alpha_\alpha.$$

Endlich ergibt sich durch Substitution in (V):

$$s^{l\alpha}_{\alpha/} = -\nabla^\alpha [\breve{b}^\lambda_\alpha (R^l_\lambda + p^l_\lambda)] = \nabla_\alpha [\breve{b}^{\alpha\lambda} (R^l_\lambda + p^l_\lambda)].$$

Das System (34) kann auf folgende Weise umgeschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l} b_{l\alpha/\cdot}{}^{\alpha} = 0 \quad (A); \; \nabla_\alpha [b^{\alpha\lambda}(R_{\lambda l} + p_{\lambda l})] = \overset{\frown}{b}{}^{\alpha}_{l} p_{\alpha\beta/\cdot}{}^{\beta} \quad (B); \\ \nabla_\alpha (\overset{\frown}{b}{}^{\alpha\beta} p_{\beta\gamma/\cdot}{}^{\gamma}) = \overset{\frown}{b}{}^{\lambda}_{\alpha} R^{\beta}_{\lambda} p^{\alpha}_{\beta} \quad (C); \qquad R^{\alpha}_{\alpha} = 0 \quad (D). \end{array}\right\} \tag{37}$$

Somit ist das System (10) völlig integrierbar, wenn die Bedingungen (37) erfüllt werden. Die Integrabilitäts-Bedingungen des Systems (13) aber werden erfüllt, wenn die entsprechenden Grössen aus (35) und (36) bestimmt werden.

Unter Benützung der Formeln (12), (13) und (29) können wir eine Gleichung zur Bestimmung der Ebenen ξ und Ξ aufstellen, deren Integrabilitätsbedingungen zufolge (37) erfüllt sind. Berücksichtigen wir noch, dass alle Gleichungen linear sind, kann folgendes Theorem bewiesen werden:

Sind die Grössen G^{k}_{ij}, p_{ij}, b_{ij}, die die Bedingungen (37) befriedigen, und die Grösse Ω gegeben, so ist die Konfiguration s, S, Σ bis auf eine projektive Transformation bestimmt.

§ 9. Die F-Konfiguration.

Ich werde eine Konfiguration als F-Konfiguration bezeichnen, wenn die asymptotischen Linien der Fläche s ein Tschebyschewnetz bilden. Von J. Dubnow wurde die invariante Charakteristik des Tschebyschewnetzes für den metrischen zweidimensionalen Raum festgelegt. Man überzeugt sich leicht, dass dasselbe Merkmal seine Gültigkeit auch für eine beliebige Geometrie von affinem Zusammenhange beibehält. Es mögen die Nullinien der Form $\varphi_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta$ ein Tschebyschewnetz bilden. Dann lautet die Dubnowsche Bedingung:

$$\overset{\frown}{\varphi}{}^{\alpha\beta}(2\,\varphi_{\alpha l/\beta} - \varphi_{\alpha\beta/l}) = 0.$$

Nehmen wir jetzt an, dass in einer gewissen Konfiguration die asymptotischen Linien $b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta = 0$ ein Tschebyschewnetz bilden. Zufolge der Symmetrie des Tensors $b_{ij/k}$ haben wir:

$$\overset{\frown}{b}{}^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta/l} = 0$$

oder

$$b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta/l} = \frac{\partial \lg \left(\dfrac{b}{w^2}\right)}{\partial u^l} = 0 \tag{38}$$

und mithin

$$\frac{b}{w^2} = \text{const.} \tag{39}$$

Wegen (30) folgt aber aus (39): $\frac{b}{\omega^2} = \text{const.}$, also endlich:

$$\frac{w}{\omega} = \text{const.} \tag{40}$$

Mithin stehen in der F-Konfiguration entsprechende Flächenelemente erster und zweiter Art in einem konstanten Verhältnis zueinander.

Aus der Symmetrie dieser Bedingung folgt ausserdem:

In der F-Konfiguration bilden die asymptotischen Linien ein Tschebyschewnetz, das gleichzeitig sowohl von erster wie von zweiter Art ist. Eine in der F-Konfiguration gegebene Normalenkongruenz der einen Art bestimmt vollständig eine Normalenkongruenz der anderen Art. Es seien z. B. x und Ξ in kanonischen Koordinaten gegeben. Die kanonischen Koordinaten der Tangetialebene der Fläche s und die Normalen erster Art bleiben aber unbestimmt. Es seien $\bar{\xi}$ willkürliche Koordinaten der Tangetialebene. Wir setzen

$$\xi = \lambda \bar{\xi}$$

und wollen nun ein solches λ suchen, dass die Bedingung (40) erfüllt sei. Wir haben:

$$\omega = \lambda^3 (\Xi, \bar{\xi}, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = \lambda^3 \bar{\omega};$$
$$b = | b_{ij} | = | \lambda x_{ij} \bar{\xi} | = \lambda^2 \bar{b}.$$

Wir fordern, dass

$$\omega^2 = cb.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\lambda = c \sqrt[4]{\frac{\bar{b}}{\bar{\omega}}}. \tag{41}$$

Entsprechend der Bedingung (2) wird dann die Normale der ersten Ar als Schnittgerade der Ebenen ξ_1 und ξ_2 bestimmt.

Wir nehmen noch auf eine gewisse Vereinfachung der Bedingungen de Integrabilität der F-Konfiguration in Acht. Infolge der Beziehung

$$\nabla_i (\overset{\smile}{b}{}^{j\beta} b_{\beta k}) = (\nabla_i \overset{\smile}{b}{}^{j\beta})\, b_{\beta k} + \overset{\smile}{b}{}^{j\beta} b_{\beta k;i} = 0$$

haben wir nach der Bedingung (38):

$$\nabla_\alpha \overset{\smile}{b}{}^{\alpha\beta} = \overset{\smile}{b}{}^{\beta\alpha} \overset{\smile}{b}{}^{\gamma\delta} b_{\gamma\delta;\alpha} = 0.$$

Wir erhalten deshalb anstatt (37B):

$$\overset{\smile}{b}^{\alpha\beta}(R_{\alpha i/\beta}+p_{\alpha i/\beta})=-\overset{\smile}{b}^{\alpha}_{i}p_{\alpha\beta/}{}^{\beta}_{\cdot}.$$

oder nach einigen einfachen Umformungen:

$$\overset{\smile}{b}^{\alpha\beta}(R_{\alpha i/\beta}+2p_{\alpha i/\beta}-p_{\alpha\beta/i})=0. \tag{42}$$

Anstatt (37C) aber tritt:

$$b^{\alpha\beta}[p_{\beta\gamma/}{}^{\gamma}_{\cdot\alpha}+R^{\gamma}_{\beta}p_{\gamma\alpha}]=0. \tag{43}$$

§ 10. Die Flächentheorie von Fubini-Čech.

Die Hauptgleichungen der Flächentheorie von Fubini-Čech haben die Gestalt [1]:

$$x_{ij}-\left\{ {\alpha \atop ij} \right\} x_{\alpha}=a_{ij\alpha}\overset{\smile}{a}^{\alpha\beta}x_{\beta}+a_{ij}X+p_{ij}x,$$
$$\xi_{ij}-\left\{ {\alpha \atop ij} \right\} \xi_{\alpha}=a_{ij\alpha}\overset{\smile}{a}^{\alpha\beta}\xi_{\beta}+a_{ij}\Xi+\pi_{ij}\xi,$$

wo a_{ij} ein Tensor ist, dessen Nullinien mit den asymptotischen Linien der Fläche zusammenfallen, und $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ die aus diesem Tensor zusammengesetzten Christoffelschen Symbole bedeutet. Da zwischen den Grössen x, Ξ, ξ, X die Relation (2) stattfindet, so gehört die von Fubini eingeführte Konfiguration zu den von uns betrachteten Konfigurationen. Vergleichen wir die ihr entsprechenden Grundformeln mit den Gleichungen (10), so haben wir:

$$G_{ij}^{k}=\left\{ {k \atop ij} \right\}+a_{ij\alpha}\overset{\smile}{a}^{\alpha k};\quad \Gamma_{ij}^{k}=\left\{ {k \atop ij} \right\}-\overset{\smile}{a}_{ij\alpha}a^{\alpha k}. \tag{44}$$

Hieraus erhalten wir:

$$\Gamma_{ij}^{k}-G_{ij}^{k}=-2a_{ij\alpha}\overset{\smile}{a}^{\alpha k}=\overset{\smile}{b}^{k\alpha}b_{\alpha i/j}$$

und da

$$a_{ij}=b_{ij},$$

so ist

$$a_{ijk}=-\frac{1}{2}b_{ij/k}. \tag{45}$$

Die Koeffizienten der kubischen Grundform von Fubini fallen bis auf einen konstanten Faktor mit den kovarianten Ableitungen des Tensors b_{ij} zusammen.

Die Bedingungen der Apolarität der Tensoren a_{ij} und a_{ijk}

$$\overset{\smile}{a}^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta i}=0$$

sind daher den Bedingungen (38) gleichwertig und es ist mithin *die von Fubini betrachtete Konfiguration eine F-Konfiguration.*

[1] Fubini Čech, Geometria proiettiva differenziale, vol. I.

Um die mit der Fläche s invariant verbundenen Flächen S und $\sum$ zu erhalten, fordert Fubini die Erfüllung folgender Bedingungen:

$$\frac{1}{8} b^{\alpha\beta} b^{\lambda\mu} b^{\sigma\rho} b_{\alpha\lambda/\sigma} b_{\beta\mu/\rho} = 1, \tag{46}$$

$$\breve{b}^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0, \tag{47'}$$

$$\breve{b}^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} = 0. \tag{47''}$$

Vermittelst der Formel (46) wird die eine der Normalenkongruenzen die Kongruenz der projektiven Normalen fixiert, während die andere sich nach dem Resultate des vorhergehenden Paragraphen bestimmen lässt. Die Formeln (47) aber fixieren den Punkt X und die Ebene Ξ und zeigen, dass die Nullinien der Tensoren p_{ij} und π_{ij} ein konjugiertes Netz bilden. Vergleichen wir die Formeln (12') und (12'') miteinander, so erhalten wir:

$$\breve{b}^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \breve{b}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \breve{b}^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} + b^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}.$$

Da aber $\breve{b}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = 2\chi$ und $\breve{b}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = 2H$, so haben wir im Falle der Fubinischen Konfiguration:

$$2\chi = 2H, \tag{48}$$

d. h. die mittleren Krümmungen der ersten und zweiten Art sind gleich.

Um gewisse Begriffe, die in der Theorie von Fubini-Čech die Hauptrolle spielen, geometrisch zu interpretieren, betrachten wir die Linie $u^i = u^i(t)$. Es sei $v^i = \frac{du^i}{dt}$ der Tangentialvektor dieser Linie, welcher der angegebenen Parametrisierung entspricht.

Wir betrachten die kovarianten Ableitungen beider Arten dieses Vektors, welche längs der Kurve nach diesem Parameter genommen werden:

$$\frac{\nabla v^i}{dt} = \dot{v}^i + G_{\alpha\beta}^{\ i} v^\alpha v^\beta; \qquad \frac{\nabla v^{(i)}}{dt} = \dot{v}^i + \Gamma_{\alpha\beta}^{\ i} v^\alpha v^\beta.$$

Als Differenz dieser Ableitungen ergibt sich:

$$\Delta v^i = \frac{\nabla v^{(i)}}{dt} - \frac{\nabla v^i}{dt} = (\Gamma_{\alpha\beta}^{\ i} - G_{\alpha\beta}^{\ i})\, v^\alpha v^\beta = \breve{b}^{i\lambda} b_{\lambda\alpha\beta} v^\alpha v^\beta.$$

Die Richtung des Vektors Δv^i hängt offenbar von der Art der Parametrisierung nicht ab und ist infolgedessen mit jedem Kurvenpunkt invariant verbunden.

Der Kürze wegen wollen wir Δv^i als k o v a r i a n t e D i f f e r e n z der gegebenen Kurve bezeichnen.

Nun wollen wir solche Linien aufsuchen, deren kovariante Differenz mit der entsprechenden Tangente gleichgerichtet ist.

Dann gilt:

$$v_\alpha \Delta v^\alpha = 0$$

oder

$$v_\alpha \bar{b}^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta\gamma} v^\beta v^\gamma = 0$$

also, wenn wir $s_{ijk} = \bar{b}^\alpha_i b_{\alpha jk}$ setzen, so finden wir, dass die gesuchten Linien Nullinien der Form $s_{\alpha\beta\gamma} du^\alpha du^\beta du^\gamma$ sind.

Ebenso haben wir für die Linien, deren kovariante Differenz zur entsprechenden Tangente konjugiert ist:

$$b_{\alpha\beta} v^\alpha \Delta v^\beta = b_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0,$$

woraus folgt, dass diese Linien Nullinien der Form $b_{\alpha\beta\gamma} du^\alpha du^\beta du^\gamma$ sind.

Alle diese Betrachtungen gelten auch für eine beliebige Konfiguration. Wir wenden uns jetzt zu der F-Konfiguration.

Zunächst erhalten wir aus den Bedingungen der Apolarität:

$$s^\alpha_{.\alpha i} = b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta i} = 0,$$

woraus folgt, dass der Tensor s_{ijk} in betreff auf alle Indizes symmetrisch ist. In Anbetracht dessen können wir folgende evidente Kette von Gleichungen aufstellen:

$$s_{ijk} = b^\alpha_i b_{\alpha jk} = -b^\alpha_i b^\beta_j s_{\alpha\beta k} = -b^\alpha_i b^\beta_j s_{k\alpha\beta} = -b^\alpha_i b^\beta_j b^\gamma_k b_{\alpha\beta\gamma}.$$

Ist dann v^i der Vektor der Nullrichtung des Tensors s_{ijk} und $w^i = \lambda b^i_\alpha v^\alpha$ der Vektor der konjugierten Richtung, so gilt:

$$s_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha v^\beta v^\gamma = -b^\alpha_\lambda b^\beta_\mu b^\gamma_\nu b_{\alpha\beta\gamma} v^\lambda v^\mu v^\nu = \rho b_{\alpha\beta\gamma} w^\alpha w^\beta w^\gamma = 0.$$

Mithin ist die Nullrichtung des Tensors s_{ijk} zur Nullrichtungen des Tensors b_{ijk} konjugiert.

Aus den Formeln (45) folgt, dass die Linien $b_{\alpha\beta\gamma} du^\alpha du^\beta du^\gamma = 0$ diejenigen von Darboux sind, woraus wir weiter schliessen, dass die Linien $s_{\alpha\beta\gamma} du^\alpha du^\beta du^\gamma = 0$ diejenigen von Segre sind [1].

Mithin sind in einer F-Konfiguration die Darboux-Linien diejenigen, deren kovariante Differenz der entsprechenden Tangente konjugiert ist, während die Segre-Linien diejenigen sind, bei denen die kovariante Differenz mit der Tangente gleichgerichtet ist.

Wir untersuchen jetzt die kovariante Differenz der asymptotischen Linien. Sind v^i und w^j Tangentialvektoren an die asymptotischen Linien, so gilt:

$$b^{ij} = \lambda v^{(i} w^{j)}, \tag{*}$$

[1] Fubini et Čech, Introduction à la géométrie projektive diff., Chap. V.

nun ist aber

$$b^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta i}=\lambda v^{\alpha}w^{\beta}b_{\alpha\beta i}=0,$$

daher ist

$$v_{\alpha}\Delta w^{\alpha}=0,\quad w_{\alpha}\Delta w^{\alpha}=0$$

d. h.:

Die kovariante Differenz einer asymptotischen Linie einer F-Konfiguration ist der anderen asymptotischen Linie gleichgerichtet.

Wir wollen jetzt die geometrische Bedeutung der mit (46) verbundenen invarianten Grösse

$$J=\frac{1}{8}b^{\alpha\beta}b^{\lambda\mu}b^{\sigma\rho}b_{\alpha\lambda\sigma}b_{\beta\mu\rho}$$

angeben, welche wir analog der entsprechenden Invarianten der affinen Geometrie [1] als Picksche Invariante der Gegebenen F-Konfiguration bezeichnen.

Indem wir v^i und w^i wieder als Tangentialvektoren an die asymptotischen Linien betrachten und die Bedingung (38) der Apolarität in Betracht nehmen, erhalten wir zunächst:

$$J=\frac{1}{4}\lambda^3 b_{\alpha\beta\gamma}v^{\alpha}v^{\beta}v^{\gamma}b_{\lambda\mu\nu}w^{\lambda}w^{\mu}w^{\nu}.$$

Aber aus (*) folgt:

$$b^{i\alpha}w_{\alpha}=\lambda w^{i}v^{\alpha}w_{\alpha};\quad b^{i\alpha}v_{\alpha}=-\lambda v^{i}v^{\alpha}w_{\alpha},$$

wo $\sigma=v^{\alpha}w_{\alpha}$ den beiden inneren Geometrien entsprechenden Flächeninhalt des aus den Vektoren v^i und w^i konstruierten Parallelogramms bedeutet.

Ersetzen wir v^{α} und w^{λ}, so erhalten wir:

$$J=-\frac{\lambda}{4\sigma^4}s^{\rho}_{\cdot\beta\gamma}v^{\beta}v^{\gamma}v_{\rho}s^{\omega}_{\cdot\mu\nu}w^{\mu}w^{\nu}w_{\omega}=$$

$$=-\frac{\lambda}{4\sigma^2}v_{\lambda}\Delta v^{\lambda}\cdot w_{\mu}\Delta w^{\mu}.$$

Nun ist aber

$$\Delta v^i=\alpha w^i;\quad \Delta w^i=\beta v^i$$

und somit

$$v_{\alpha}\Delta v^{\alpha}=-\alpha\sigma\quad\text{und}\quad w_{\beta}\Delta w^{\beta}=\beta\sigma.$$

Anderseits ist

$$\Delta v^{\alpha}\Delta w_{\alpha}=\alpha\beta\sigma,$$

woher

$$J=\frac{\lambda}{4\sigma}\Delta v^{\alpha}\Delta w_{\alpha}.$$

Es bleibt noch die Bestimmung von λ auszuführen. Dazu betrachten wir die Beziehung:

$$2b^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}=2\lambda\cdot b_{\alpha\beta}v^{\alpha}w^{\beta}$$

[1] Blaschke, Vorlesungen, II, § 63 (aus 6).

oder

$$\lambda = \frac{1}{b_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta}.$$

Nun ist es aber leicht die für beliebige Vektoren geltende Identität

$$(v^\alpha w^\beta)^2 = (b_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta)(b_{\lambda\mu} w^\lambda w^\mu) - (b_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta)^2$$

zu beweisen.

Um die Rechnung zu vermeiden, genügt es in Acht zu nehmen, dass der von uns betrachtete Flächeninhalt mit demjenigen identisch ist, welcher durch die metrische Form $b_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta$ bestimmt wird; sodann ist die angegebene Identität nichts anderes, als die Lagrangesche Formel der elementären Vektorrechnung, welche bei beliebiger Krümmung der metrischen Form gilt.

Im angegebenen Falle ist:

$$b_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = b_{\lambda\mu} w^\lambda w^\mu = 0,$$

und

$$(b_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta)^2 = -(v^\alpha w_\alpha)^2,$$

woher

$$\lambda = -\frac{i}{\sigma}$$

ist; und endlich

$$J = -\frac{i \Delta v^\alpha \Delta w_\alpha}{4 (v^\beta w_\beta)^2}.$$

Es gilt mithin der folgende Satz:

Die Picksche Invariante fällt bis auf einen konstanten Faktor mit dem Verhältnis der absoluten Grösse des Flächeninhalts des Parallelogramms, welches aus den kovarianten Differenz der asymptotischen Linien konstruiert ist, zum Quadrate des Flächeninhalts des Parallelogramms, das aus den entsprechenden Tangentialvektoren konstruiert ist, zusammen. Dabei ist zu beachten, dass das Wort „Flächeninhalt" sich auf die innere Geometrie der F-Konfiguration bezieht. In der affinen Geometrie fällt die Bedeutung dieses Ausdruckes, wie wir später sehen werden, mit dem affinen Inhalt der Fläche zusammen.

§ 11. Flächenpaare.

Fallen die Flächen S und $\sum$ in den entsprechenden Punkten zusammen, so werden wir sagen, dass die Konfiguration sich zu einem Flächenpaare reduziert. Da in diesem Falle Ξ eine Tangentialebene der Fläche s im Punkte X ist, so ist

$$X\Xi = 0; \quad X_i\Xi = 0; \quad X\Xi_i = 0. \tag{49}$$

Durch Vergleichung mit den Formeln (2) überzeugen wir uns dass die Flächen s und S in Bezug auf das Paare gleichberechtigt sind. Hieraus schliessen wir:

Die Normalenkongruenz erster Art ist zu beiden Flächen des Paares konjugiert.

Die Normalenkongruenz zweiter Art ist zu beiden Flächen des Paares harmonisch.

Mit anderen Worten, die Flächen s und S befinden sich in einer F-Relation nach der Terminologie von Eisenhart [1].

Für den Fall des Flächenpaares vereinfacht sich der ganze Formelnapparat sehr wesentlich. Wir stellen hier ein Schema der wichtigsten Formeln zusammen:

$$\left.\begin{array}{llll} & & \Omega = 0 & \text{(I)}; \\ p_{ij} = -\varepsilon_{ij} & \text{(II')}; & \pi_{ij} = -e_{ij} & \text{(II'')}; \\ s_i = 0 & \text{(III')}; & \sigma_i = 0 & \text{(III'')}; \\ p_{i\alpha|\cdot}^{\ \ \alpha} = 0 & \text{(IV)}; & & \\ & & \nabla_\alpha \tilde{b}^{\alpha\beta}(R_{\beta i} + p_{\beta i}) = 0 & \text{(V)}; \\ & & \tilde{b}^\alpha_\beta R^\beta_\gamma p^\gamma_\alpha = 0 & \text{(VI)} \end{array}\right\} \qquad (50)$$

Nun wollen wir die Differentialgleichung der asymptotischen Linien der Fläche S aufstellen. Für den entsprechenden Tensor B_{ij} gilt:

$$B_{ij} = -X_i \Xi_j = -s_i^\alpha \sigma_j^\beta x_\alpha \xi_\beta = s_i^\alpha \tilde{b}^{\beta\mu} \varepsilon_{\mu j} b_{\alpha\beta} = s_i^\alpha p_{\alpha j}$$

oder

$$B_{ij} = \tilde{b}_i^\alpha (R_\alpha^\beta + p_\alpha^\beta) p_{\beta j}. \qquad (51)$$

Auf diese Weise wird durch die Gleichung (50), (VI) die Symmetrie dieses Tensors festgelegt.

Ich bezeichne ein Flächenpaar als **a s y m p t o t i s c h**, **w e n n** die asymptotischen Linien der Flächen s und S einander zugeordnet sind. In diesem Falle gilt:

$$b_i^\alpha (R_\alpha^\beta + p_\alpha^\beta) p_{\beta j} = \lambda b_{ij},$$

oder

$$(R^{i\alpha} + p^{i\alpha}) p_{\alpha j} = \mu \delta^i_j,$$

und da

$$p^{i\alpha} p_{\alpha j} = \nu \delta^i_j,$$

so ist

$$m R_{ij} = n p_{ij}. \qquad (52)$$

In enger Beziehung zum Begriff eines Flächenpaares steht die Frage über die Kongruenzen, deren Krümmungslinien erster und zweiter Art zusammenfallen.

[1] „Transformation of surfaces“, Chap II.

Sind die Nullinien der Form $s_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ zugleich auch Krümmungslinien der ersten Art, so ist

$$s_{ij} = b_{(i}^{\ \alpha} e_{j)\alpha}.$$

In der Tat ist

$$b^{\lambda\mu} s_{\lambda\mu} = b^{\lambda\mu} b_\lambda^\alpha e_{\mu\alpha} = \lambda L^{\lambda\mu} e_{\lambda\mu} = 0$$

und ebenso

$$e^{\alpha\beta} s_{\alpha\beta} = 0.$$

Auf ähnliche Weise schliessen wir, dass die Krümmungslinien der zweiten Art durch den Tensor

$$\sigma_{ij} = b_{(i}^{\ \alpha} \varepsilon_{j)\alpha}$$

charakterisiert werden.

Fallen diese beiden Kurvennetze zusammen, so ist

$$b_{(i}^{\ \alpha} e_{j)\alpha} + \lambda' b_{(i}^{\ \alpha} \varepsilon_{j)\alpha} = 0,$$

oder

$$b_i^\alpha (e_{j\alpha} + \lambda' \varepsilon_{j\alpha}) = \mu L_{ij},$$

woher

$$e_{ij} + \lambda \varepsilon_{ij} + \mu b_{ij} = 0.$$

Überschieben wir beide Seiten dieser Gleichung mit $b^{i\alpha}\varepsilon_{\alpha}^{j}$, so erhalten wir die Bedingung der Kompatibelität des Systems in der Form

$$b^{\lambda\mu} \varepsilon_\lambda^\alpha e_{\alpha\mu} = 0.$$

Substituieren wir hier statt ε_{ij} und e_{ij} ihre Werte:

$$\varepsilon_{ij} = -p_{ij} - b_{ij}\Omega,$$

$$e_{ij} = -R_{ij} - p_{ij} + 2Hb_{ij},$$

so erhalten wir eine gleichbedeutende Bedingung

$$b^{\lambda\mu} p_\mu^\alpha R_{\alpha\lambda} = 0. \qquad (*)$$

Vergleichen wir (*) mit (50), (VI), so überzeugen wir uns, dass **die Krümmungslinien erster und zweiter Art der Grundfläche eines Flachenpaares miteinander zusammenfallen.**

Wenden wir uns nun zum allgemeinen Falle, so bemerken wir, dass die Bedingung (34), (VI) zufolge (*) die Form

$$s_{\alpha j \cdot}^{\cdot \cdot \alpha} = 0$$

annimmt.

Da aber s_i ein Gradientvektor ist, so dürfen wir

$$s_i = \frac{\partial s}{\partial u^i}$$

setzen. Jetzt verschieben wir den Punkt X längs der Normale erster Art, indem wir

$$X = \overline{X} + sx$$

setzen. Dann ist

$$X_i = s_i^\alpha x_\alpha + s_i x = \overline{X}_i + s_i x + s x_i$$

und daher

$$\overline{X}_i = \overline{s}_i^\alpha x_\alpha.$$

Auf analoge Weise erhalten wir

$$\overline{\Xi}_i = \overline{\sigma}_i^\alpha \xi_\alpha,$$

worin

$$\Xi = \overline{\Xi} + \sigma\xi$$

gesetzt ist.

Jetzt betrachten wir die Konfiguration x, ξ, $\overline{X}$, $\overline{\Xi}$, welche in kanonischen Koordinaten angegeben ist, da die Bedingungen

$$x\overline{\Xi} = \overline{X}\xi = 1; \quad x_i\overline{\Xi} = \overline{X}_i\xi = 0$$

erfüllt sind

Nun ist die Invariante

$$\overline{\Omega} = \overline{X}\overline{\Xi} = \text{const.},$$

da

$$\overline{\Omega}_i = \overline{X}\overline{\Xi}_i + \overline{X}_i\overline{\Xi} = 0$$

ist. Da aber s und σ nur bis auf additive Konstanten bestimmt sind, so lassen sich dieselben derart wählen, dass

$$\overline{\Omega} = 0.$$

In diesem Falle artet die Konfiguration in ein Flächenpaar aus, wobei dies ohne die Normalen erster und zweiter Art zu ändern erreicht wird. Also endgültig:

Damit die Krümmungslinien erster und zweiter Art zusamenfallen, ist es notwendig und hinreichend, dass ausser der Grundfläche x noch eine solche Fläche existiere, die der Kongruenz der Normalen erster Art konjugiert und derjenigen der Normalen zweiter Art harmonisch wäre.

§ 12. Metrische Paare.

Ich nenne eine Konfiguration metrisch, wenn sie ein asymptotisches Paar darstellt und wenn dabei die innere Geometrie irgendeiner Art eine Riemannsche metrische Geometrie ist.

Da das Gebiet binär ist, sind die Bedingungen dafür, dass die Geometrie des affinen Zusammenhangs eine Riemannsche ist, leicht anzugeben.

In der Tat gelten im zweidimensionalen Raume stets die Gleichungen:

$$R_{ij} = kg_{ij}, \tag{53}$$

wenn dabei

$$g_{ij|k} = 0 \tag{54}$$

ist, wo k das Gaussische Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit ist. Differenzieren wir die Relation (53) unter der Voraussetzung $k \neq 0$, so erhalten wir:

$$R_{ij|l} = k_l g_{ij} = \frac{k_l}{k} R_{ij},$$

oder

$$R_{ij|l} = \sigma_l R_{ij}, \tag{55}$$

wo σ_l ein Gradientvektor ist.

Diese notwendige Bedingung ist zugleich auch hinreichend; durch die Annahme

$$\sigma = \int \sigma_\alpha du^\alpha; \quad g_{ij} = e^{-\sigma} R_{ij}$$

erreichen wir nämlich, dass die Bedingen (54) erfüllt werden.

Auf diese Weise wird im Falle einer Riemannschen Geometrie der metrische Tensor bis auf einen konstanten Faktor durch die Komponenten der Parallelübertragung bestimmt.

Vergleichen wir (53) mit (52), so erhalten wir:

$$p_{ij} = qg_{ij} \tag{56}$$

wo q konstant ist, da zufolge (50), (IV)

$$p_{i\alpha|\cdot}{}^{\alpha} = q^\alpha g_{i\alpha} = 0,$$

woraus

$$q_i = 0.$$

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen der Messung der Längen vermittelst des Tensors g_{ij} und der von uns in § 6 eingeführten Flächenmessung herstellen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Relation

$$2\frac{g}{w^2} = L^{\alpha\lambda} L^{\beta\mu} g_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}.$$

Differenzieren wir diese Gleichung und beachten wir die Eigenschaften des Tensors der rechten Seite, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{g}{w^2}\right) = 0,$$

oder

$$g = w^2 \cdot \text{const.}$$

Wir wollen die Willkürlichkeit der Funktion σ in der Weise ausnützen, dass wir

$$g = w^2 \tag{57}$$

setzen, wodurch wir eine Übereinstimmung der Masstäbe bei der Auswertung der Linien und Flächen der inneren Geometrie erster Art herstellen.

Das Vorzeichen von g_{ij}, das hierbei unbestimmt bleibt, wählen wir derart, dass die Form $g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ immer positiv sei.

Wir gehen jetzt zu den Bedingungen der Integrabilität über und suchen neue Ausdrücke für den Tensor s_i^j auf:

$$s_i^j = -\breve{b}^{j\alpha} e_{\alpha i} = \breve{b}_i^\alpha (R_\alpha^j + p_\alpha^j).$$

Da aber

$$\breve{b}_{ij} = \frac{w^2}{b} b_{ij}$$

so ist

$$s_i^j = -\frac{g}{b}(k+q) g^{j\alpha} b_{\alpha i}.$$

Aus den Bedingungen (34), (V) und (50), (III) erhalten wir:

$$s_{\alpha j \cdot}^{i\,\alpha} = \left[\frac{g}{b}(k+q)\right]_{|\cdot}^{\beta} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} + \frac{g}{b}(k+q) g^{j\alpha} b_{\alpha\beta|\cdot}^{\ \ \beta} = 0,$$

woraus folgt:

$$\left[\frac{g}{b}(k+q)\right]_{|i} = 0$$

oder

$$k + q = \frac{b}{g} \cdot \text{const.}$$

Erinnern wir uns jetzt daran, dass die in §1 angegebene Bestimmung der kanonischen Koordinaten noch einen konstanten Faktor unbestimmt lässt; wir dürfen somit immer x durch cx ersetzen, sobald wir gleichzeitig $\frac{1}{c}\xi$ statt ξ setzen.

In der Voraussetzung, dass $k + q \neq 0$ wählen wir den Faktor c derart dass die Gleichung

$$k + q = \frac{b}{g} \tag{58}$$

stattfinde. Dann ist

$$s_i^j = -g^{j\alpha} b_{\alpha i} \tag{59}$$

und

$$e_{ij} = -g^{\alpha\beta} b_{\alpha i} b_{\beta j}. \tag{60}$$

Wir gehen dazu über, die volle Krümmung erster Art zu bestimmen. Es ist

$$K = \frac{e}{b} = \frac{g}{2b} e^{\lambda\mu} e_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2(k+q)} e^{\lambda\mu} e_{\lambda\mu},$$

aber

$$e^{\lambda\mu} e_{\lambda\mu} = g^{\alpha\beta} b_{\alpha\lambda} b_{\beta\mu} g_{\sigma\rho} b^{\sigma\lambda} b^{\rho\mu} = 2\left(\frac{b}{g}\right)^2 = 2(k+q)^2$$

ist, woraus folgt

$$K = k + q \tag{61}$$

eine Formel, welche der Gaussischen analog ist.

Differenzieren wir e_{ij} vermittelst der kovarianten Differentiation zweiter Art, so erhalten wir mit Hilfe von (27):

$$\left.\begin{aligned} e_{(i)(j)\|k} &= -g^{\alpha\beta}(b_{\alpha(i)\|k} b_{\beta j} + b_{\alpha i} b_{\beta(j)\|k}) = 0, \\ e_{(i)(j)/k} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Hieraus ergibt sich der folgende wichtige Satz:

Ist eine Konfiguration in Bezug auf die innere Geometrie irgendeiner Art metrisch, so ist sie in Bezug auf die innere Geometrie der andern Art auch metrisch.

§ 13. Die Flächen des nicht-euklidischen Raumes.

Es seien y und z zwei verschiedene, durch ihre homogenen Koordinaten angegebene Punkte. Wir führen das Symbol $y; z$, das dem Zeichen der diadischen Multiplikation von Vektoren analog ist ein. Wir werden dieses Symbol als Zeichen einer linearen Operation ansehen, welche der Ebene einen Punkt zuordnet.

Die Wirkung der Operation $y; z$ auf die Ebene η definieren wir durch die Gleichungen:

$$(y;\, z)\,\eta = y\,(z\eta),$$

$$\eta\,(y;\, z) = (\eta y)\, z.$$

Dann wird das Symbol der allgemeinsten korrelativen Transformation durch

$$\Phi = \Phi^{\alpha\beta}\; x_\alpha;\; x_\beta$$

angegeben, wo $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ sind; x_1, x_2, x_3, x_4 sind vier Punkte, während die Φ^{ij} Zahlenkoeffizienten bedeuten.

Lässt sich die Korrelation auf eine Polarität in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung zurückführen, so ist

$$\Phi^{ij} = \Phi^{ji}$$

und die Tangentialgleichung dieser Fläche lautet:

$$\eta \Phi \eta = 0.$$

Wir ordnen jetzt jedem Punkte der Fläche s eine symmetrische Korrelation zu; dieselbe lasse der Ebene ξ und ihrer Umgebung erster Ordnung der Punkt X und die zugehörende Umgebung derart entsprechen, dass ξ in λX, ξ_i in λX_i und Ξ in μx übergehe.

Wir bestimmen das entsprechende Φ, indem wir

$$\Phi = a\,(x;\,x) + b\,(x;\,X + X;\,x) + c\,(X;X) + d^{\alpha}(X;\,x_\alpha + x_\alpha;\,X) + f^{\alpha\beta}(x_\alpha\,;\,x_\beta)$$

setzen.

Dann ist

$$\Phi\xi = bx + cX + d^{\alpha}x_\alpha = \lambda X,$$

woraus folgt:

$$b = 0; \quad d^i = 0; \quad c = \lambda;$$

$$\Phi\Xi = ax = \mu x$$

und daher $a = \mu$ und mithin

$$\Phi\xi_i = -f^{\alpha\beta}x_\alpha b_{\beta i} = \lambda X_i = -\lambda g^{\alpha\beta} b_{\beta i} x_\alpha;$$

hieraus folgt weiter

$$f^{\alpha\beta} = \lambda g^{\alpha\beta}$$

und somit

$$\Phi = \mu\,(x\,;x) + \lambda\,(X\,;X) + \lambda g^{\alpha\beta}(x_\alpha\,;x_\beta).$$

Wir müssen im allgemeinen Φ als vom Punkte u^1, u^2 abhängig betrachten.

Indem wir berücksichtigen, dass die durch Φ angedeutete Operation vom linearen Charakter ist, differenzieren wir Φ nach u^1 und u^2, wobei λ und μ als Konstanten zu betrachten sind; wir bekommen:

$$\begin{aligned}\Phi_i = {} & \mu\,(x_i\,;x + x\,;x_i) + \lambda\,(X_i\,;X + X\,;X_i) + \\ & + \lambda\,[g^{\alpha\beta}(p_{\alpha i}x + b_{\alpha i}X);x_\beta + g^{\alpha\beta}x_\alpha\,;(p_{\beta i}x + b_{\beta i}X)] = \\ & - \mu\,(x_i\,;x + x\,;x_i) + \lambda\,(X_i\,;X + X\,;X_i) + \lambda q\,(x\,;x_i + x_i\,;x) - \\ & - \lambda\,(X_i\,;X + X;\,X_i) = (\mu + \lambda q)\,(x_i\,;x + x\,;x_i).\end{aligned}$$

Wir betrachten den Fall $q \neq 0$ (der Fall $q = 0$ wird an späterer Stelle behandelt) und setzen:

$$\mu = \sqrt{|q|}, \quad \lambda = -\frac{1}{\sqrt{|q|}};$$

dann ist

$$\Phi = \sqrt{|q|}\;x\,;x - \frac{1}{\sqrt{|q|}}(X\,;X + g^{\alpha\beta}x_\alpha\,;x_\beta),$$

$$\Phi_i = 0.$$

Die Transformation wird beim Übergang von Punkt zu Punkt ungeändert bleiben.

Die Fläche $\eta\Phi\eta = 0$ kann nicht degenerieren, da d e Diskriminante der linken Seite der Gleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 & 0 \\ g^{21} & g^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{|q|}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{|q|} \end{vmatrix} = -\frac{1}{g} \neq 0.$$

ist.

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Ist eine Konfiguration metrisch und der Tensor $p_{ij} \neq 0$, so kann die Ergänzungsfläche S als Resultat einer Polartransformation der Fläche s bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung — der absoluten Fläche der metrischen Konfiguration — erhalten werden.

Nun betrachten wir diese absolute Fläche als das Absolut einer gewissen Geometrie konstanter Krümmung und im Raume, der die Konfiguration auch umfasst, stellen wir die mit diesem Absolut verbundene Cayléysche Metrik auf fest.

Wählen wir das Koordinatentetraeder derart, dass die Gleichung des Absoluts die Gestalt annimmt

$$\sum_1^4 \varepsilon_i [x^{(i)}]^2 = 1,$$

wo $\varepsilon_i = \pm 1$, und nehmen wir als Tangentialkoordinaten einer Ebene die Koordinaten ihres Poles in Bezug auf das Absolut, so nimmt die Bedingung $\Xi x = 1$ die Gestalt

$$\sum_1^4 \varepsilon_i [x^{(i)}]^2 = 1$$

an. Hieraus folgt, dass die kanonischen Koordinaten mit den Weyerstrassischen Koordinaten der auf diese Weise festgestellten Geometrie identisch sind.

Nehmen wir die Form

$$\frac{1}{q} \sum_1^4 \varepsilon_i [x^{(i)}]^2$$

als die metrische an, so wird dabei die fundamental Form der Fläche s mit $g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ zusamenmenfallen.

Die Normale der ersten Art ist zur Tangentialebene perpendikulär; alle Formeln, die oben abgeleitet wurden, sind von denjenigen der Theorie des Raumes von konstanter Krümmung (wie dieselben z. B. von Bianchi[1] angegeben worden sind) nur unwesentlich verschieden.

§ 14. Quasisphären.

Wir bezeichnen eine Konfiguration als quasisphärisch und eine Fläche als Quasisphäre

erster Art, wenn alle Normalen der ersten Art durch einen Punkt — das Zentrum der Quasisphäre — gehen.

zweiter Art, wenn alle Normalen der zweiten Art in einer Ebene — der Grundebene der Quasisphäre — liegen.

Da die Normalenkongruenz der Quasisphäre erster Art (zweiter Art) ein Geradenbündel (ein ebenes Geradenfeld) bilden, so ist jede Linie auf der Quasisphäre erster Art (zweiter Art) eine Krümmungslinie erster Art (zweiter Art).

Da auf der Quasisphäre jede geodätische Linie gleichzeitig eine Krümmungslinie der entsprechenden Art ist, so gilt zufolge der in § 5 angeführten Eigenschaft der geodätischen Linien:

Eine geodätische Linie erster Art der Quasisphäre erster Art ist eine ebene Kurve, die in einer durch das Zentrum gehenden Ebene liegt.

Eine geodätische Linie zweiter Art der Quasisphäre zweiter Art ist Berührungslinie von Geraden, die einen Kegel mit der Spitze auf der Grundebene der Quasisphäre erzeugen.

Diese Eigenschaft der geodätischen Linien der Quasisphäre erlaubt uns, einen Schluss über ihre innere Geometrie zu ziehen. Wir projizieren die Punkte der Quasisphäre erster Art aus ihrem Zentrum auf eine beliebige Ebene, die durch das Zentrum nicht geht. In der auf diese Weise hergestellten gegenseitigen Punktabbildung der Ebene und der Quasisphäre gehen die geodätischen Linien der Quasisphäre offenbar in die Geraden der Ebene über. Vermittels des Prinzips der Dualität der projektiven Geometrie ist es leicht zu zeigen, dass auch die geodätischen Linien zweiter Art den Geraden der Ebene zugeordnet werden können, da ihnen offenbar die Kegelspitzen in der Grundebene der Quasisphäre entsprechen. Es gilt somit der folgende (doppelte) Satz:

Die Geometrie der ersten Art (zweiten Art) der Quasisphäre erster Art (zweiter Art) ist von solcher Beschaf-

[1] „Lezioni di geometria differentiale", Terza edizione, vol. II, § 481, 482.

fenheit, dass die Übertragung welche sie bestimmt eine projektiv-euklidische (nach der Terminologie von Schouten[1] ist.

Wir gehen zur Herleitung einiger für die Quasisphäre geltender Formeln über. Nach der Grunddefinition der Quasisphäre ist

$$X = lx + mX_0,$$

wo l und m Funktionen des Punktes und X_0 = konstant — das Zentrum der Quasisphäre bedeuten.

Durch Differentitation erhalten wir:

$$X_i = l_i x + l x_i + m_i X_0,$$

woraus sich zufolge (2) ergibt:

$$X_i \xi = m_i (X_0 \xi) = 0.$$

Da $X_0 \xi$ nicht identisch verschwinden kann, so gilt:

$$m_i = 0,$$

es ist somit m = konstant und kann gleich Eins gewählt werden.

Auf diese Weise ergibt sich:

$$X = lx + X_0,$$

woraus wir erhalten:

für die Quasisphäre erster Art: für die Quasisphäre zweiter Art:

$$s_i^j = l \delta_i^j, \quad \text{(I')} \qquad \sigma_i^j = \lambda \delta_i^j, \quad \text{(I'')}$$

$$s_i = l_i, \quad \text{(II')} \qquad \sigma_i = \lambda_i. \quad \text{(II'')}$$

Aus (12), (14), (8) und (9) erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{llll} e_{ij} = -l b_{ij} & \text{(III')}; & \varepsilon_{ij} = -\lambda b_{ij} & \text{(III'')}; \\ R_{ij} + p_{ij} = -l b_{ij} & \text{(IV')}; & \rho_{ij} + \pi_{ij} = -\lambda b_{ij} & \text{(IV'')}; \\ \pi_{ij} = (l - \Omega) b_{ij} & \text{(V')}; & p_{ij} = (\lambda - \Omega) b_{ij} & \text{(V'')}; \\ H = -l & \text{(VI')}; & \chi = -\lambda & \text{(VI'')}; \\ K = l^2 & \text{(VII')}; & \varkappa = \lambda^2 & \text{(VII'')}. \end{array}\right\} \quad (63)$$

Die Diskriminante der Gleichung, aus welcher die Hauptkrümmungsradien $\nu_1 = \frac{1}{R_1}$; $\nu_2 = \frac{1}{R_2}$ bestimmt sind, ist durch

$$H^2 - K = 0$$

gegeben. Hieraus folgt:

Die Hauptkrümmungsradien der Quasisphäre entsprechender Art sind einander gleich.

[1] Ricci-Kalkül, Abschn. 4, § 2.

Die Integrabilitätsbedingungen (34), (III) liefern uns

$$p_{i|\alpha|\cdot}{}^{\alpha} = b_i^{\alpha} \lambda_\alpha$$

und dann zusammen mit (II) (34) und (IV) (63):

$$R_{i|\alpha|\cdot}{}^{\alpha} = 0, \qquad (64') \qquad \Big| \qquad \rho_{(i)(\alpha)/}{}^{\alpha} = 0, \qquad (64'')$$

was als analytisches Merkmal des projektiv-euklidischen Charakters der Übertragung erscheint[1].

§ 15. Affine Paare.

Wir nennen ein Flächenpaar ein *affines Paar*, wenn seine Hauptfläche eine Quasisphäre zweiter Art ist.

In anderen Worten, die Fläche S, die mit $\sum$ zusammenfällt, ist eine Ebene

$$\Xi = \Xi_0 = \text{const.},$$

und alle Punkte X liegen in dieser Ebene.

Infolge der Gleichung $\lambda = 0$ haben wir in diesem Falle:

$$\varepsilon_{ij} = 0; \quad \pi_{ij} = -\rho_{ij} = -e_{ij}; \quad p_{ij} = 0; \quad \chi = 0; \quad \varkappa = 0. \qquad (65)$$

Wir stellen hier eine Tabelle der Hauptformeln zusammen:

$$\left.\begin{array}{rlrl}
x_{i/j} = b_{ij} X; & (\mathrm{I}') & \xi_{(i)/j} = -e_{ij}\xi + b_{ij}\Xi; & (\mathrm{I}'') \\
X_i = \breve{b}^{\alpha\beta} e_{\alpha i} x_\beta; & (\mathrm{II}') & \Xi = \text{const.}; & (\mathrm{II}'') \\
R_{ij} - 2Hb_{ij} + e_{ij} = 0; & (\mathrm{III}') & \rho_{ij} - e_{ij} = 0; & (\mathrm{II.}'') \\
b_{i|\alpha|\cdot}{}^{\alpha} = 0; & (\mathrm{IV}') & b_{(i)(\alpha)/\cdot}{}^{\alpha} = 0; & (\mathrm{IV}'') \\
\nabla_\alpha [\breve{b}^{\alpha\beta} R_{\beta i}] = 0; & (\mathrm{V}') & \rho_{(i)(\alpha)/\cdot}{}^{\alpha} = 0; & (\mathrm{V}'') \\
K_\alpha^\alpha = 0; & (\mathrm{VI}') & \rho_{\alpha\cdot}^{\cdot\alpha} = 0. & (\mathrm{VI}'')
\end{array}\right\} (66)$$

Wird $\Xi = \Xi_0$ als uneigentliche Ebene des Raumes angesehen, und führen wir ein System von Punkt- und Tangentialkoordinaten derart ein, dass die Ebene Ξ zur Koordinatenebene des Grundtetraeders werde und die Koordinaten

$$(0, 0, 0, 1)$$

besitze. Dann werden die Koordinaten des Punktes y, welche die Bedingungen

$$y\Xi = 1$$

erfüllen, mit seinen Kartesischen Koordinaten identisch.

Da nach (2)

$$x\Xi = 1$$

ist, so gilt der folgende Satz:

[1] Schouten, Ricci.-Kalkül, Abschn. 4, § 15 (18) u. (20).

Die kanonischen Koordinaten eines Punktes der Fläche s fallen mit seinen Kartesischen Koordinaten zusammen.

Nun wollen wir jetzt zeigen, dass jeder in der Ebene Ξ liegende und durch beliebige homogene Koordinaten angegebene Punkt als Vektor aufgefasst werden darf. In der Tat, ist a ein solcher Punkt, so kann jedem ausserhalb der Ebene Ξ liegenden Raumpunkte eine gewisse gerichtete Strecke eindeutig zugeordnet werden. Es seien y und z zwei gewöhnliche Punkte, wobei $y\Xi = z\Xi = 1$ ist.

Nun verlegen wir die Anfangspunkte der erwähnten Strecke in die Punkte y und z, die Endpunkte aber in die Punkte $y_1 = a + y$, $z_1 = a + z$ für welche wir ebenfalls haben:

$$y_1\Xi = z_1\Xi = 1,$$

da $\Xi a = 0$ ist.

Die Bewegungsrichtung auf den Strecken bestimmen wir derart, dass die Ebene Ξ hierbei nicht geschnitten werde. Dann ist

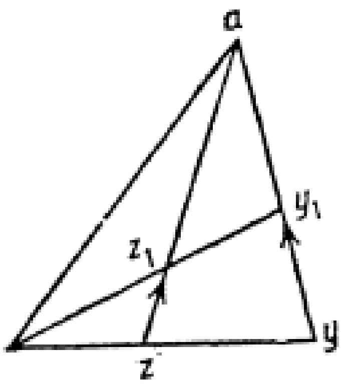

Abb. 1.

$$y - y_1 = z - z_1$$

oder

$$y - z = y_1 - z_1,$$

ausserdem

$$\Xi(y - z) = \Xi(y_1 - z_1) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Geraden yz und y_1z_1 sich im unendlich fernen Punkte schneiden, und dass die Strecke yy_1 durch Parallelübertragung der Strecke zz_1 erhalten wird. Dadurch ist aber bewiesen, dass dem Punkte a, der durch homogene Koordinaten gegeben ist, ein Vektor entspricht. Einem Punkte, dessen Koordinaten durch die Summen entsprechender Koordinaten zweier Punkte ausgedrückt werden, entspricht ein Vektor, der ihrer auf Grund der Parallelogrammkonstruktion bestimmten Vektorsumme gleich ist. In der Tat, sind a und b zwei solche Punkte, und $y\Xi = 1$, so ist $y + a + b$ der Schnittpunkt der Geraden $y + a, b$ und $y + b, b$. Berücksichtigen wir dabei, dass die Punkte a und b unendlich entfernt sind, so überzeugen wir uns, dass das Viereck y, $y + b$, $y + a + b$, $y + a$ ein Parallelogramm ist.

Mithin ist X ein Vektor der Normalen ersten Art, x_i und X_i sind ebenfalls Vektoren, die in einer Tangentialebene von s liegen.

Jetzt wollen wir die Fläche s_0 betrachten, für die der Radiusvektor eines Punktes dem Vektor der Normalen der Grundfläche gleich ist.

Es sei $y = x_0 + X$ ein Punkt dieser Fläche. Die Tangentialebene der Fläche s_0 wird de Tangentialebene der Hauptfläche parallel sein, da

$$y_i = x_i = s_i^\alpha x_\alpha$$

ist. Mithin gilt der folgende Satz:

Der Normalenvektor erster Art der Hauptfläche s ist als Radiusvektor einer gewissen anderen Fläche s_0 zu betrachten, die auf s derart abgebildet ist, dass die Tangentialebenen beider Flächen in entsprechenden Punkten parallel sind.

Hieraus folgt, dass die relative Geometrie der Fläche s, wie wir dieselbe festgelegt haben, in diesem Falle mit der relativen Geometrie der Flächen des affinen Raumes im Müllerschen Sinne zusammenfällt.

Wir wollen nun die Grundgleichung für die Tangentialebene der Fläche s_0 auffinden. Da diese Ebene η der Ebene ξ parallel ist, darf

$$\eta = \xi + \lambda\Xi$$

gesetzt werden.

Anderseits ist

$$\eta(X + x_0) = 0,$$

woher folgt

$$(\xi + \lambda\Xi)(X + x_0) = \lambda + 1 + \xi x_0 = 0$$

oder

$$\lambda = -(1 + \xi x_0),$$

und somit

$$\eta = \xi - (1 + \xi x_0)\Xi$$

und

$$\eta_i = \xi_i - (\xi_i x_0)\Xi,$$

sowie

$$\eta_{(i)ij} = -e_{ij}\xi + b_{ij}\Xi - (e_{ij}\xi x_0 + b_{ij}\Xi x_0)\Xi = -e_{ij}\xi + (\xi x_0)e_{ij}\Xi,$$

somit erhalten wir endgültig:

$$\eta_{(i)ij} = -e_{ij}\eta + e_{ij}\Xi. \tag{67}$$

Wird Ξ als Ergängzungsfläche zweiter Art betrachtet und s_0 als Hauptfläche, so werden die Koordinaten zufolge

$$\Xi y = 1; \quad \Xi_i y = 0$$

kanonisch sein. Die Formel (67) zeigt, dass die asymptotischen Linien von s_0 Nullinien des Tensors e_{ij} sein werden; die Geometrie der zweiten Art der Fläche s_0 ist mit der Geometrie der zweiten Art von s identisch.

Im Falle eines affinen Flächenpaares, fällt die Parallelübertragung mit derjenigen zusammen, welche durch einen Vektor X von folgender Beschaffenheit bestimmt ist: er muss als ein Schoutenscher Vektor der Pseudonormalen in einem umfassenden Raume A_n betrachtet werden [1].

In der Tat, gehen wir von der von uns in § 5 angegebenen geometrischen Interpretation der Parallelübertragung aus, so sehen wir, dass die Projektion aus dem Punkte X im diesem Falle sich auf die Parallelprojektion in der Richtung der Normalen reduziert. Anderseits artet die Bewegung des Punktes $v^\alpha x_\alpha$ (des Vektors des umfassenden affinen Raumes) auf der Geraden, die diesen Punkt mit dem Punkte x verbindet, auf den Zustand der Ruhe aus; der Punkt ist gezwungen in der unendlich fernen Ebene zu verbleiben, und wir erhalten somit die folgende Interpretation der Parallelübertragung:

Um eine Parallelübertragung des Vektors v^i in Bezug auf innere Geometrie der Fläche, auszuführen, muss man den Vektor $v^\alpha x_\alpha$ im Sinne des äusseren affinen Raumes parallelübertragen und ihn dann in „der Richtung" der Normalen im Anfangspunkte auf die Tangentialebene in diesem Punkte projizieren.

Die geodätischen Linien zweiter Art werden für affine Paare zu Schattenlinien der Fläche s. In der Tat rücken die Spitzen der Kegel, die längs den geodätischen Linien die Fläche berühren, ins Unendliche, und die Kegel verwandeln sich in Zylinder.

§ 16. Affine Flächengeometrie.

Wir betrachten affine Paare, die gleichzeitig eine F-Konfigurtion darstellen. Die asymptotischen Linien bilden in diesem Falle ein Tschebyschewnetz. Dies gestattet zur Konstruktion einer Normalen folgenden Weg einzuschlagen. Wir betrachten zwei asymptotische Linien, die vom Punkte A ausgehen und zwei andere, zu ihnen unendlich benachbarte; diese Asymptotenlinien gehören paarweise zu den einen und resp. der anderen Schar, es wird somit ein krümmliniges Viereck AA_1BA_2 gebildet. Sowohl die Projektion der Tangente an die Linie A_1B im Punkte A_1 auf die Tangentialebene, wie auch die Tangente selbst müssen in einer Ebene liegen, die zur Normalen der ersten Art parallel ist. Anderseits muss die Normale der

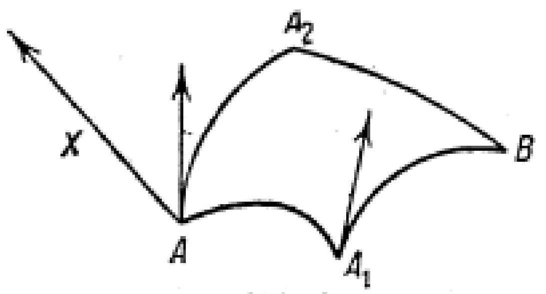

Abb. 2.

[1] J. Schouten, Ricci-Kalkül, 4 Abschn., § 5, 6.

ersten Art zur Ebene parallel sein, die auf dieselbe Weise zur Linie A_2B konstruiert ist. Mithin liegt der Vektor der Normalen erster Art im Durchschnitt der Ebenen, die durch die Tangenten zu den asymptotischen Linien im Punkte A gehen und zu den Tangenten an die unendlich benachbarten asymptotischen Linien derselben Schar parallel sind. Diese Konstruktion fällt aber mit der Konstruktion zusammen, die von Demoulin [1] für die affinen Normalen der Fläche angegeben wurde. Die Normale erster Art von affinen F-Paare ist die affine Normale der Hauptfläche.

Die von uns definierten Begriffe der Krümmungslinien, der vollen und der mittleren Krümmung, der Hauptradien der Krümmung, der Flächenelemente erster Art fallen in diesem Falle mit denen der entsprechenden Begriffen der affinen Flächengeometrie zusammen.

Vergleichen wir unsere Hauptgleichungen mit der Gleichung (134) § 59 im zweiten Bande des „Vorlesungen über Differentialgeometrie" von W. Blaschke, so erhalten wir folgende Tabelle:

Unsere Bezeichnung	b_{ij}	G_{ij}^k	s_i^k	$-e_{ij}$	Γ_{ij}^k	L_{ij}	H	K
Blaschkes Bezeichnung	g_{ij}	$\left\{ {ij \atop k} \right\} + A_{ij}^k$	B_i^k	B_{ij}	$\left\{ {ij \atop k} \right\} - A_{ij}^k$	ε_{ij}	H	K

Die Blaschkeschen Bedingungen der Integrabilität lauten

$$H_r = A_{rkl}C^{kl} - C_{r,l}^l,$$

worin

$$C_{lk} = A_{lk,l}^l$$

(das Komma trennt die Indizes der vermittels Christoffelsche Klammer $\left\{ {ij \atop k} \right\}$ der Form g_{ij} ausgeführten kovarianten Differentiation); sie sind der Bedingung (42) gleichwertig, welche zufolge $p_{ij} = 0$ die Form

$$\tilde{b}^{\alpha\beta} R_{\alpha l/\beta} = 0 \tag{68}$$

annimmt.

Unsere Bedingung $b_{l\alpha/}{}^{\alpha} = 0$ wird bei Blaschke durch die der Apolarität

$$A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta l} = A^{\alpha\beta}A_{\alpha l\beta} = A^{\alpha\beta}A_{l\alpha\beta} = 0$$

gegeben.

Es ist noch zu bemerken, dass im Falle, wo ein affines F-Paar quasisphärisch erster Art wird, ist die Hauptfläche eine affine Sphäre.

[1] A. Demoulin, C. R. de l'Ac. de Sci., 147, 1908, S. 493—496.

§ 17. Metrische affine Paare.

Dieser Fall entspricht dem von uns in § 12 ausgeschlossenen Fall $q = 0$. Aus der Formel $e_{(i)(j)|k} = 0$ schliessen wir, dass die asymptotiscen Linien de: Fläche s_0 mit den Linien von verschwindender Länge des metrischen Tensors zweiter Art zusammenfallen. Aber es ist bekannt, dass die Nullinien zu den geodätishchen gehören. Die asymptoti shchen Linien von s_0, jetzt geodätische, müssen gerade Linien sein. Ist $e \neq 0$, so besitzt die Fläche s_0 zwei Systeme von geradlinigen Erzeugenden, und ist daher eine Fläche zweiter Ordnung.

Wir wollen x_0 als Scheitelpunkt einer Normalen erster Art zur Fläche s_0 betrachten. Damit die Koordinaten kanonisch werden, genügt es, η durch $-\eta$ zu ersetzen. Dann haben wir in der Tat

$$\eta x_0 = -(x_0\xi - 1 - x_0\xi) = 1$$

und

$$(x_0)_i \eta = 0.$$

Wir wollen nun die Grundgleichung der ersten Art auffinden. Bezeichnen wir die Komponenten der Übertragung erster Art mit $\overset{0}{G}{}^k_{ij}$, so erhalten wir:

$$\overset{0}{G}{}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij} = \tilde{e}^{k\alpha} e_{(\alpha)(i)|j} = 0,$$

woraus folgt

$$y_{(i)|j} = \overset{0}{p}_{ij} y + e_{ij} x_0.$$

Die Beziehung bezeugt nun, dass die Geometrien erster und zweiter Art in diesem Falle zusammenfallen.

Anderseits gilt:

$$\overset{0}{p}_{ij} = \overset{0}{\varepsilon}_{ij} - \overset{0}{b}_{ij} \Omega,$$

nun ist aber

$$\Omega = x_0 \Xi = 1; \quad \overset{0}{b}_{ij} = e_{ij}; \quad \overset{0}{\varepsilon}_{ij} = \Xi_i y_j = 0,$$

woraus folgt

$$y_{(i)|j} = e_{ij} y + e_{ij} x_0.$$

Vergleichen wir dies mit den Grundformeln der zweiten Art, welche nach Änderung des Zeichen von η die Gestalt

$$\eta_{(i)|j} = e_{ij} \eta + e_{ij} \Xi$$

annehmen, und berücksichtigen wir, dass $(x_0)_i = 0$; $\Xi_i = 0$, so kommen wir zum Beschluss:

Es existiert eine korrelative Umformung, bei welcher die Fläche s_0 in sich selbst übergeht, indem Ξ in x_0 übergeht.

Da die Fläche s_0 eine Fläche zweiter Ordnung ist, so reduziert sich die erwähnte Korrelation offenbar auf eine Polartransformation in Bezug auf diese Fläche, wobei die unendlich ferne Ebene in den Punkt x_0 transformiert wird, welcher demzufolge das Zentrum der Fläche ist.

Sehen wir die Fläche s_0 als Masstabfläche an, indem wir auf diese Weise die metrisch-euklidische Geometrie im ganzen Raume feststellen [1], so wird der Vektor X, der den Punkt x_0 mit einem Punkte von s_0 verbindet, ein zur Ebene η perpendikulärer Einheitsvektor sein, der gleichzeitig auch zur Tangentialebene der Hauptfläche perpendikulär ist. Dies bedeutet aber, dass dieser Vektor den Einheitsvektor einer metrischen Normalen der Fläche darstellt.

Es sei $g'_{\alpha\beta} du^\alpha . u^\beta$ der Linienelement der Fläche, dass durch die Metrik des äussern Raumes bestimmt wird.

Da die metrische Normale jetzt mit derjenigen erster Art zusammenfällt, erhalten wir

$$g'_{ij|k} = 0$$

und folglich

$$g'_{ij} = g_{ij} \cdot \text{const.}$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass der konstante Faktor zufolge

$$w^2 = g$$

gleich Eins ist.

Auf diese Weise **fällt die Geometrie der metrischen affinen Konfiguration mit der klassischen Flächentheorie des euklidischen Raumes zusammen.**

Die Hauptformeln (66) unterscheiden sich nicht, bei Ersetzung von (V^r) durch Formel (58), welche zufolge $q = 0$ die Gestalt

$$K = \frac{b}{g}$$

annimmt, von den Formeln der gewöhnlichen Geometrie; was die Geometrie der zweiten Art betrifft, so fällt sie in diesem Falle mit der Geometrie der sphärischen Abbildung zusammen.

---

[1] Die Geometrie wird eine gewöhnlich euklidische, wenn die Masstabfläche ein wirkliches Ellipsoid ist; aber sie darf in andern Fällen auch pseudoeuklidisch werden.

РЕЛЯТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

А. П. Норден.

(Резюме.)

1. Пусть $x=x(u^1, u^2)$ и $X=X(u^1, u^2)$ точечные уравнения поверхностей s и S трехмерного проективного пространства, а $\xi=\xi(u^1, u^2)$ и $\Xi=\Xi(u^1, u^2)$ тангенциальные уравнения s и третьей поверхности Σ. Предположим, что конгруэнция прямых, соединяющих соответствующие точки x и X, сопряжена поверхности s, а конгруэнция прямых пересечения ξ и Ξ ей гармонична. Систему проективно-инвариантных свойств такой конфигурации назовем релятивной геометрией поверхности s по отношению к дополняющим поверхностям S и Σ.

Луч указанных выше конгруэнций будем называть нормалью первого и второго рода соответственно, а соответствующие их развертывающимся поверхностям сети линий поверхности s — сетями линий кривизны первого и второго рода.

Координаты x, ξ, X, Ξ всегда могут быть пронормированы так, чтобы

$$Sx\Xi=S\xi X=1;\quad S\Xi\frac{\partial x}{\partial u^i}=SX\frac{\partial \xi}{\partial u^i}=0. \tag{I}$$

Это каноническое нормирование определяется однозначно, и мы будем в дальнейшем считать его выполненным.

В разложениях

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\partial u^j}=G_{ij}^{\alpha}x_\alpha+p_{ij}x+b_{ij}X;\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^i\partial u^j}=\Gamma_{ij}^{\alpha}\xi_\alpha+\pi_{ij}\xi+b_{ij} \tag{II}$$

b_{ij} есть коэфициент квадратичной формы, нулевые линии которой суть асимптотические линии поверхности, а величины G_{ij}^k и Γ_{ij}^k определяют две геометрии аффинной связности — внутренние геометрии первого и второго рода.

Всякому вектору многообразия u^1, u^2 соответствует точка на нормали второго рода, проекция которой из X на ξ перемещается по прямой, соединяющей ее с этой точкой, при параллельном перенесении первого рода. Двойственное данному истолкование может быть дано и перенесению второго рода.

Геодезическая линия первого рода характеризуется тем, что ее соприкасающиеся плоскости проходят через соответствующие нормали первого рода, а характеристические точки развертывающейся поверхности касательных плоскостей вдоль геодезической второго рода лежат на нормалях второго рода. Обе внутренние геометрии суть геометрии типа Inhaltstreue, и всяким двум векторам в данной точке относятся инварианты — площадь первого и второго рода, сохраняющиеся при параллельном перенесении (соответствующего рода) этих векторов.

Вектор, сопряженный по направлению вектору, переносимому параллельно, сам переносится параллельно перенесением другого рода, откуда следует, например, что сопряженная геодезическая сеть есть чебышевская сеть (в смысле истолкования Bianchi) другого рода.

Можно установить условия интегрируемости уравнения (II) и показать, что задания величин b_{ij}, G^k_{ij} и $\Omega = Sx\Xi$ определяют конфигурацию до проективного преобразования.

2. Назовем конфигурацию — конфигурацией F, если отношение соответствующих площадей первого и второго рода постоянно.

Нормаль первого рода такой конфигурации есть проективная нормаль Фубини-Чеха поверхности s, если

$$b^{\alpha\beta} b^{\lambda\mu} b^{\sigma\rho} \nabla_\alpha b_{\lambda\sigma} \nabla_\beta b_{\mu\rho} = \text{const.},$$

где b^{ij} есть приведенный минор матрицы b_{ij}.

Перемещая точку X по нормали первого рода и вращая плоскость Ξ вокруг нормали второго рода, можно добиться — без изменения нормирования x и ξ — того, чтобы

$$b^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} = 0,$$

и получаемая таким образом конфигурация совпадает с той, которую Фубини и Чех кладут в основу проективной теории поверхностей.

Будем говорить, что конфигурация свелась к п а р е п о в е р х н о с т е й, если поверхности S и Σ совпадают своими соответствующими точками. Если асимптотические линии обеих поверхностей пары соответствуют и одна из внутренних геометрий есть геометрия Римана, то поверхность S представляет собою результат полярного преобразования поверхности s относительно некоторой поверхности второго порядка. Если принять последнюю за абсолют пространства постоянной кривизны, то канонические координаты x окажутся координатами Вейерштрасса и понятия нормали, линии кривизны, геометрии первого рода и т. д. совпадут с соответствующими понятиями теории поверхностей неевклидовой геометрии.

Конфигурация называется аффинной, если она свелась к паре поверхностей, а поверхность S суть плоскость.

Если принять эту плоскость за несобственную плоскость аффинной геометрии, то декартовы координаты точки x совпадут с ее каноническими координатами, а величина X может быть истолкована как вектор, направленный по нормали первого рода. Поверхность s_0, радиус-вектор точки которой будет совпадать с этим вектором, будет находиться в точечном соответствии с поверхностью s, с параллельностью касательных плоскостей в соответствующих точках.

Основные понятия релятивной геометрии поверхности в нашем смысле совпадут с соответствующими понятиями релятивной геометрии Мюллера поверхности s относительно s_0.

Геометрия первого рода есть в этом случае геометрия индуцированная на поверхности s псевдонормальным вектором, и геометрия второго рода индуцируется тем же вектором на поверхности s_0 и будет проективно-евклидовой. Геодезические линии второго рода будут линиями тени на s. Если аффинная конфигурация есть конфигурация F, то вектор X есть вектор аффинной нормали, площади первого и второго рода — аффинные площади и линии кривизны первого рода — аффинные линии кривизны в смысле Блашке.

Наконец, если геометрия первого рода аффинной конфигурации есть геометрия Римана, то поверхность s_0 есть поверхность второго порядка. Приняв ее за сферу, установим евклидову метрику во всем аффинном пространстве, и наша теория совпадет в этом случае с классической теорией поверхностей.

Формальные аппараты, применяемые во всех рассмотренных случаях специализаций, могут быть получены из аппарата, развиваемого для самого общего случая.