ÜBER PAARE KONJUGIERTER PARALLELÜBERTRAGUNGEN

A. Norden (Moskau)

Einleitung. Relative Geometrie der Flächen im projektiven Raume

Bevor ich mich an die ausführliche Behandlung der Theorie, der die vorliegende Arbeit gewidmet ist, wende, möchte ich den Inhalt und das Gebiet ihrer Anwendung andeuten; zu diesem Zweck will ich den Inhalt meiner früheren Arbeit, die denselben Titel trägt[1], wie das vorliegende Kapitel, in allgemeinen Zügen wiedergeben.

Nehmen wir an, dass s, S und Σ drei Flächen eines dreidimensionalen projektiven Raumes darstellen, dass x und ξ — respektive — homogene Koordinaten eines Punktes und der entsprechenden Tangentialebene der ersten dieser Flächen bilden, während X und Ξ einen Punkt der zweiten und eine Tangentialebene der dritten Fläche bedeuten.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die vier Gruppen oben erwähnter Grössen bei passender Normierung die Gleichungen:

$$Sx\Xi = SX\xi = 1; \quad Sx\frac{\partial \Xi}{\partial u^i} = S\xi\frac{\partial x}{\partial u^i} = 0, \tag{1}$$

befriedigen, besteht darin, dass die Kongruenz der die Punkte x und X verbindenden Geraden mit der Fläche konjugiert sei, während die Kongruenz der Schnittgeraden der Ebene ξ und Ξ mit derselben Fläche harmonisch sei.

Die dazu nötige Normierung wird hierbei durch die Angabe der Konfiguration der Fläche s und der Kongruenzen eindeutig bestimmt.

Die Grössen G_{ij}^k und Γ_{ij}^k in den Zerlegungen,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} &= G_{ij}^\alpha \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} + p_{ij} x + b_{ij} X, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^i \partial u^j} &= \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial u^\alpha} + \pi_{ij} \xi + b_{ij} \Xi \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

transformieren sich genau in derselben Weise, wie die Koeffizienten einer Parallelübertragung bei der Umänderung der krummlinigen Koordinaten u^1, u^2 und bestimmen dem entsprechend zwei Geometrien von affinem Zusammenhange (innere Geometrie der ersten und zweiten Art der Fläche s in bezug auf die ergänzenden Kongruenzen).

---

[1] A. Norden, Die relative Geometrie der Flächen im projektiven Raume.

Hierbei findet folgende Identität statt:

$$\partial_k b_{ij} - G^{\alpha}_{kj} b_{\alpha j} - \Gamma^{\alpha}_{kj} b_{i\alpha} = 0, \tag{3}$$

die einen Zusammenhang zwischen diesen Geometrien und dem Tensor, dessen Null-Linien mit den asymptotischen Linien der Fläche s zusammenfallen, bildet.

Passend gewählte Konfigurationen dieser Art von Flächen und von Kongruenzen der entsprechend bestimmten Normalen werden der Theorie der folgenden fünf Geometrien zugrunde gelegt:

1. Der projektiv-differenzialen Geometrie (Fubini-Čech).
2. Der relativen Geometrie des affinen Raumes (Müller).
3. Der affinen Geometrie (Blaschke).
4. Der nichteuklidischen Geometrie (Bianchi).
5. Der euklidischen Geometrie (klassische Geometrie).

Dies ist das Gebiet der Anwendung der Theorie, deren Entwicklung die vorliegende Arbeit gewidmet ist.

Sie umfasst alle Arten der Geometrie der Flächen, denen die eine oder die andere Spezialisierung des projektiven Raumes zugrunde liegt.

Die vorliegende Arbeit bezielt die simmultane Behandlung von zwei Parallelübertragungen, die durch die Grössen G^k_{ij} und Γ^k_{ij} bestimmt und vermittels des Tensors b_{ij} durch die Identität (3) verbunden sind. Diese Behandlung durchzuführen gelingt es, ohne im wesentlichen die Interpretation zu benutzen, welche den in Rede stehenden Begriffen in der erwähnten projektiven Konfiguration zukommt. Ein Hinweis auf diese Interpretation erweist sich in der Folge als notwendig, entweder bei der Erklärung des Ursprungs der benutzten Fachwörter oder bei der Illustrierung der erlangten Resultate. Im Übrigen entwickelt sich die Theorie selbständig und erfordert keine genauen Kenntnisse meiner Arbeit über die relative Geometrie.

§ 1. Gemischte Differenzierung

Wir nehmen an, es seien zwei symmetrische Parallelübertragungen in demselben Raume von n Dimensionen gegeben.

Die eine von ihnen sei durch die Grössen G^k_{ij} und die andere durch Γ^k_{ij} bestimmt. Wir werden dem entsprechend von einer Parallelübertragung und von einer kovarianten Differenzierung der ersten und zweiten Art reden. Indem wir die übliche Bezeichnung für die kovariante Ableitung der ersten Art

$$\nabla_i a^k_j = a^k_{j/i} = \partial_i a^k_j - G^{\alpha}_{ij} a^k_{\alpha} + G^k_{i\alpha} a^{\alpha}_j \tag{1$_1$}$$

bewahren, fügen wir die Bezeichnung

$$\nabla_i a^{(k)}_{(j)} = a^{(k)}_{(j)/i} = \partial_i a^k_j - \Gamma^{\alpha}_{ij} a^k_{\alpha} + \Gamma^k_{i\alpha} a^{\alpha}_j \tag{2$_1$}$$

hinzu, um die Differenzierung der zweiten Art anzugeben.

Neben diesen zwei Operationen fügen wir den Begriff der „gemischten" kovarianten Differenzierung für Grössen, deren Rang höher als der erste ist, ein. Diese Operation bestimmen wir durch folgende Identität;

$$\nabla_i a^{k\,(n)}_{j\,(m)} = \partial_i a^{kn}_{jm} - G^{\alpha}_{ij} a^{kn}_{\alpha m} + G^{k}_{i\alpha} a^{\alpha n}_{jm} - \Gamma^{\alpha}_{im} a^{kn}_{j\alpha} + \Gamma^{n}_{i\alpha} a^{k\alpha}_{jm}. \tag{3$_1$}$$

Somit wird die gemischte Derivation nach den üblichen Regeln ausgeführt; nur sind in den Summanden, in denen die Indizes in Klammern eingeschlossen sind, die Grössen G^k_{ij} durch Γ^k_{ij} zu ersetzen. Die Grösse, die man auf diese Weise aus einem Tensor bekommt, wird wieder ein Tensor sein; dies lässt sich leicht einsehen, wenn man den tensoriellen Charakter der Differenz $\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij}$ in Betracht nimmt und sich auf diese Weise überzeugt, dass die gemischte Derivierte von einer gewöhnlichen kovarianten Ableitung, die in bezug, z. B. auf G^k_{ij} ausgeführt ist, sich durch einen Tensor unterscheidet.

Auch kann man sich leicht von dem linearen Charakter der Operation überzeugen, so dass

$$\nabla(a^{(j)}_i + b^{(j)}_i) = \nabla a^{(j)}_i + \nabla b^{(j)}_i. \tag{4$_1$}$$

Die Differenzierung der Produkte geschieht nach den üblichen Regeln:

$$\nabla(\lambda a_{i(j)}) = \lambda \nabla a_{i(j)} + d\lambda\, a_{ij}, \tag{5$_1$}$$

$$\nabla(a_i b_{(j)}) = b_j \nabla a_i + a_i \nabla b_{(j)}. \tag{6$_1$}$$

Es ist besonders die Regel der Differenzierung der Ausdrücke zu beachten, die durch Faltung verschiedener Grössen, entstanden sind:

$$\nabla_i a_{j\alpha} b^{\alpha} = b^{\alpha} (\partial_i a_{j\alpha} - G^{\beta}_{ij} a_{\beta\alpha}) + a_{j\alpha} \partial_i b^{\alpha} - \Gamma^{\beta}_{i\alpha} a_{j\beta} b^{\alpha} + \Gamma^{\beta}_{i\alpha} a_{j\beta} b^{\alpha}.$$

Indem wir die hinzugefügten Glieder verteilen und in entsprechender Weise die Summationsindizes umtauschen, erhalten wir:

$$\nabla_i a_{j\alpha} b^{\alpha} = b^{\alpha} \nabla_i a_{j\,(\alpha)} + a_{j\alpha} \nabla_i b^{(\alpha)}. \tag{7$_1$}$$

§ 2. Konjugierte Übertragungen

Wir betrachten zwei symmetrische Parallelübertragungen, die in derselben Mannigfaltigkeit angegeben sind, als konjugiert, wenn es einen symmetrischen Tensor zweiten Ranges mit nicht verschwindender Diskriminante gibt, dessen gemischte kovariante Ableitung, die in bezug auf die beiden Übertragungen ausgeführt ist, identisch verschwindet.

Wenn also die Grössen G^k_{ij} die Übertragung der ersten Art bestimmen, und die Γ^k_{ij} der Übertragung der zweiten Art entsprechen, so besteht die

Bedingung des konjugierten Zusammenhangs dieser Übertragungen in der Existenz eines solchen Tensors b_{ij}, dass

$$\text{Det}, \; |b_{ij}| \neq 0$$

ist, wobei aber

$$b_{i(j)|k} = 0 \tag{1$_2$}$$

sein muss. Eine Bedingung des konjugierten Zusammenhangs kann auch in bezug auf einen kontravarianten Tensor formuliert werden, sie lautet nämlich:

$$a^{ij|k} = 0,$$

was eben der Beziehung (1) vollkommen äquivalent ist.

In der Tat, wir nehmen als Komponenten eines neuen Tensors die reduzierten Minoren des Tensors b_{ij}:

$$a^{ij} = \breve{b}^{ij},$$

differenzieren wir dann die Identität:

$$\breve{b}^{i\alpha} b_{\alpha j} = \delta^i_j,$$

und benutzen wir dabei die Formel $(7)_1$, so erhalten wir:

$$\nabla_k (\breve{b}^{i\alpha} b_{\alpha j}) = \breve{b}^{i\alpha} b_{j(\alpha)|k} + b_{j\alpha} b^{i(\alpha)|k} = 0,$$

woher

$$\breve{b}^{ij|k} = 0. \tag{2$_2$}$$

Wir werden den Tensor b_{ij}, der der Bedingung $(1)_2$ genügt, den Grundtensor des Paares konjugierter Übertragungen nennen.

Indem wir (4) mit der Identität (3) der Einleitung vergleichen, sehen wir, dass die inneren Geometrien der ersten und zweiten Art die durch die oben beschriebene Konfiguration bestimmt werden, konjugiert sind. Insbesondere bilden z. B. die innere Geometrie einer Fläche und die Geometrie ihrer sphärischen Abbildung in der klassischen Theorie ein Paar konjugierter Übertragungen.

Es ist zu bemerken, dass die Theorie der konjugierten Übertragungen anderseits gewissermassen eine Verallgemeinerung der metrischen Geometrie im Sinne Riemanns darstellt. In der Tat, wenn $G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ ist, so geht die Bedingung (1) in

$$\nabla_i b_{jk} = 0$$

über und b_{ij} stimmt mit dem fundamentalen metrischen Tensor der Riemannschen Geometrie überein, deren Parallelübertragung durch Symbole von Christoffel dieses Tensors, das heisst durch die Grössen G^k_{ij} bestimmt werden.

Auf diese Weise besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Übertragung mit sich selbst konjugiert sei, darin, dass sie eine Riemannsche Geometrie bestimmt.

§ 3. Asymptotische und konjugierte Richtungen

Indem wir weitere Anwendungen im Auge haben, führen wir folgende Termine ein. Wir werden die Null-Linien des Grundtensors des Paares konjugierter Übertragungen, d. h. Linien, die durch die Gleichung:

$$b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0, \tag*{$(1)_3$}$$

bestimmt sind, asymptotische Linien nennen.

Zwei Richtungen, die von den Vektoren v^i und w^i bestimmt sind, wollen wir konjugiert nennen, wenn sie durch ein Paar asymptotischer Richtungen harmonisch getrennt werden, so dass

$$b_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = 0 \tag*{$(2)_3$}$$

ist.

Wir wollen eine wichtige differenzielle Folgerung aus dieser Formel entwickeln, die für zwei Felder konjugierter Richtungen gilt.

Wir wollen dieselbe differenzieren, indem wir die Regel $(7)_1$ und die Grundidentität $(1)_2$ in Betracht ziehen; wir erhalten:

$$d(b_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta) = \nabla b_{\alpha(\beta)} v^\alpha w^\beta + b_{\alpha\beta} \nabla v^\alpha w^\beta + b_{\alpha\beta} v^\alpha \nabla w^{(\beta)},$$

woher

$$b_{\alpha\beta} \nabla v^\alpha w^\beta + b_{\alpha\beta} v^\alpha \nabla w^{(\beta)} = 0. \tag*{$(3)_3$}$$

Die vorigen Definitionen und Folgerungen galten für eine beliebige Zahl von Dimensionen. Im weiteren, werden wir uns ausschliesslich auf ein Gebiet von zwei Dimensionen beschränken, teilweise, weil wir dabei verschiedene Anwendungen berücksichtigen, teilweise auch deshalb, weil die Folgerungen in diesem Fall abgeschlossen sind und eine vollkommenere geometrische Interpretation zulassen.

Nehmen wir nun an, dass der Vektor v^i parallel übertragen sei, dann ist

$$\nabla v^i = \lambda v^i.$$

Wenn w^i der Vektor ist, dessen Richtung der Richtung von v^i konjugiert ist, so besteht die Gleichung $b_{\alpha\beta} \nabla v^\alpha w^\beta = \lambda b_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = 0$ und die Formel $(3)_3$ liefert:

$$b_{\alpha\beta} v^\alpha \nabla w^\beta = 0.$$

Vergleicht man die letzte Gleichung mit der Bedingung des konjugierten Zusammenhangs, so bekommen wir

$$\nabla w^{(i)} = \lambda w^i.$$

Daher erhalten wir die Grundeigenschaft der konjugierten Übertragungen:

Wenn irgendeine Richtung eine Parallelübertragung erfährt, so wird die ihr konjugierte Richtung ihrerseits durch die Übertragung, die der ersten konjugiert ist, parallel übertragen

Wir wollen einige unmittelbare Folgerungen dieses Satzes angeben.

1. Damit eine Linie, in bezug auf eine Übertragung geodätisch sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Richtung, die ihrer Tangente konjugiert ist, bei der Übertragung, welche der ersten konjugiert ist, auch parallel übertragen werde.

2. Wenn die Linien eines konjugierten Netzes in bezug auf irgendeiner Übertragung geodätisch sind, so werden die Richtungen der Tangenten zu den Linien einer Schar, längs den Linien einer anderen Schar, vermittels einer Übertragung, die konjugiert der gegebenen ist, parallel übertragen.

Indem wir den Namen des Tschebyschev-Netzes für ein Netz, bei dem die Richtungen der Tangenten zu den Linien einer Schar, längs den Linien der anderen Schar, parallel übertragen sind, bewahren, erhalten wir eine neue Formulierung der Folgerung 2.

a) Ein konjugiertes geodätisches Netz ist ein Tschebyschev-Netz der konjugierten Übertragung, und umgekehrt

b) ein konjugiertes Tschebyschev-Netz ist ein geodätisches Netz der konjugierten Übertragung.

3. Eine asymptotische Linie, die zugleich auch eine Geodätische irgendeiner Übertragung sei, ist zugleich eine Geodätische der konjugierten Übertragung.

4. Wenn ein asymptotisches Netz zugleich auch ein Tschebyschev-Netz der einen Art ist, so ist es ein Tschebyschev-Netz auch der anderen Art.

§ 4. Mittlere Metrik. Tensor L_{ij}

Wir wollen die Halbsumme der kovarianten Differenziale der ersten und zweiten Art desselben Vektors nach irgendeiner Richtung betrachten:

$$\frac{1}{2}\left(\nabla v^i + \nabla v^{(i)}\right) = dv^i + \frac{1}{2}\left(G^i_{\alpha\beta} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\right) du^\alpha v^\beta.$$

Der invariante Charakter dieses Ausdrucks zeigt, dass die Grössen

$$z_{ij}^{k} = \frac{1}{2}(G_{ij}^{k} + \Gamma_{ij}^{k}) \qquad (1)_4$$

irgendeine neue Parallelübertragung bestimmen, welche wir als *mittlere* nennen. Wollen wir die kovariante Ableitung des Grundtensors des Paares in bezug auf diese Übertragung berechnen

$$\partial_i b_{jk} - z_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} - z_{ik}^{\alpha} b_{j\alpha} = \frac{1}{2}(\partial_i b_{jk} + \partial_i b_{jk} - G_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} - \Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} - G_{ik}^{\alpha} b_{j\alpha} - \Gamma_{ik}^{\alpha} b_{j\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2}(b_{k(j)|i} + b_{(k)j|i}) = 0.$$

Daher folgt, dass

$$z_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} \qquad (2)_4$$

ist, wo $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ das Symbol von Christoffel des Tensors b_{ij} ist.

Also: *die mittlere Übetragung bestimmt eine Riemannsche Geometrie, deren metrischer Grundtensor mit dem Grundtensor des Paares übereinstimmt.*

Der Inhalt eines Parallelogrammes, der durch die Vektoren v^i und w^j gebildet wird, wird in der mittleren Metrik durch den Ausdruck

$$L_{\alpha\beta} v^{\alpha} w^{\beta}$$

bestimmt, wo $L_{\alpha\beta}$ ein schiefsymmetrischer Tensor mit einer Matrix

$$\begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{|b|} \\ -\sqrt{|b|} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (3)_4$$

$$b = \operatorname{Det} |b_{ij}|$$

ist.

Wir werden diesen Tensor sowohl *wie seinen reziproken Tensor* L^{ij}, der durch die Identität

$$L^{i\alpha} L_{\alpha j} = \delta_j^i \qquad (4)_4$$

bestimmt ist, benutzen, um die Indizes zu „heben" und „senken", indem wir diese Operation folgendermassen bestimmen:

$$L_{i\alpha} A^{\alpha} = A_i; \quad L^{i\alpha} A_{\alpha} = A^i. \qquad (5)_4$$

Die Antisymmetrie des Tensors L_{ij} bedingt die folgende Wechselbeziehung:

$$A_{\alpha} B^{\alpha} = - A^{\alpha} B_{\alpha}. \qquad (6)_4$$

Die Bedingung *der Symmetrie* irgendeines Tensors, in bezug auf seine beiden Indizes, wird in diesen Bezeichnungen durch

$$a_{\cdot\alpha}^{\alpha\cdot} = 0 \qquad (7)_4$$

angegeben. Die Bedingung der Kollinearität von zwei Vektoren lautet:

$$v^\alpha w_\alpha = 0. \tag{8}_4$$

Zieht man in Betracht, dass in einem binären Gebiet jeder antisymmetrische Tensor, wie auch der Tensor L_{ij}, durch eine einzige Zahl bestimmt wird, so erhalten wir den allgemeinen Ausdruck eines solchen Tensors

$$a_{ij} = \lambda L_{ij}; \quad a^{ij} = \mu L^{ij}. \tag{9}_4$$

Wenn irgendein Tensor eines höheren Ranges antisymmetrisch, in Bezug auf die Indizes i und j ist, so bekommen wir, indem wir den Tensor nach allen übrigen Indizes mit einer Reihe willkürlicher Vektoren falten:

$$a_{ij\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = \lambda L_{ij}.$$

Falten wir die erhaltene Gleichung mit L_{ij}, so bekommen wir:

$$a^{\sigma}_{.\sigma\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = 2\lambda,$$

woher infolge der Willkürlichkeit der Vektoren

$$a_{ijkl} = \frac{1}{2} L_{ij} a^{\sigma}_{.\sigma kl} \tag{10}_4$$

ist. Insbesondere ist

$$a_{[ij]kl} = a_{ijkl} - a_{jikl} = L_{ij} a^{\sigma}_{.\sigma kl}. \tag{11}_4$$

Wenn a_{ij} ein symmetrischer Tensor ist, so ist der Tensor

$$a_{i\alpha} a^{\alpha}_{.j} = - a_{i.}^{.\alpha} a_{\alpha j}$$

antisimmetrisch, woher

$$a_{i\alpha} a^{\alpha}_{.j} = \lambda L_{ij}.$$

Falten wir beide Seiten mit dem reduzierten Minoren des Tensors a_{ij} $(\tilde{a}^{ki})$, so erhalten wir:

$$a^k_j = \lambda \tilde{a}^k_j$$

oder

$$a^{ij} = \lambda \tilde{a}^{ij}, \tag{12}_4$$

Wir wollen die Diskriminante beider Seiten der Gleichung berechnen:

$$\mathrm{Det}\,|L^{i\alpha} L^{j\beta} a_{\alpha\beta}| = (\mathrm{Det}\,|L^{ij}|)^2 \cdot \mathrm{Det}\,|a_{ij}| = \lambda^2\, \mathrm{Det}\,|\tilde{a}^{ij}| = \lambda^2 (\mathrm{Det}\,|a_{ij}|)^{-1},$$

woher

$$\lambda = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{\mathrm{Det}\,|a_{ij}|}{\mathrm{Det}\,|b_{ij}|}\right)^2. \tag{13}_4$$

Falten wir schliesslich beide Seiten der Gleichung $(12)_4$ mit a_{ij}, so erhalten wir:

$$a^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = 2\,\frac{a}{b}\,. \tag*{$(14)_4$}$$

Wendet man die Formeln $(12)_4$ und $(14)_4$ zum Tensor b_{ij} an, so erhalten wir wichtige Wechselbeziehungen:

$$b^{ij} = \tilde{b}^{ij} \tag*{$(15)_4$}$$

und

$$b^{\alpha\beta} \tilde{b}_{\alpha\beta} = 2. \tag*{$(16)_4$}$$

Bemerken wir schliesslich, dass die Bedingung des **konjugierten Zusammenhangs** der Vektoren v^i und w^j:

$$b_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = 0,$$

gemäss $(8)_4$, als

$$w^i = \lambda b^{i\alpha} v_\alpha \tag*{$(17)_4$}$$

umschrieben werden kann.

§ 5. Tensor $S^i_{\cdot,jk}$.

Um ein Paar konjugierter Übertragungen mit Hilfe von Tensoren zu bestimmen, genügt es ausser der Grösse b_{ij} noch den Tensor

$$S^i_{\cdot,jk} = \Gamma^i_{jk} - G^i_{jk} \tag*{$(1)_5$}$$

einzuführen.

In der Tat, die Parameter der Differenzierung werden auf folgende Weise bestimmt:

$$G^k_{ij} = z^k_{ij} - \frac{1}{2} S^k_{\cdot,ij}; \quad \Gamma^k_{ij} = z^k_{ij} + \frac{1}{2} S^k_{\cdot,ij}. \tag*{$(2)_5$}$$

Differenziert man den Grundtensor, so bekommt man:

$$\begin{aligned} b_{ij,k} &= \partial_k b_{ij} - G^\alpha_{ki} b_{\alpha j} - G^\alpha_{kj} b_{i\alpha} = \\ &= \partial_k b_{ij} - G^\alpha_{ki} b_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{kj} b_{i\alpha} + S^\alpha_{\cdot,kj} b_{i\alpha} = b_{i\,(j)\,k} + S^\alpha_{\cdot,kj} b_{i\alpha}, \end{aligned}$$

woher

ist, und analog

$$\left.\begin{aligned} b_{ij|k} &= b_{i\alpha} S^\alpha_{\cdot,jk} \\ b_{(i)\,(j)|k} &= -\,b_{i\alpha} S^\alpha_{\cdot,jk}. \end{aligned}\right\} \tag*{$(3)_5$}$$

Hieraus folgt, erstens die Identität der Tensoren:

$$b_{(i)\,(j)|k} = -\,b_{ij|k} = -\,b_{ijk}; \tag*{$(4)_5$}$$

und zweitens die Symmetrie dieses Tensors b_{ijk} **in bezug auf alle drei Indizes**, so dass der Tensor b_{ij} den **Gleichungen von Codazzi**, in bezug auf beide Übertragungen des Paares genügt:

$$b_{i\alpha|\cdot}^{\alpha} = 0. \tag{5$_5$}$$

Faltet man beide Seiten der Gleichung $(3)_5$ nach den Indizes i und j, so erhält man

$$b^{\alpha\beta} S_{\alpha,\,\beta i} = 0. \tag{6$_5$}$$

Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Tensoren b_{ij} und $S^{k}_{\cdot,ij}$, die symmetrisch in bezug auf die Indizes i und j sind, ein Paar konjugierter Übertragungen bestimmen sollen. Das letzte Gleichungssystem gestattet im allgemeinen die asymptotischen Linien zu bestimmen, sobald nur der Tensor $S^{k}_{\cdot ij}$ angegeben ist. In der Tat, betrachten wir den antisymmetrischen Tensor

$$b^{\alpha\beta} b_{i\alpha\lambda} b_{j\beta\cdot}^{\;\;\lambda} = - b^{\alpha\beta} b_{i\alpha\cdot}^{\;\;\lambda} b_{j\beta\lambda}.$$

Gemäss $(12)_4$ gilt für ihn

$$b^{\alpha\beta} b_{i\alpha\lambda} b_{j\beta\cdot}^{\;\;\lambda} = \lambda L_{ij},$$

oder nach der Faltung mit b^{j}_{k}

$$b^{\alpha\beta} b_{i\alpha\lambda} b^{\alpha}_{k} b_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} = \lambda b_{ik}.$$

Ziehen wir $(3)_5$ in Betracht, erhalten wir:

$$\lambda b_{ij} = S_{\beta,\lambda i} S_{k,\cdot\cdot}^{\cdot\,\beta\lambda}. \tag{7$_5$}$$

Somit wird b_{ij} auf einen Faktor bestimmt, wenn

$$S_{\beta,\lambda i} S_{k,\cdot\cdot}^{\cdot\,\beta\lambda} \neq 0 \tag{8$_5$}$$

ist. Fügt man die Invariante

$$J = \frac{1}{8} b^{\alpha\beta} S_{\lambda,\mu\alpha} S_{\beta,\cdot\cdot}^{\cdot\,\lambda\mu} = \frac{1}{8}\, b^{\alpha\beta} b_{\alpha\lambda\mu} b_{\beta\cdot\cdot}^{\cdot\lambda\mu} \tag{9$_5$}$$

ein, so erhält man aus $(7)_5$

$$4 J b_{ij} = S_{\alpha,\beta i} S_{j,\cdot\cdot}^{\cdot\,\alpha\beta}. \tag{10$_5$}$$

Wenn $J = 0$ ist, so bestimmt die Angabe des Tensors S^{i}_{jk} die asymptotischen Linien nicht. Wir wollen die Struktur dieses Tensors in diesem Falle bestimmen. Der Grund der Unbestimmtbarkeit der asymptotischen Linien liegt offenbar darin, dass eine der beiden Gleichungen des Systems $(6)_5$ eine Folge der anderen ist, dies ist aber nur dann möglich, wenn

$$S_{(ij)\,k} = a_{ij} \lambda_k$$

ist, wo a_{ij} der Bedingung

$$b^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}=0$$

genügt, und somit irgendein konjugiertes Netz durch seine Null-Linien bestimmt.

Daher haben wir für den gesuchten Tensor

$$S_{i,\,jk}=a_{ij}\lambda_k+L_{ij}\mu_k.$$

Ziehen wir die Symmetrie des Tensors der linken Seite in bezug auf die letzten beiden Indizes in Betracht, so erhalten wir:

$$S_{i,\,\cdot\,\alpha\cdot}^{\;\;\;\;\alpha}=a_{i\alpha}\lambda^\alpha+\mu_i,$$

so dass

$$S_{i,\,jk}=a_{ij}\lambda_k+L_{ij}a_i^\alpha\lambda_\alpha$$

ist, oder indem wir auf das letzte Glied die Identität $(10)_4$ anwenden:

$$S_{i,\,jk}=a_{ij}\lambda_k-a_{jk}\lambda_i+a_{ki}\lambda_j, \tag{11}$$

d i e s i s t d i e n o t w e n d i g e u n d h i n r e i c h e n d e B e d i n g u n g d a z u, d a s s d i e G l e i c h u n g

$$J=0 \tag{12$_5$}$$

b e s t e h e.

§ 6. Kovariante Differenz

Betrachten wir die Änderung des Vektors v^i, der längs der Kurve $u^i=$ $=u^i(t)$ angegeben sei. Führen wir den Vektor

$$w^i=\frac{du^i}{dt}$$

ein, der zu der betrachtenden Kurve tangential ist, und wollen wir den Vektor

$$\Delta v^i=\frac{\overset{(t)}{\nabla} v^{(i)}}{dt}-\frac{\nabla v^i}{dt} \tag{1$_6$}$$

betrachten, den wir d i e k o v a r i a n t e D i f f e r e n z d e s V e k t o r s v^i i m V e r h ä l t n i s z u d e r K u r v e $u^i=u^i(t)$ n e n n e n.

Zieht man die Ausdrücke der kovarianten Ableitungen und die Bedeutung des Tensors $S^i_{\cdot\cdot\,jk}$ in Betracht, erhält man, dass

$$\Delta v^i=S^i_{\cdot\cdot\,\alpha\beta}v^\alpha w^\beta \tag{2$_6$}$$

ist, woraus folgt, dass d i e R i c h t u n g d e r k o v a r i a n t e n D i f f e r e n z d e s V e k t o r s v^i, i n b e z u g a u f d i e K u r v e $u^i=u^i(t)$ n u r v o n d e r R i c h t u n g d i e s e s V e k t o r s u n d v o n d e r R i c h t u n g d e r

Kurventangente abhängig ist. Indem wir den Vektor Δv^i schlechthin kovariante Differenz nennen, wenn $w^i = v^i$ ist, so dass

$$\Delta v^i = S^{\,i}_{\cdot\,\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \tag{3$_6$}$$

ist, erhalten wir den Satz: die kovariante Differenz eines Vektors, ist nur von der Richtung dieses Vektors abhängig.

Wir werden die Null-Linien des Tensors $S_{i,\,jk}$ S-Linien nennen. Die Bedingung

$$S_{\alpha,\,\beta\gamma} v^\alpha v^\beta v^\gamma = -v_\alpha \Delta v^\alpha = 0 \tag{4$_6$}$$

bezeugt, dass eine kovariante Differenz eines Vektors die Richtung des Vektors selbst dann und nur dann besitzt, wenn er zu S tangential ist.

Nennen wir die Null-Linien des Tensors b_{ijk} B-Linien und ziehen wir die Beziehung $(3)_5$ in Betracht, so erhalten wir:

$$b_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha v^\beta v^\gamma = b_{\alpha\lambda} v^\alpha \Delta v^\lambda = 0. \tag{5$_6$}$$

Infolgedessen: die Richtung der kovarianten Differenz ist der Richtung des Vektors selbst dann und nur dann konjugiert, wenn er tangential zur B-Linie ist.

Wenn irgendeine Linie, deren Tangentialvektor v^i ist,

a) eine geodätische Linie der ersten Art darstellt, so ist

$$\nabla v^i = \lambda v^i;$$

b) wenn sie eine geodätische Linie der zweiten Art ist, so ist

$$\nabla v^{(i)} = \mu v^i;$$

c) wenn sie eine geodätische Linie mittleren Metrik ist, so ist

$$\nabla v^{(i)} + \nabla v^i = \nu v^i;$$

d) wenn sie eine Linie S ist, so ist

$$\nabla v^{(i)} - \nabla v^i = n v^i.$$

Aus dem Vergleich dieser Bedingungen erhalten wir: wenn in bezug auf irgendeine Linie zwei von den vier erwähnten Sätzen gelten, so bestehen alle vier.

Indem wir eine Linie dieser Art eine dreifache geodätische Linie nennen, sehen wir Folgendes ein: jede dreifache geodätische Linie ist eine S-Linie.

Wir wollen zeigen: wenn irgendein Paar konjugierter Übertragungen mehr als drei Systeme dreifacher geodätischer Linien zulässt, so stimmen die Geometrien der ersten und zweiten Art überein.

Bei unserer Voraussetzung ist

$$\frac{1}{2} S_{(i,\,jk)} = S_{i,\,jk} + S_{j,\,ki} + S_{k,\,ij} = 0, \tag{A}$$

was der Gleichung

$$S_{(i,\,j)\,k} + \frac{1}{2} S_{k,\,(ij)} = 0$$

äquivalent ist, woher

$$2S_{i,\,jk} + S_{k,\,ij} = 3\lambda_k L_{ij} \tag{B}$$

folgt. Addieren wir die Identitäten (A) und (B), subtrahieren wir aus ihnen die Gleichung

$$2S_{k,\,ij} + S_{j,\,ki} = 3\lambda_j L_{ki}, \tag{C}$$

welche aus (B) durch eine zyklische Permutation der Indizes hervorgeht, so erhalten wir:

$$S_{i,\,jk} = L_{i\,(j}\lambda_{k)}. \tag{D}$$

Ziehen wir $(6)_5$ in Betracht, erhalten wir aus (D):

$$b^{\alpha\beta} S_{\alpha,\,\beta k} = \lambda_k = 0,$$

woher

$$S_{i,\,jk} = 0$$

ist, was eben zu beweisen war.

Es gibt Paare von Übertragungen, die eine, zwei oder drei Scharen von dreifach geodätischen Linien besitzen; im folgenden werden Beispiele aller dieser Fälle angegeben.

Wir wollen jetzt einige Folgerungen in bezug auf die asymptotischen Linien ziehen. Vor allem bemerken wir, dass eine asymptotische Linie, die zugleich eine S-Linie ist, gleichzeitig eine B-Linie ist, da sie immer sich selbst konjugiert ist; auch die Umkehrung des Satzes trifft zu. Anderseits, da sie, als Null-Linie des Tensors b_{ij} isotrop ist, ist sie offenbar auch eine geodätische Linie der mittleren Metrik.

Ziehen wir diese zwei Bemerkungen in Betracht, so erhalten wir Folgendes: *wenn in bezug auf eine asymptotiche Linie auch nur einer der folgenden vier Sätze besteht,*

1) sie ist eine Linie S,

2) sie ist eine Linie B,

3) sie ist eine geodätische Linie erster Art,

4) sie ist eine geodätische Linie zweiter Art,

so gelten auch die drei übrigen.

Eine asymptotische Linie, die diese Eigenschaften besitzt, werden wir eine *gerade Linie* eines Paares konjugierter Übertragungen nennen. Aus dieser Definition folgt, dass kein Paar konjugierter Übertragungen mehr als zwei Systeme erader Linien besitzen kann. Wenn wenigstens ein solches System existiert, so wollen wir das Paar linear und im Falle der Existenz von zwei verschiedenen Systeme — bilinear nennen.

§ 7. Die Theorie der Krümmung

Indem wir uns zur Theorie der Krümmung eines Paares von Übertragungen wenden, wollen wir einige Formeln aufstellen, die für eine beliebige Geometrie von affinem Zusammenhange im binären Gebiete gelten.

Da der Krümmungstensor $R_{ijk}{}^{l}$ in bezug auf die Indizes i und j alternierend ist, dürfen wir ihn in der Form

$$R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot l} = L_{ij} R_{k\cdot}^{\cdot l} \qquad (1)_7$$

darstellen, wo

$$R_{jk} = -R_{\alpha jk}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \qquad (2)_7$$

der Ricci-Tensor der gegebenen Übertragung ist.

Die bekannte Formel

$$v^{l}_{\cdot|[jk]} = R_{jk\alpha}^{\cdot\cdot\cdot l} v^{\alpha}$$

dürfen wir auf Grund von $(11)_4$ und $(2)_7$ in der Form $v^{l}_{\cdot|\alpha\cdot}{}^{\alpha} = R_{\alpha\cdot}^{\cdot l} v^{\alpha}$ darstellen oder noch allgemeiner für Grössen beliebigen Ranges

$$A^{i\cdot\cdot\alpha}_{\cdot jk|\alpha} = R_{\alpha\cdot}^{\cdot i} A^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot jk} - R_{j\cdot}^{\cdot\alpha} A^{i\cdot\cdot}_{\cdot\alpha k} - R_{k\cdot}^{\cdot\alpha} A^{i\cdot\cdot}_{\cdot j\alpha}. \qquad (3)_7$$

Die Änderung, die der Vektor v^i bei einer Parallelverschiebung um ein unendlich kleines geschlossenes Gebiet erfährt, wird, wie bekannt, durch

$$Dv^i = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{i} du^{\alpha} \delta u^{\beta} v^{\gamma}$$

ausgedrückt oder in unseren Bezeichnungen

$$Dv^i = \frac{1}{2} L_{\alpha\beta} du^{\alpha} \delta v^{\beta} R_{\gamma\cdot}^{\cdot i} v^{\gamma},$$

oder noch kürzer

$$Dv^i = \lambda R_{\gamma\cdot}^{\cdot i} v^{\gamma}.$$

Durch den Tensor $R_{j\cdot}^{\cdot i}$ wird somit eine Reziprozität der Richtungen der Vektoren derart hergestellt, dass der Richtung eines Vektors eine bestimmte Richtung der Änderung entspricht, die er beim Umlauf eines unendlich kleinen geschlossenen Gebiets erfährt. Insbesondere wird eine Null-Richtung der Form $R_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}$ dadurch charakterisiert, dass der zugehörige Vektor beim erwähnten Umlauf seine Richtung bewährt.

Wir werden diese Linien **absolute Linien der Übertragung** nennen. Nun wenden wir uns zur gemischten Differenzierung eines Tensors. Vor allem bemerken wir, dass der Ausdruck

$$\nabla_{[i}a_{j]} \ldots = \partial_{[i}a_{j]} \ldots - G_{[ij]}^{\alpha} a_{\alpha} \ldots + \ldots$$

mit

$$\nabla_{[i}a_{(j)]} \ldots = \partial_{[i}a_{j]} \ldots - \Gamma_{[ij]}^{\alpha} a_{\alpha} \ldots + \ldots$$

zusammenfällt, wenn G^{i}_{jk} und Γ^{i}_{jk} in bezug auf die Indizes j und k symmetrich sind. Somit ist

$$\nabla^{\alpha} a_{\alpha} \ldots = \nabla^{\alpha} a_{(\alpha)} \ldots \tag*{(4)$_7$}$$

Wir wollen jetzt eine Verallgemeinerung der Formel (3)$_7$ in Betreff auf einen symmetrischen kovarianten Tensor angeben, deren er im Falle einer gemischten Differenzierung fähig ist.

Wir suchen den Ausdruck der Grösse $a_{i(j)|\alpha.}^{\;\;\;\;\;\cdot\alpha}$ durch die Ricci-Tensoren beider Übertragungen aus, die wir weiterhin mit $R_{i.}^{\cdot j}$ und $\rho_{i.}^{\cdot j}$ bezeichnen. Zu diesem Zweck zerlegen wir a_{ij} in ein Produkt von zwei idealen Faktoren $a_i a_j$ und indem wir den Ausdruck

$$a_{i(j)|k} = a_{i|k} a_j + a_i a_{(j)|k}$$

differenzieren und das Resultat darauf alternieren, erhalten wir

$$a_{i(j)|\alpha.}^{\;\;\;\;\;\cdot\alpha} = a_{i|\alpha.}^{\;\;\;\cdot\alpha} a_j + a_{i|\alpha} a_{(j)|}^{\;\;\;\alpha} + a_{i|}^{\;\alpha} a_{(j).|\alpha} + a_i a_{(j)|\alpha.}^{\;\;\;\;\cdot\alpha}.$$

Die zwei mittleren Glieder unterscheiden sich von einander nur durch ihr Vorzeichen; indem wir somit diese Glieder entfernen und auf die übrigen die Formel (3)$_7$ anwenden, erhalten wir:

$$a_{i(j)|\alpha.}^{\;\;\;\;\;\cdot\alpha} = - R_{i.}^{\cdot\alpha} a_{\alpha j} - \rho_{j.}^{\cdot\alpha} a_{i\alpha}. \tag*{(5)$_7$}$$

Nun wenden wir die Formel (5)$_7$ auf den Grundtensor eines Paares konjugierter Parallelübertragungen an. Da schon bei der ersten gemischten Differenzierung seine Ableitung verschwindet, so erhalten wir:

$$R_{j}^{\cdot\alpha} b_{i\alpha} + \rho_{i}^{\cdot\alpha} b_{\alpha j} = 0. \tag*{(6)$_7$}$$

Indem wir die linke Seite dieser Gleichung einmal symmetrieren und das andere Mal alternieren, erhalten wir zwei Systeme von Bedingungen, die zusammengenommen dieser Gleichung äquivalent sind.

Führen wir zuerst die Symmetrierung

$$b_{\alpha(i} R_{j)}^{\cdot\alpha} + b_{\alpha(i} \rho_{j)}^{\cdot\alpha} = 0$$

aus, so erhalten wir:

$$b_{\alpha i}(R_{j.}^{\cdot\alpha} + \rho_{j.}^{\cdot\alpha}) = \lambda L_{ij}.$$

Indem wir nun mit b^{ki} falten und die Indizes nach unten senken, erhalten wir endgültig:

$$R_{ij}+\rho_{ij}=2Hb_{ij}. \tag{7}_7$$

Die Invariante

$$2H=\frac{1}{2}\,b^{\alpha\beta}(R_{\alpha\beta}+\rho_{\alpha\beta}) \tag{8}_7$$

werden wir die mittlere Krümmung des Paares konjugierter Übertragungen nennen.

Indem wir eine Alternation ausführen und den Tensor L_{ij} anwenden, erhalten wir aus $(6)_7$

$$b^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}=b^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}, \tag{9}_7$$

woher

$$2H=b^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}=b^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta} \tag{10}_7$$

ist. Die Bedingungen, die den $(9)_7$ äquivalent sind, können wir erhalten, indem wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}&=(2Hb_{\alpha\beta}-\rho_{\alpha\beta})(2Hb^{\alpha\beta}-\rho^{\alpha\beta})=\\&=4H^2b^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}-4Hb^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}+\rho^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}=8H^2-8H^2+\rho^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

betrachten, so dass

$$R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}=\rho^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta} \tag{11}_7'$$

ist. Auf analoge Weise erhalten wir

$$R^{\alpha\beta}R_{\beta\alpha}=\rho^{\alpha\beta}\rho_{\beta\alpha}. \tag{11}_7''$$

Jetzt wollen wir einige geometrische Folgerungen der erhaltenen Identitäten angeben.

Zu diesem Zwecke wollen wir die Summe der Zunahmen desselben Vektors, die er bei der paralleler Verschiebung der ersten und zweiten Art längs einer unendlich kleinen geschlossenen Kontur erhält, betrachten:

$$Dv^i+Dv^{(i)}=\frac{1}{2}\,L_{\alpha\beta}du^\alpha\delta u^\beta(R_{\gamma\cdot}^{\cdot\cdot i}+\rho_{\gamma\cdot}^{\cdot\cdot i})v^\gamma=+\,2HL_{\alpha\beta}du^\alpha\delta u^\beta b_\gamma^i v^\gamma,$$

oder

$$Dv^i+Dv^{(i)}=\lambda b_\gamma^i v^\gamma.$$

Somit ist die Richtung der erwähnten Summe der Anfangsrichtung des Vektors konjugiert.

Eine andere Folgerung erhalten wir, indem wir den Vektor q^i von absoluter Richtung irgendeiner Art (z. B. der ersten Art) und den Vektor

$p^i = b^i_\alpha q^\alpha$ von konjugierter Richtung betrachten. Falten wir die linke Seite von $(6)_7$ mit dem Produkt $p^i p^j$, so erhalten wir:

$$R_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\alpha} b_{\alpha\lambda} p^\lambda q^\mu + \rho_{\lambda\cdot\mu}^{\cdot\alpha} b_{\alpha\mu} p^\lambda q^\mu = 0,$$

oder

$$R_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta + \rho_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0.$$

Somit: **jeder absoluten Richtung irgendeiner Art entspricht eine absolute Richtung der anderen Art, die mit ihr konjugiert ist.** Als direktes Resultat dieses Satzes folgt

1. **Wenn eine asymptotische Linie mit einer absoluten Linie irgendeiner Art zusammenfällt, so ist diese Linie gleichzeitig die absolute Linie der anderen Art.**

2. **Wenn zwei verschiedene Scharen von absoluten Linien mit zwei Scharen absoluter Linie einer anderen Art zusammenfallen, so bilden sie entweder ein konjugiertes Netz, oder sie fallen mit dem asymptotischen Netz zusammen.**

Betrachten wir schliesslich den Tensor

$$C_{ij} = R_{ij} - \rho_{ij}, \tag{12}_7$$

so ist für diesen Tensor der Formel $(9)_7$ gemäss

$$b^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = 0, \tag{13}_7$$

so dass **seine Null-Linien entweder unbestimmt sind** ($R_{ij}^{*} = \rho_{ij}$) oder **ein konjugiertes Netz bilden.**

Jetzt werden wir den Zusammenhang der eingeführten Grössen und denjenigen Grössen, welche die **Krümmung der mittleren Metrik** bestimmen, aufstellen.

Wir benutzen die Eddingtonsche Formel, die den Zusammenhang der Krümmungstensoren zweier Übertragungen angibt, deren Komponenten sich durch den Tensor T_{ij}^k[1] unterscheiden.

Wir wollen gleichzeitig $\overset{0}{\nabla}$ als Symbol der kovarianten Differenzierung der mittleren Metrik gebrauchen; durch K bezeichnen wir das Gauss'sche Krümmungsmass dieser Metrik. Nehmen wir in Betracht, dass

$$z_{ij}^k - G_{ij}^k = \frac{1}{2} S^k_{\cdot\cdot ij}; \quad z_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = -\frac{1}{2} S^k_{\cdot\cdot ij}$$

[1] Shouten, Ricci-Kalkül, S. 87, Formel (132).

ist, so erhalten wir

$$R_{ij}=Kb_{ij}+\frac{1}{2}\overset{0}{\nabla}_{[i}S^{\alpha}_{\cdot\cdot\alpha]j}+\frac{1}{4}S^{\alpha}_{\cdot\cdot j[i}S^{\beta}_{\cdot\cdot\beta]}, \tag{14}'_7$$

$$\rho_{ij}=Kb_{ij}-\frac{1}{2}\overset{0}{\nabla}_{[i}S^{\alpha}_{\cdot\cdot\alpha]j}+\frac{1}{4}S^{\alpha}_{\cdot j[i}S^{\beta}_{\cdot\cdot\beta]\alpha}. \tag{14}''_7$$

Indem wir beide Gleichungen addieren und $(7)_7$ anwenden, erhalten wir

$$\frac{1}{2}S^{\alpha}_{\cdot j[i}S^{\beta}_{\cdot\cdot\beta]\alpha}=(H-K)\,b_{ij};$$

nun aber ist

$$S^{\alpha}_{\cdot\cdot j[i}S^{k}_{\cdot\cdot l]\alpha}=L_{il}S^{\alpha}_{\cdot\cdot j\gamma}S^{k\,\gamma}_{\cdot\cdot\cdot\alpha},$$

woher

$$S^{\alpha}_{\cdot j[i}S^{\beta}_{\cdot\beta]\alpha}=S^{\alpha}_{\cdot\cdot j\gamma}S^{\cdot\gamma}_{i\cdot\alpha}=-4Jb_{ij}$$

ist; somit besteht zwischen den eingeführten Invarianten eine einfache Beziehung

$$H=K-J. \tag{15}_7$$

Indem wir das Zeichen der Alternation in den zweiten Gliedern der Gleichung (14) unterdrücken und die Indentität $\overset{0}{\nabla}L_{ij}=0$ in Betracht ziehen, erhalten wir:

$$\overset{0}{\nabla}_{[i}S^{\alpha}_{\cdot\cdot\alpha]j}=\overset{0}{\nabla}_{\alpha}S^{\cdot\alpha}_{i\cdot j},$$

woher

$$C_{ij}=\overset{0}{\nabla}_{\alpha}S^{\cdot\alpha}_{i\cdot j}. \tag{16}_7$$

§ 8. Inhaltstreue Paare

Die nächsten Paragraphen werden der Betrachtung spezieller Paare gewidmet sein, die man am häufigsten bei den Anwendungen begegnet. Als den ersten solcher speziellen Fälle wollen wir *ein Paar* ins Auge fassen, *dessen beide Übertragungen inhaltstreu sind*. Ein solches Paar werden wir ein *inhaltstreues Paar* nennen.

Zuerst nehmen wir an, dass nur eine der Übertragungen inhaltstreu sei; d. h., dass man jedem Paar nicht kollinearer Vektoren eine invariante Fläche so zuordnen kann, dass ihre Grösse bei einer Paralelübertragung dieser Vektoren erhalten bleibt.

Die Fläche s, die den Vektoren v^i und w^i entspricht, wird durch eine bilineare Form:

$$S=s_{\alpha\beta}v^{\alpha}w^{\beta} \tag{1}_8$$

ausgedrückt, wo s_{ij} ein antisymmetrischer Tensor mit der Matrix

$$\begin{Vmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{Vmatrix} \tag{$2)_8$}$$

ist.

Fordern wir die Erhaltung der Fläche bei einer Parallelübertragung er ter Art v^i und w^i, so erhalten wir als Bedingung dafür:

$$s_{ij/k} = 0. \tag{$3)_8$}$$

Stellen wir die Integrabilitätsbedingung dieser Gleichung auf

$$s_{.j/\alpha}{}^{\cdot\alpha}_{\cdot} = R_{i}{}^{\cdot\alpha}_{\cdot} s_{\alpha j} + R_{j}{}^{\cdot\alpha}_{\cdot} s_{i\alpha} = \frac{s}{\sqrt{b}}(R_{ij} - R_{ji}) = 0,$$

so erhalten wir als die **notwendige und hinreichende Bedingung** für die Inhaltstreue — die Symmetrie des Ricci-Tensors

$$R_{\alpha}{}^{\cdot\alpha}_{\cdot} = 0. \tag{$4)_8$}$$

Stellen wir diese Bedingung der Formel $(7)_7$ gegenüber, so erhalten wir folgendes Resultat:

Wenn eine der Übertragungen des Paares inhaltstreu ist, so ist es auch die andere Übertragung, d. h. das Paar selbst ist inhaltstreu. Wir wollen die Fläche zweiter Art ausdrücken:

$$\Sigma = \sigma_{\alpha\beta} v^{\alpha} w^{\beta}, \tag{$1)'_8$}$$

$$\sigma_{ij} \begin{Vmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{Vmatrix}, \tag{$2)'_8$}$$

$$\sigma_{(i)\,(j).} = 0, \tag{$3)'_8$}$$

$$\rho_{\alpha}{}^{\cdot\alpha}_{\cdot} = 0, \tag{$4)'_8$}$$

wir geben die Bedingung $(3)_8$ für die Komponente s_{12} in explizite Form an

$$s_{12/k} = \partial_k s - G^1_{k1} s - G^2_{k2} s = 0,$$

woher

$$\partial_k \lg s = G^{\alpha}_{\alpha k}, \tag{$5)_8$}$$

und analog

$$\partial_k \lg \sigma = \Gamma^{\alpha}_{\alpha k}. \tag{$5)'_8$}$$

Addieren wir diese Gleichungen, wobei wir ihren Zusammenhang mit der mittleren Metrik beachten, so erhalten wir:

$$G^{\alpha}_{\alpha k} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha k} = 2 \varepsilon^{\alpha}_{\alpha k},$$

oder andererseits

$$\partial_k \lg (s\sigma) = 2\partial_k \lg \sqrt{b} = \partial_k \lg b.$$

Somit ist

$$s \cdot \sigma = b \cdot \text{konst.} = \varepsilon \cdot b. \tag{6$_8$}$$

Die Formeln $(5)_8$ zeigen, dass die Grössen s und σ durch die Parameter der entsprechenden Parallelübertragungen bis auf einen konstanten Faktor genau ausgedrückt werden. Hierbei ist eine willkürliche Wahl des Masstabes des Flächenmasses freigelassen. Durch Benutzung dieser Willkür ist es immer möglich zu erreichen, dass die Konstante ε in $(6)_8$ gleich Eins wird.

Somit können in einem inhaltstreuen Paar die Einheiten für das Flächenmass, so gewählt werden, dass die Flächen, welche durch die mittlere Metrik bestimmt ist, zur mittleren Proportionalen zwischen den betreffenden Flächen erster und zweiter Art wird.

Wir wollen noch beachten, dass aus Symmetriegründen für R_{ij} die Gleichung

$$R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} = 2 \frac{R}{b}$$

gilt, wo R die Diskriminante des Tensors R_{ij} bedeutet. Die Formel $(10)_7$ weist hierbei auf die Gleichheit der Diskriminanten der Ricci-Tensoren erster und zweiter Art hin:

$$R = \rho. \tag{7$_8$}$$

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir den Zusammenhang zwischen den Begriffen eines inhaltstreuen Paares und der in der Einleitung behandelten Interpretation feststellen.

Neben der Formel (2)

$$x_{i/j} = p_{ij} x + b_{ij} X$$

bekommen wir, infolge der zweiten Reihe von Bedingungen (1)

$$\partial_i x = S_i^\alpha \partial_\alpha x + S_i X.$$

Betrachten wir jetzt die kovariante Derivierte erster Art eines antisymmetrischen Tensors:

$$s_{ij} = (\partial_i x,\, d_j x,\, x,\, X),$$

$$s_{ij/k} = (p_{ik} x, \partial_j x, x, X) + (\partial_i x, p_{jk} . x,\; x, X) + (\partial_i x, \partial_j x, \partial_k x, X) +$$
$$+ (\partial_i x, \partial_j x, x, S_k^\alpha \partial_\alpha x + S_k X).$$

Alle Determinanten auf der rechten Seite der letzten Gleichung müssen offenbar verschwinden:

$$s_{ij/k} = 0.$$

Diese Identität zeigt, dass man in bezug auf eine Übertragung erster Art eine Fläche definieren kann, die bei einer Parallelübertragung erhalten bleibt, und dass somit das Paar der inneren Geometrien ein inhaltstreues Paar ist.

Im Resultat sehen wir, dass das von uns in der Einleitung angegebene Anwendungsgebiet für den Begriff konjugierter Übertragungen etwas begrenzter ist, als das gesamte Existenzgebiet solcher Paare. Die Anwendungen entspringen in diesem Sinne nur den inhaltstreuen Paaren.

§ 9. Metrische Paare

Wir wollen ein Paar als ein metrisches bezeichnen, wenn seine beiden bildenden Geometrien Riemannsche Geometrien sind.

In jeder von ihnen existiert ein nicht entarteter symmetrischer Tensor $g_{ij}(\gamma_{ij})$, dessen kovariante Derivierte entsprechender Art verschwindet.

Nehmen wir an, dass nur der metrische Charakter der Geometrie erster Art bekannt ist, so dass

$$g_{ij/k} = 0. \tag{1$_9$}$$

Die Integrabilitätsbedingung für diese Gleichung lautet

$$g_{ij/\dot{\alpha}}{}^{\alpha}_{\cdot} = R_i{}^{\alpha}_{\cdot}\, g_{\alpha j} + R_j{}^{\alpha}_{\cdot}\, g_{i\alpha} = R_{(i}{}^{\alpha}_{\cdot}\, g_{j)\alpha} = 0,$$

wobei der Tensor R_{ij} symmetrisch ist, da die Geometrie notwendig eine von inhaltstreuen Typus wird, und da der Tensor

$$s_{ij} \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{g} \\ -\sqrt{g} & 0 \end{Vmatrix} \tag{2$_9$}$$

der Bedingung $(3)_8$ genügt.

Wegen

$$R_i{}^{\alpha}_{\cdot}\, g_{j\alpha} = \lambda L_{ij}$$

erhalten wir daher:

$$R_{ij} = k g_{ij}, \tag{3$_9$}$$

wo k die Gauss'sche Krümmung der betreffenden Metrik darstellt.

Jetzt stellen wir die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Tensors g_{ij} fest, welcher die Bedingung $(1)_9$ erfüllt. Wir differenzieren die Gleichung $(3)_9$ und eliminieren g_{ij}, wobei wir $k \neq 0$ annehmen:

$$R_{ij/s} = \rho_s R_{ij}. \tag{4$_9$}$$

Wir überzeugen uns, dass diese Bedingung hinreichend ist.

Die Integrabilitätsbedingung ergibt:

$$R_{ij/\dot{\alpha}}{}^{\alpha}_{\cdot} = \rho_{\dot{\alpha}/}{}^{\alpha}_{\cdot}\, R_{ij} + \rho_\alpha \rho^\alpha R_{ij} = R_i^\alpha R_{\alpha j} + R_j^\alpha R_{\alpha i} = 0$$

oder

$$\rho_{\dot{\alpha}/}{}^{\alpha}_{\cdot} = 0;$$

ρ_s ist also ein Gradienttensor. Man kann demnach setzen:

$$\rho_s = \partial_s \rho.$$

Machen wir den Ansatz

$$g_{ij} = e^{-\rho} R_{ij},$$

so erhalten wir einen Tensor, der die Bedingung $(1)_9$ erfüllt.

Wir benutzen jetzt die Formel $(6)_7$ und schreiben sie in folgender Form auf:

$$\rho_{i\alpha} b^{\alpha i} = R_{\alpha i} b_{\alpha j}.$$

Nach $(3)_9$ erhalten wir für unseren Fall

$$\rho_{j\alpha} b^{\alpha i} = k g^{i\alpha} b_{\alpha j} = \lambda \tilde{g}^{i\alpha} b_{\alpha j},$$

wo

$$\lambda = k \frac{g}{b}.$$

Wir bilden nunmehr die gemischte Derivierte auf beiden Seiten der vorletzten Gleichung:

$$\nabla_s (\rho_{(j)(\alpha)} b^{(\alpha)} = \nabla_s (\lambda \tilde{g}^{i\alpha} b_{\alpha(j)})$$

oder

$$b^{\alpha i} \rho_{(j)(\alpha)/s} = \lambda_s \tilde{g}^{i\alpha} b_{\alpha(j)}.$$

Ersetzt man den Tensor auf der rechten Seite mit Hilfe der Ausgangsformel, so ist

$$b^{\alpha i} \rho_{(j)(\alpha)/s} = \frac{\lambda_s}{\lambda} \rho_{j\alpha} b^{\alpha i},$$

woher

$$\rho_{(j)(k)/s} = (\lg \lambda)_s \cdot \rho_{jk}. \qquad (4)_9$$

Vergleichen wir die erhaltene Beziehung mit $(4)_9$ so kommen wir zu folgendem Schluss: Wenn eine der Übertragungen des konjugierten Paares eine metrische Geometrie bestimmt, so bestimmt die mit ihr konjugierte Übertragung ebenfalls eine metrische Geometrie und das Paar ist ein metrisches Paar.

Bezeichnen wir mit $\varkappa$ die Gauss'sche Krümmung der Geometrie zweiter Art und durch γ_{ij} den Grundtensor dieser Geometrie, so ist,

$$\gamma_{(i)(j)/k} = 0, \qquad (1)'_9$$

$$\sigma_{ij} \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (2)'_9$$

$$\rho_{ij} = \varkappa \gamma_{ij}. \qquad (3)'_9$$

Vergleicht man die Folgerung aus der letzten Gleichung:

$$\rho_{(i)(j)|s} = (\lg \chi)_s \rho_{ij}$$

mit $(4)_9'$ unter Beachtung der Bedeutung des Koeffizienten λ, so erhält man:

$$\chi = k \frac{g}{b} \cdot c. \tag{*}$$

Andererseits ist

$$R = \rho.$$

oder

$$k^2 g = \chi^2 \gamma.$$

Wir quadrieren und multiplizieren beide Teile der Gleichung (*) mit γ, dann ist

$$\chi^2 \gamma = c^2 k^2 g \cdot \frac{g\gamma}{b^2},$$

so dass

$$c^2 = \frac{b^2}{g\gamma}.$$

Naturgemäss wird man voraussetzen, dass die Flächenmasseinheiten entsprechend den Längeneinheiten gewählt sind, also

$$\gamma = \sigma^2, \quad g = s^2;$$

dann lässt sich die Beziehung $(6)_8$ anwenden, und man erhält:

$$c^2 = \varepsilon^2$$

und schliesslich

$$\chi = \pm \varepsilon \frac{g}{b} k. \tag{$(5)_9$}$$

$$k = \pm \varepsilon \frac{\gamma}{b} \chi. \tag{$(5)_9$}$$

Hierbei müssen die Vorzeichen bei ε gleich gewählt werden.

Man kann den Begriff eines metrischen Paares auch für die Theorie der Flächen eines nichteuklidischen Raumes nutzbar machen. In diesem Fall fällt die Geometrie erster Art mit der inneren Flächengeometrie zusammen und die Geometrie zweiter Art wird durch die Winkelmetrik von Bianchi [1] dieser Fläche bestimmt. Diese kann auch als eine innere Geometrie der Fläche interpretiert werden, die der gegebenen in einer polaren Transformation bezüglich des Absolutums korrelativ ist.

[1] Bianchi, Lezioni di Geom. Diff., vol. II, parte II, § 484 (VIII).

Ausser der Bedingung für die Konjugiertheit sind die Grundgrössen in diesem Fall noch durch die Bedingung

$$k = k_0 + \frac{b}{g}$$

und die Dualbedingung

$$\varkappa = c + \frac{b}{\gamma}$$

verknüpft, wo k_0 die Krümmung des Raumes und c eine Konstante bedeuten.

Eliminiert man g, γ und b aus diesen Bedingungsgleichungen und $(5)_9$, so erhält man

$$k(\varkappa - c) = \pm \varepsilon\varkappa; \quad \varkappa(k - k_0) = \pm \varepsilon k.$$

Beachten wir jetzt, dass k und $\varkappa$ im Allgemeinen veränderlich sind, und fordern wir, dass die zweite Gleichung eine Folgerung der ersten sei, so ist in diesem Falle

$$c = \pm \varepsilon = k_0$$

und

$$k\varkappa = k_0(k + \varkappa)$$

oder

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{k_0}. \tag{6$_9$}$$

Dies ist die Bedingung für die Anwendbarkeit des metrischen Paares in einer nichteuklidischen Geometrie.

§ 10. Projektiv-euklidische Übertragung

Nehmen wir an, dass eine der Übertragungen projektiv-euklidisch ist, so dass seine geodätischen Linien kontinuierlich auf Geraden der projektiven Fläche abgebildet werden können.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass dies für die Übertragung zweiter Art statt hat, ist

$$\nabla^{\alpha} \rho_{(\alpha)(i)} = 0 \text{ [1]}. \tag{1$_{10}$}$$

Gemäss $(6)_7$ ist

$$\rho_{\alpha i} = b_{\alpha\sigma} b_{i\rho} R^{\sigma\rho},$$

deshalb

$$\nabla^{\alpha} \rho_{\alpha i} = b_{i\rho} \nabla^{\alpha}(b_{\alpha\sigma} R^{\sigma\rho}) = 0,$$

Aber

$$b_{\alpha\sigma} R^{\sigma\rho} = - L_{\alpha\lambda} L^{\rho\mu} b^{\lambda\sigma} R_{\sigma\mu},$$

[1] Shouten, Der Ricci-Kalkül, IV. Abschn., § 2.

und das Produkt aus den Tensoren $L_{\alpha\lambda}$ und $L_{\rho\mu}$ kann durch Grössen ersetzt werden, deren Differential gleich Null ist. Wir haben:

$$\partial^{\mu}_{[\alpha}\,\partial^{\rho}_{\lambda]} = L_{\alpha\lambda} L^{\omega\mu} \partial^{\rho}_{\omega} = L_{\alpha\lambda} L^{\rho\mu}. \tag{+}$$

Bringen wir diesen Ausdruck vor das Differenzierungszeichen und befreien wir uns von $b_{i\rho}$, so bekommen wir eine der $(1)_{10}$ vollkommen gleichwertigen Bedingungen

$$\nabla_{\alpha}(b^{\alpha\sigma} R_{\sigma i}) = 0. \tag*{$(2)_{10}$}$$

Nehmen wir an, dass die in der Einleitung betrachtete Konfiguration so spezialisiert ist, das alle Geraden der Normalen Kongruenz der zweiter Art in einer Ebene liegen in der sich ebenfalls alle Punkte X befinden (die oberen Enden der Normalen zweiter Art). Nehmen wir weiter an, dass die Ebene eine uneigentliche Ebene des affinen Raumes darstellt, so kommen wir zu einem Schema, das dem Schema der relativen Flächengeometrie von Müller vollkommen äquivalent ist.

Die Grundgleichungen werden hierbei die Form:

$$x_{i|j} = b_{ij} X,$$

erhalten. Sie werden aber die Grundfläche dann und nur dann bestimmen, wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind:

$$b_{i\dot{\alpha}\,|\,\dot{j}}{}^{\alpha} = 0, \tag{A}$$

$$R_{\dot{\alpha}}\,\dot{\cdot}^{\alpha} = 0, \tag{B}$$

$$\nabla_{\alpha}(b^{\alpha\sigma} R_{\sigma i}) = 0\ ^{1}. \tag{C}$$

Vergleichen wir (A), (B) und (C) und beachten wir, dass (C) mit $(2)_{10}$ identisch ist, so kommen wir zu folgendem Satz:

D a m i t e i n P a a r k o n j u g i e r t e r Ü b e r t r a g u n g e n d u r c h e i n M ü l l e r s c h e s S c h e m a i n t e r p r e t i e r t w e r d e n k a n n, i s t n o t w e n d i g u n d h i n r e i c h e n d, d a s s d i e s e s P a a r i n h a l t s t r e u u n d d i e Ü b e r t r a g u n g z w e i t e r A r t p r o j e k t i v - e u k l i d i s c h s e i e n.

Was die notwendige Bedingung anbetrifft, so muss sie auch für alle Spezialisierungen des Müllerschen Schemas statt haben, d. h. sowohl für affine Flächengeometrie als auch für die klassische Theorie. Zu der ersten werden wir noch weiter unter zurückkehren. Was die klassische Theorie der Flächen anbelangt; so muss die Forderung nach Inhaltstreue in der Hinsicht verschärft werden, als das Paar m e t r i s c h sein muss. Diese Forderung ist für die Geometrie zweiter Art gleich bedeutend mit der Forderung der Konstanz der Krümmung.

[1] A. Norden, Die relative Geom. der Flächen...

Also: damit man ein Paar konjugierter Übertragungen in der klassischen Geometrie interpretieren kann, ist es notwendig und hinreichend, dass das Paar metrisch und die Geometrie zweiter Art eine Geometrie konstanter Krümmung sei.

Man muss bemerken, dass in der Abhängigkeit von dem Vorzeichen der konstanten Krümmung, diese Interpretation in dem euklidischen Raum mit reellem oder imaginärem Absolutum realisierbar ist.

Wählen wir das Längenmass so, dass in der Formel $(5)'_9$ $\varepsilon=1$, $\varkappa=\pm 1$ wird, so erhalten wir

$$k=\pm\frac{b}{g}, \tag*{$(3)_{10}$}$$

d. h. den Gauss'schen Satz.

§ 11. Minimale Paare

Im § 3 haben wir bereits über konjugierte geodätische Netze gesprochen. Wir wollen jetzt ein Paar inhaltstreuer Übertragungen betrachten, das die Existenz eines konjugierten Netzes dreifacher geodätischen Linien zulässt. Infolge einer Analogie, die sich weiter klar wird, werden wir ein solches Paar ein minimales Paar nennen.

Vor allem bemerken wir, dass dies betrachtete Netz, gemäss den Resultaten des § 3 in bezug auf die beiden Übertragungen, ein Netz von Tshebyschev darstellt und dass die Existenz eines solchen Netzes als hinreichendes Merkmal für die minimalen Eigenschaften des Paares gelten darf. Betrachten wir jetzt die Vektoren v^i und w^i, die die eine und die andere Linie der Schar tangieren. Jeder dieser Vektoren besitzt die Eigenschaft, dass seine Richtung parallel übertragen wird 1) längs der Linie, welche sie tangieren, 2) längs der Linie der anderen Schar. Betrachten wir das krummlinige Viereck, das aus zwei Linien der einen und aus zwei Linien der anderen Schar besteht. Wir haben dann ein geschlossenes Kontur vor uns. Umführen wir dieses Gebiet mit einem unserer Vektoren parallel zu sich selbst, so kehren wir ohne eine Richtungsänderung zu dem Ausgangspunkt zurück.

Die Eigenschaft der Richtungserhaltung bei einer Umführung besitzt aber nur ein Vektor von absoluter Richtung (vgl. § 7), d. h., entweder sind beide Übertragungen euklidisch ($R_{ij}=\rho_{ij}=0$) oder das betrachtete Liniennetz stellt ein absolutes Netz beider Übertragungen dar:

$$2H=b^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}=b^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}=0 \tag*{$(1)_{11}$}$$

und

$$R_{ij}+\rho_{ij}=0. \tag*{$(2)_{11}$}$$

Die mittlere Krümmung eines minimalen Paares ist somit gleich Null und die Ricci-Tensoren erster und zweiter Art unterscheiden sich nur durch ihr Vorzeichen.

Angenommen, dass der Ricci-Tensor von Null verschieden ist, gilt,

$$R_{ij} = \lambda v_{(i} w_{j)},$$

da der Vektor v^i seine Richtung bei zwei Übertragungen in zwei verschiedenen Richtungen beibehält:

$$v^i{}_{|\alpha} v^\alpha = \mu v^i,$$

woher

$$v^i{}_{|\alpha} w^\alpha = \nu v^i.$$

Er erhält seine Richtung auch bei einer Übertragung in beliebiger Richtung, worin man sich leicht überzeugt, wenn man diese Formeln linear miteinander verbindet:

$$\nabla v^i = \sigma v^i,$$

und analog

$$\nabla w^i = \rho w^i.$$

Differenzieren wir den Tensor R^{ij}, so erhalten wir:

$$\nabla R^{ij} = \lambda\sigma v^{(i} w^{j)} + \lambda\nu v^{(i} w^{j)} = \omega R^{ij}.$$

Das letzte Resultat zeigt, dass ein minimales Paar ein metrisches Paar ist, wobei die Linien von der Nullänge beider Metriken zusammenfallen und ein konjugiertes Netz bilden. Die asymptotischen Richtungen sind hierbei orthogonal in bezug auf beide Metriken.

Die Formel $(2)_{11}$ erhält darum folgende Fassung:

$$k g_{ij} + \varkappa \gamma_{ij} = 0, \tag{$3)_{11}$}$$

woraus ersichtlich ist, dass die metrischen Grundtensoren beider Metriken einander proportional sind und beide Geometrien konform übereinstimmen. Benutzt man die bekannte Formel einer konformen Transformation, so erhält man eine Beziehung zwischen $\Gamma^k_{i\gamma}$ und $G^k_{i\gamma}$, wobei

$$S^k_{\cdot\,,\,ij} = \delta^k_{(i} S_{j)} - g_{ij} \tilde{g}^{k\alpha} S_\alpha\,,$$

$$S_j = \frac{1}{2} \nabla_j \lg\left(\frac{k}{\varkappa}\right). \tag{$4)_{11}$}$$

Formen wir diese Formel unter der Voraussetzung um, dass

$$\lambda^k = \tilde{g}^{k\alpha} S_\alpha, \tag{$5)_{11}$}$$

dann erhalten wir

$$S_{k,\,ij} = L_{k(i} g_{j)\iota} \lambda^\alpha - g_{ij} \lambda_k.$$

In dem Ausdruck:

$$L_{ki} g_{j\alpha} \lambda^\alpha = L_{ki} L^{\alpha\beta} \lambda_\beta g_{j\alpha}$$

ersetzen wir die ersten Faktoren der rechten Seite unter Benutzung der Identität § 10:

$$L_{kl}L^{\alpha\beta}=\delta^{\beta}_{[k}\delta^{\alpha}_{l]},$$

und erhalten

$$S_{k,\,ij}=\lambda_k g_{ij}-\lambda_i g_{kj}+\lambda_k g_{ij}-\lambda_j g_{ki}-\lambda_k g_{ij},$$

woraus endgültig

$$S_{k,\,ij}=\lambda_k g_{ij}-\lambda_i g_{jk}-\lambda_j g_{ki} \tag{6$_{11}$}$$

folgt.

Da der Tensor g_{ij} ein konjugiertes Netz bestimmt, so ist die Struktur des Tensors $S_{k,\,ij}$ dieselbe, wie in der Formel $(11)_6$, infolge dessen ist

$$J=0 \tag{7$_{11}$}$$

was bei einem Vergleich mit den Formeln $(1)_{11}$ und $(15)_7$

$$K=0 \tag{8$_{11}$}$$

ergibt, d. h. *die mittlere Metrik eines minimalen Paares ist euklidisch.*

Die S-Linien minimaler Paare werden aus den Gleichungen:

$$S_{\alpha,\,\beta\gamma}\,du^{\alpha}\,du^{\beta}\,du^{\gamma}=-\,g_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,du^{\beta}\,\lambda_{\gamma}\,du^{\gamma}=0,$$

bestimmt, aus welchen wir finden, dass zwei von ihnen mit den minimalen Linien beiden Übertragungen zusammenfallen, während die dritte aus der linearen Gleichung:

$$g_{\gamma\delta}\nabla^{\delta}\left(\lg\frac{k}{\varkappa}\right)du^{\gamma}=0 \tag{9$_{11}$}$$

bestimmt wird.

Es möge die Richtung δu^i die Linie $\dfrac{k}{n}=$ konst. tangieren, dann haben wir:

$$\nabla_{\alpha}\lg\left(\frac{k}{\varkappa}\right)\delta u^{\alpha}=0$$

oder

$$\nabla_i\lg\left(\frac{k}{\varkappa}\right)=\lambda\delta u_i,$$

setzen wir dies in $(9)_{11}$ ein, so erhalten wir:

$$g_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,\delta u^{\beta}=0,$$

folglich *ist die dritte Schar der S-Linien eine Schar orthogonaler Trajektorien der Linien* $\dfrac{k}{n}=$ konst.

Die minimalen Paare besitzen noch eine interessante Eigenschaft. Nähmlich im allgemeinen sind die asymptotischen Linien eindeutig bestimmt, sobald beide Übertragungen des Paares nach den Formeln $(10)_5$ und $(7)_7$ einzeln oder durch ihre Kombination gegeben sind.

Zeigen wir, dass im Gegensatz hierzu der Grundtensor der minimalen Paare auf unendlich verschiedene Weise gewählt werden kann.

b_{ij} soll den Grundtensor des Paares, $\breve{s}^{ij}$ einen reziproken zu dem bestimmten Tensor $(1)_8$ bezeichnen.

Betrachten wir die Grösse:

$$\overset{*}{b}_{ij} = g_{i\alpha} \breve{s}^{\alpha\beta} b_{\beta i}.$$

Der Tensor $\overset{*}{b}_{ij}$ zeigt folgende Eigenschaften:

1) Er ist symmetrisch: da

$$\overset{*}{b}{}^{\gamma}_{\gamma} = g^{\gamma}_{\alpha} \breve{s}^{\alpha}_{\beta} b_{\beta\gamma} = \lambda b^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 0.$$

2) Seine Diskriminante ist von Null verschieden, da

$$\overset{*}{b}{}^{\alpha\beta} \overset{*}{b} = g^{\lambda}_{\alpha} \breve{s}^{\alpha\beta} b^{\mu}_{\beta} g_{\lambda\sigma} \breve{s}^{\sigma\rho} b_{\rho\mu} = \lambda g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \neq 0.$$

3) Seine gemischte Derivierte verschwindet:

$$\overset{*}{b}_{i\,(j)\,k} = (g_{i\alpha} \breve{s}^{\alpha\beta})_{/k} b_{\beta j} + b_{\beta\,(j)/k} g_{i\alpha} \breve{s}^{\alpha\beta} = 0, \qquad (10)_{11}$$

da die kovarianten Ableitungen der eingeklammerten Grossen verschwinden.

Da der Tensor $\overset{*}{b}_{ij}$ alle Forderungen, denen der Grundtensor eines konjugierten Paares genügen muss, erfüllt, so kann er ebenfalls als ein Grundtensor behandelt werden. Mehr noch, es ist leicht zu verifizieren, dass man als einen Grundtensor des Paares jeden Tensor der Form

$$\overline{b}_{ij} = b_{ij} + c \overset{*}{b}_{ij} \qquad (11)_{11}$$

nehmen kann, wo c eine beliebige Konstante bedeutet.

§ 12. Euklidische Paare

Wir werden ein Paar konjugierter Übertragungen euklidisch nennen, wenn beide Übertragungen die Krümmung Null besitzen.

Damit ein Paar euklidisch ist, genügt es die Forderung zu stellen, dass der Ricci-Tensor nur der einen Übertragung des Paares verschwindet. In der Tat, ist in diesem Fall:

$$2H = b^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = 0, \qquad (1)$$

und wegen der Beziehung

$$R_{ij}+\rho_{ij}=0$$

gleichzeitig

$$R_{ij}=0;\ \rho_{ij}=0. \qquad (2)_{12}$$

Im Falle eines euklidischen Paares besitzt die Aufgabe der Auffindung einer konjugierten Übertragung zu der gegebenen eine einfache Lösung. Sie lässt sich im allgemeinen Fall auf die Integration einer Gleichung von Codazzi zurückführen.

In der Tat, wenn b_{ij} eine Lösung dieser Gleichung darstellt unter der Annahme, dass

$$S^{i}_{\cdot\, jk}=b^{i\alpha}b_{\alpha i||j},$$

bekommt man

$$b^{\alpha\beta}S_{\alpha,\,\beta i}=b_{i\alpha|}{}^{\alpha}=0.$$

Die Grundbedingung der Konjugiertheit:

$$b_{i\,(j)|k}=b_{ij/k}-S^{\alpha}_{\cdot\,,\,jk}b_{\alpha i}=b_{ij||k}-b_{ij|k}=0,$$

wird dann für ein Übertragungspaar G^{k}_{ij} und

$$\Gamma^{k}_{ij}=G^{k}_{ij}+S^{k}_{ij}$$

erfüllt sein.

Wir nehmen jetzt an, dass die Grössen G^{k}_{ij} bestimmen die betreffende Übertragung und die Bedingung

$$R_{ij}=0$$

erfüllen.

Nehmen wir eine willkürliche Funktion θ an und bezeichnen ihre Ableitung durch $\partial_i\theta=\theta_i$.

Wir zeigen jetzt, dass die zweite kovariante Ableitung dieser Funktion die Bedingung von Codazzi erfüllt. Es ist

$$\theta_{i|\alpha}{}^{\alpha}=R_{i}{}^{\alpha}\,\theta_{\alpha}=0;$$

deshalb kann man die kovariante Ableitung einer willkürlich angenommenen Funktion $b_{ij}=\theta_{i|j}$ als einen Grundtensor für das resultierende euklidische Übertragungspaar ansetzen.

§ 13. Die projektive Transformation eines konjugierten Paares von Übertragungen

Wir möchten jetzt für kurze Zeit auf die Interpretation unserer Theorie in der Einleitung zurückkommen.

Ein Paar innerer Geometrien, das auf der Grundfläche bestimmt wird, hängt ab, erstens von der Gestalt dieser Fläche und zweitens von der Form der Kongruenzen der Normalen erster und zweiter Art, die diese Fläche ergänzen. Sofern diese Kongruenzen bis zu einem gewissen Grade willkürlich vorgeschrieben sein können, ist ein Paar innerer Geometrien nicht invariant mit der Grundfläche verbunden und wird bei der Ersetzung ergänzender Kongruenzen durch andere gewisse Transformationen erleiden.

Der Charakter dieser Transformationen lässt sich auf Grund folgender Betrachtung feststellen.

Erstens müssen ihre asymptotischen Linien erhalten bleiben, die im unmittelbaren Zusammenhang mit der Fläche stehen, und folglich müssen solche Transformationen von einer konformen Transformation der mittleren Metrik begleitet sein.

Zweitens kann man sich jede Transformation aus zwei zusammengesetzt denken, einer ersten, die durch die alleinige Ersetzung der Kongruenzen der Normalen erster Art, und einer zweiten, die auf Kosten der Änderung der Kongruenzen der Normalen *allein* zweiter Art entstehen.

Wenn aber die Normalen erster Art, z. B., erhalten bleiben, so bleiben auch die geodätischen Linien erster Art erhalten. Sie stellen nähmlich Linien auf der Fläche dar, deren Schmiegsebenen durch die Normalen erzter Art der entsprechenden Punkte hindurchgehen.

Ausserdem muss die erwähnte Transformation von zwei willkürlich gewählten Funktionen zweier Variablen abhängen. Dies folgt daraus, dass jegliche Ergänzung einer Fläche, mittels zweier Kongruenzen von dem in der Einleitung erwähnten Typus, eindeutig einer bestimmten Normierung des Punktes und der Tangentialebene zur Grundfläche entspricht. Wir behalten obere Ausführungen für das Weitere und gehen zu der Definition der angegebenen Transformation eines Paares von Übertragungen über, indem wir sie als *eine projektive Transformation* des Paares bezeichnen.

Wir nennen eine projektive Transformation eines Paares eine solche Ersetzung der beiden Übertragungen des Paares, bei welchem

1) die Bedingungen der Konjugiertheit erhalten bleiben;

2) die mittlere Metrik konform transformiert wird;

3) die Zerlegung der Transformation zugelassen ist und zwar in die eine, wo die geodätischen Linien erster Art erhalten bleiben (Transformation erster Art), und in die zweite, wo die geodätischen Linien zweiter Art erhalten bleiben (Transformation zweiter Art).

Betrachten wir die Transformation erster Art, die der konformen Transformation mittlerer Metrik entspricht:

$$\overline{b}_{ij} = m b_{ij},$$

dann ist

$$2\overline{z}^k_{ij} = 2\overline{z}^k_{ij} + \partial^k{}_{(i}\nabla_{j)} \lg m - b_{ij} b^{ka} \nabla_a \lg m \ ^1,$$

[1] *Shouten*, Der Ricci-Kalkül, V. Abschn., § 1 (3).

woher

$$\overline{G}^k_{ij} + \overline{\Gamma}^k_{ij} = G^k_{ij} + \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i \nabla_j \lg m - b_{ij} b^{k\alpha} \nabla_\alpha \lg m,$$

andererseits muss, damit die geodätischen Linien erster Art erhalten bleiben, gelten

$$\overline{G}^k_{ij} = G^k_{ij} + \delta^k_{(i} p_{j)}$$ [1].

Der Vergleich der beiden letzten Formeln ergibt

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_{(i} q_{j)} - b_{ij} b^{k\alpha} \nabla_\alpha \lg m,$$

wo

$$q_j = \nabla_j \lg m - p_j,$$

so dass

$$\overline{S}^k_{\cdot\,,ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - G^k_{ij} = S^k_{\cdot\,,ij} + \delta^k_{(i} r_{j)} - b_{ij} b^{k\alpha} \nabla_\alpha \lg m,$$

wo

$$r_j = \nabla_j \lg m - 2p_j.$$

Setzen wir jetzt die notwendige Bedingung für die Konjugiertheit an:

$$b^\alpha_\beta S^\beta_{\cdot\,,\alpha i} = 0,$$

das ergibt

$$b^\alpha_\beta \delta^\beta_\alpha r_j + b^\lambda_j r_\lambda - b^\lambda_\mu b_{\lambda j} b^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \lg m = 0,$$

$$b^\lambda_j (r_\lambda + \nabla_\lambda m) = b^\lambda_j (\nabla \lg m - 2p_\lambda + \nabla_\lambda \lg m) = 0,$$

so dass

$$p_i = \nabla_i \lg m.$$

Die Transformation erster Art wird also durch folgende Formeln wiedergegeben:

$$\overline{G}^k_{ij} = G^k_{ij} + \delta^k_{(i} \nabla_{j)} \lg m,$$

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - b_{ij} b^{k\alpha} \nabla_\alpha \lg m.$$

Um zum allgemeinen Fall zu gelangen, genügt es auf der rechten Seite dieser Formeln diejenigen Transformationsglieder zu addieren, die den gegebenen analog sind. Man erhält dann:

$$\overline{G}^k_{\cdot ij} = G^k_{ij} + \delta^k_{(i} \nabla_{j)} \lg m - b_{ij} b^{k\alpha} \nabla_\alpha \lg \mu, \qquad (1)_{18}$$

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_{(i} \nabla_{j)} \lg \mu - b_{ij} b^{k\alpha} \nabla_\alpha \lg m,$$

wobei

$$\overline{b}_{ij} = m\mu b_{ij}. \qquad (2)_{18}$$

Die angeführten Formeln zeigen, dass die Transformation des gegebenen Paares von zwei willkürlich gewählten Funktionen abhängt, von denen die

[1] Shouten, Der Ricci-Kalkül, IV. Abschn., § 1 (1).

eine (m) einer Transformation erster Art und die andere (μ) einer Transformation zweiter Art entspricht. Im Zusammenhang damit ist zweckmässig ein Symbol für die Transformation einzuführen, indem wir z. B. $(1)_{13}$ durch

$$(m,\ \mu) \tag{3$_{13}$}$$

ausdrücken. Dann wird das Symbol für eine Transformation erster Art

$$(m,\ 1), \tag{4$_{13}$}$$

für eine Transformation zweiter Art

$$(1,\ \mu), \tag{5$_{13}$}$$

weiter haben wir für eine identische Transformation

$$(1,\ 1), \tag{6$_{13}$}$$

dagegen für eine inverse zu der gegebenen

$$(m^{-1},\ \mu^{-1}). \tag{7$_{13}$}$$

Das Symbol einer Transformation, die man als Produkt zweier Transformationen $(m,\ \mu)$ und $(m_1,\ \mu_1)$ erhält, wird offenbar

$$(mm_1,\quad \mu\mu_1) \tag{8$_{13}$}$$

sein.

Als eine unmittelbare Folgerung aus der Formel $(1)_{13}$ erhalten wir:

$$\overline{S}^{i}_{\cdot,jk} = S^{i}_{\cdot,jk} + \delta^{i}_{(j}\nabla_{k)}\lg\left(\frac{\mu}{m}\right) + b_{jk}b^{i\alpha}\nabla_{\alpha}\lg\left(\frac{\mu}{m}\right), \tag{8$'_{13}$}$$

woraus

$$\overline{b}_{ijk} = m\mu\left[b_{ijk} + b_{ij}\nabla_k\lg\left(\frac{\mu}{m}\right) + b_{jk}\nabla_i\lg\left(\frac{\mu}{m}\right) + b_{ki}\nabla_j\lg\left(\frac{\mu}{m}\right)\right]. \tag{9$_{13}$}$$

Unter den projektiven Transformationen eines Paares spielen eine besondere Rolle Transformationen, die wir als symmetrisch bezeichnen möchten und die an Hand des Symbols

$$(m,\ m) \tag{10$_{13}$}$$

definiert werden.

Liegt eine symmetrische Transformation vor, so nehmen die Formeln $(1)_{13}$ für G^{k}_{ij} die Gestalt:

$$\overline{G}^{k}_{ij} = G^{k}_{ij} + 2\delta^{k}_{(i}\nabla_{j)}\lg m - b_{ij}b^{k\alpha}\nabla_{\alpha}\lg m, \tag{11$_{13}$}$$

an. Auch die Grössen $\overline{\Gamma}^{k}_{ij}$ und $\overline{\gamma}^{k}_{ij}$ erhalten dieselbe Form, die identisch mit den Formeln der konformen Transformation von Christoffelshen Klammern der Form:

$$\overline{b}_{ij} = m^2 b_{ij}$$

ist.

Die Grösse $\nabla_i \lg\left(\frac{\mu}{m}\right)$ verschwindet in diesem Fall, und wir bekommen

$$\begin{aligned}\overline{S}^i_{\cdot\cdot jk} &= S^i_{\cdot\cdot jk},\\ \overline{b}_{ijk} &= m^2 b_{ijk}.\end{aligned} \qquad (12)_{13}$$

Der Tensor $S^i_{\cdot\cdot jk}$, die Linien S und die Linien B sind also bei einer symmetrischen Transformation invariant.

Neben einer symmetrischen Transformation kann man die Transformation

$$(m, \quad m^{-1}) \qquad (13)_{13}$$

ins Auge fassen und sie als antisymmetrisch bezeichnen.

Die Invarianten dieser Transformation sind infolge der Gleichung $\overline{b}_{ij} = b_{ij}$ evident. Diese Grössen sind alle mit der mittleren Metrik verbunden. Eine beliebige projektive Transformation kann in der Form eines Produktes aus einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Transformation ausgedrückt werden. Dies sieht man ein bei der Betrachtung der symbolischen Identität:

$$(m, \mu) = (\sqrt{m\mu}, \quad \sqrt{m\mu})\left(\sqrt{\frac{m}{\mu}}, \sqrt{\frac{\mu}{m}}\right). \qquad (14)_{13}$$

§ 14. Tschebyschev-Tensor eines Netzes

1. J. Dubnow hat die notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt, damit ein Liniennetz, das durch die Gleichung

$$a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = 0$$

gegeben ist, ein Tschebyschev-Netz darstelle. Sie besteht darin, dass der sogenannte Tschebyschev-Tensor

$$t_i = \overset{-1}{a}{}^{\alpha\beta}\left(a_{i\alpha|\beta} - \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta|i}\right) \qquad (1)_{14}$$

verschwindet. Dieser Tensor gilt für jede beliebige affine Übertragung in einem zweidimensionalen Gebiet.

Der Tschebyschev-Tensor ist invariant in bezug auf die Änderung des Faktors bei a_{ij} und ist somit eine Invariante des Netzes.

Wir wollen das Gesetz finden, wie sich der Tschebyschev-Tensor erster Art des Netzes bei einer projektiven Transformation eines Übertragungspaares ändert.

Bezeichnen wir mit

$$\sigma^k_{ij} = \overline{G}^k_{ij} - G^k_{ij},$$

so ergibt sich

$$\nabla_k a_{ij} = \overline{\overline{\nabla}}_k a_{ij} + \sigma^\lambda_{ki} a_{\lambda j} + \sigma^\lambda_{kj} a_{i\lambda},$$

woher

$$t_i = \overline{t}_i + \overline{a}^{\alpha\beta}\sigma^{\lambda}_{\alpha\beta}a_{i\lambda},$$

oder entsprechend $(1)_{13}$

$$t_i = \overline{t}_i + 2\nabla_i \lg m - \overline{a}^{\alpha\beta}b^{\lambda\alpha}a_{\lambda i}\nabla_\alpha \lg \mu. \qquad (2)_{14}$$

Die Formel nimmt für konjugierte und asymptotische Netze eine besonders einfache Form an. Beginnen wir mit den konjugierten Netzen. Beachten wir die Bedingung für die Konjugiertheit

$$\overline{a}^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = 0,$$

so ist

$$t_i = \overline{t}_i + 2\nabla_i \lg m. \qquad (3)_{14}$$

Wir bringen die wichtigsten Folgerungen:

1. Bei einer Transformation zweiter Art, ist der Tschebyschev-Tensor eines konjugierten Netzes invariant.

2. Das Gesetz seiner Umformung ist von dem Netz unabhängig, so dass die Differenz der Tschebyschev-Tensoren zwei konjugierten Netze, eine Invariante einer beliebigen Transformation darstellt.

3. Da der Ausdruck $t_{[i/j]}$ nicht von den Parametern der absoluten Differenzierung abhängt, und die alternierte Derivierte $\nabla_i \lg m$ verschwindet, so ist

$$\overline{t}_{[i/j]} = t_{[i/j]}, \qquad (4)_{14}$$

so dass die alternierte Derivierte des Tschebyschev-Tensors eines konjugierten Netzes eine Invariante der projektiven Transformation darstellt.

Wir nehmen an, dass für irgendein konjugiertes Netz

$$t_{[i/j]} = 0 \qquad (5)_{14}$$

ist, so dass ihr Tschebyschev-Tensor ein Gradient sein muss.

Dann lässt sich die Funktion m so wählen, dass

$$\overline{t}_i = t_i - 2\nabla_i \lg m = 0$$

wird. Daraus folgt: Wenn der Tschebyschev-Tensor erster Art eines konjugierten Netzes ein Gradientvektor ist, so lässt sich dieses Netz durch eine angemessene Transformation der Übertragung in ein Tschebyschev-Netz derselben Art oder in ein geodätisches Netz anderer Art überführen. Zur Interpretierung schreiben wir die Laplacesche Gleichung dieses Netzes auf und setzen letztes als das Koordinatennetz fest:

$$\partial_{12}x = G^1_{12}\partial_1 x + G^2_{12}\partial_2 x + p_{12}x.$$

Die Koordinaten des Tensors eines Tschebyschev-Netzes erhalten wir unter der Annahme, dass

$$a_{11} = a_{22} = 0,$$

woher

$$\begin{aligned} t_1 &= \overset{\smile}{a}{}^{12}(a_{12/2} + a_{22/1} - a_{12/2}) = 2G^1_{12}, \\ t_2 &= \phantom{\overset{\smile}{a}{}^{12}(a_{12/2} + a_{22/1} - a_{12/2})} = 2G^2_{12}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $(5)_{14}$ nimmt dann die folgende Form:

$$\partial_2 G^1_{12} - \partial_1 G^2_{12} = 0,$$

an, welche die Gleichheit der Laplaceschen Punktinvarianten des Netzes erweist.

Auf diese Weise lässt sich ein konjugiertes Netz gleicher Laplacescher Punkt- (Tangential-) Invarianten stets durch eine entsprechende Ergänzung der Fläche zu einem Tschebyschev-Netz erster (zweiter) Art und folglich zu einem geodätischen Netz zweiter (erster) Art machen.

Betrachten wir nunmehr einen Tschebyschev-Tensor eines asymptotischen Netzes.

Infolge der Gleichungen Codazzis, denen der Tensor b_{ij} unterworfen ist, erhalten wir aus $(1)_{14}$:

$$T_i = \frac{1}{2} b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta i}, \tag{6$_{14}$}$$

oder anders ausgedrückt

$$T_i = \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\cdot\,;\alpha i}. \tag{7$_{14}$}$$

Nehmen wir an, dass das betrachtete Paar ein inhaltstreues Paar ist, und suchen wir die logarithmische Derivierte des Verhältnisses der Flächen mittlerer Metrik und erster Art:

$$\frac{\sqrt{b}\, du^1\, du^2}{s\, du^1\, du^2} = \frac{\sqrt{b}}{s} = \sqrt{s^{\alpha\beta} s^{\lambda\mu} b_{\alpha\lambda} b_{\beta\mu}},$$

$$\nabla \lg\left(\frac{\sqrt{b}}{s}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{s^2}{b}\cdot 2 s^{\alpha\beta} s^{\lambda\mu} b_{\beta\mu/i} = b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta},$$

so dass

$$T_i = \frac{1}{2} \nabla_i \lg\left(\frac{\sqrt{b}}{s}\right), \tag{8$_{14}$}$$

d. h. der Tschebyschev-Tensor erster Art des asymptotischen Netzes eines inhaltstreuen Paares ist gleich der Hälfte der logarithmischen Derivierten des Verhältnisses entsprechender Flächen mittlerer Metrik und erster Art.

Das Gesetz der projektiven Transformation dieses Tensors erhalten wir, wenn wir in $(2)_{14}$ setzen $a_{ij}=b_{ij}$ und hieraus

$$T_i = \overline{T}_i + 2\nabla_i \lg\left(\frac{m}{\mu}\right). \qquad (9)_{14}$$

Eine unmittelbare Folgerung dieser Formel ist folgender Satz: Der Tschebyschev-Tensor eines asymptotischen Netzes ist eine Invariante einer symmetrischen Transformation.

Im Falle der Inhaltstreue ist der Tensor T_i, wie $(8)_{14}$ zeigt, ein Gradient. Bringt man die Transformation $(m; n)$ in Ansatz, für welche

$$2\nabla_i \lg\left(\frac{m}{\mu}\right) = \frac{1}{2}\nabla_i \lg\left(\frac{\sqrt{b}}{s}\right)$$

oder

$$\frac{m}{\mu} = \left(\frac{\sqrt{b}}{s}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad (9)'_{14}$$

so erhalten wir

$$\overline{T}_i = 0,$$

d. h. das asymptotische Netz eines inhaltstreuen Paares kann durch eine projektive Transformation in eine Tschebyschev-Netz transformiert werden.

§ 15. Fubinische Paare

1. Nennen wir ein konjugiertes Paar von Übertragungen ein Fubini-Paar, wenn sein asymptotisches Netz zugleich auch ein Tschebyschev-Netz beider Arten darstellt.

Damit ein Paar ein Fubini-Paar ist, genügt es, gemäss dem Resultat des § 3, dass das asymptotische Netz dieses Paares ein Tschebyschev-Netze beliebiger Art darstellt.

Die grundlegende Bestimmungsgleichung:

$$T_i = 0, \qquad (1)_{15}$$

kann eine Reihe anderer Interpretationen erfahren.

2. Aus $(6)_{14}$ folgt

$$b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta i} = 0, \qquad (2)_{15}$$

was auf eine Apolarität der asymptotischen und der Tangentenrichtungen zu den Linien B hinweist.

3. Aus $(7)_{14}$ bekommen wir

$$S^{\alpha}_{\cdot\,,\,\alpha i}=0. \tag*{$(3)_{15}$}$$

Der Tensor $S_{i,\,jk}$ ist also symmetrisch.

4. Um ein zweites Merkmal zu finden, betrachten wir die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} b^{\alpha}_{i} b^{\beta}_{j} b^{\gamma}_{k} b_{\alpha\beta\gamma} &= S_{i,\,\beta\gamma} b^{\beta}_{j} b^{\gamma}_{k} = S_{\beta,\,i\gamma} b^{\beta}_{j} b^{\gamma}_{k} + L_{\beta i} S^{\cdot\,\alpha}_{\alpha\cdot\gamma} b^{\beta}_{j} b^{\gamma}_{k} = \\ &= b_{i\beta\gamma} b^{\beta}_{j} b^{\gamma}_{k} + S^{\alpha}_{\cdot\alpha\gamma} b^{\gamma}_{k} b_{ij} = S_{k,\,ij} + S^{\alpha}_{\cdot,\,\alpha\gamma} b^{\gamma}_{k} b_{ij}. \end{aligned}$$

Infolge der Symmetrie des Tensors $S^{\alpha}_{\cdot,\,jk}$ im Falle eines F-Paares erhalten wir:

$$b^{\alpha}_{i} b^{\beta}_{j} b^{\gamma}_{k} b_{\alpha\beta\gamma} = S_{i,\,jk}. \tag*{$(4)_{15}$}$$

Möge v^i ein Tagentenvektor zur Linie S sein, dann ist

$$b^{\alpha}_{\lambda} b^{\beta}_{\mu} b^{\gamma}_{\nu} b_{\alpha\beta\gamma} v^{\lambda} v^{\mu} v^{\nu} = S_{\lambda,\,\mu\nu} v^{\lambda} v^{\mu} v^{\nu} = 0,$$

d. h. liegt ein F-Paar vor, so sind die Richtungen S mit den Richtungen B konjugiert.

Um festzustellen, ob die letzte Bedingung hinreichend ist, betrachten wir die für jedes beliebige Paar gültige Identität:

$$b^{\alpha}_{\lambda} b^{\beta}_{\mu} b^{\gamma}_{\nu} b_{\alpha\beta\gamma} v^{\lambda} v^{\mu} v^{\nu} = S_{\alpha,\,\beta\gamma} v^{\alpha} v^{\beta} v^{\gamma} + S^{\alpha}_{\cdot,\,\alpha\gamma} b^{\gamma}_{\lambda} v^{\lambda} b_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}.$$

Wenn das Vektor v^i eine beliebige Richtung S darstellt und die ersten zwei Glieder verschwinden, so muss für jede beliebige Richtung die Beziehung

$$S^{\alpha}_{\cdot,\,\alpha\gamma} b^{\gamma}_{\lambda} v^{\lambda} b_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 0$$

gelten.

Hieraus folgt, dass entweder $S^{\alpha}_{\cdot,\,\alpha i}=0$ oder

$$S_{(i,\,jk)} = \lambda S^{\alpha}_{\cdot,\,\alpha\gamma} b^{\gamma}{}_{(i} b_{jk)}$$

ist; wobei im letzten Fall beide asymptotischen Linien mit der Linie S zusammenfallen, d. h. das Paar bilinear ist.

Somit gilt: Wenn die Linien S zu den Linien B konjugiert sind, so ist das Paar entweder bilinear oder ein F-Paar.

5. Differenziert man den Tensor L_{ij}, so erhält man:

$$L_{ij|k} = \partial_k L_{ij} - G^{\alpha}_{ik} L_{\alpha j} - G^{\alpha}_{jk} L_{i\alpha} = \partial_k L_{ij} - \mathfrak{z}^{\alpha}_{ik} L_{\alpha j} - \mathfrak{z}^{\alpha}_{jk} L_{i\alpha} + \frac{1}{2}\left(S_{i,\,jk} + S_{[i,\,j]k}\right)$$

oder

$$L_{ij,\,k} = \frac{1}{2} S_{[i,\,j]k}, \tag*{$(5)_{15}$}$$

was im Falle eines F-Paares

$$L_{ij/k}=0 \tag{6$_{15}$}$$

ergibt.

Hieraus folgt erstens, dass jedes F-Paar inhaltstreu ist.

Benutzen wir ietzt die Formel $(8)_{14}$, dann erhalten wir, da $T_i=0$ ist,

und analog

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{b}&=c\cdot s\\ \sqrt{\bar{b}}&=c\cdot\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{7$_{15}$}$$

Damit ein Paar ein F-Paar bildet ist notwendig und hinreichend, dass sich die entsprechenden Flächen erster und zweiter Art und mittlerer Metrik in einem konstanten Verhältnis befinden.

Wählen wir in entsprechender Weise die Masseinheiten, so können wir für das F-Paar ein gemeinsames Flächenmass für alle drei Übertragungen festlegen.

Das Anwendungsbereich der F-Paare fällt mit der Theorie der Konfigurationen zusammen, die Fubini und Čech als Grundlage für ihre Theorie der Flächen benutzten. Die Normierung der Tangentialebene der Fläche wird in diesem Fall durch Normierung des Punktes bestimmt. Die Grundgleichungen haben die Form:

$$\partial_j x_i=(\alpha^\alpha_{ij}+b^{\alpha\beta}A_{\beta ij})\,\partial_\alpha x+p_{ij}x+b_{ij}x\ [1]$$

und der symmetrische Tensor A_{ijk} ist zu dem Tensor b_{ij} apolar:

$$b^{\alpha\beta}A_{\beta ij}=0,$$

andererseits ist aber evident, dass

$$b^{k\alpha}A_{\alpha ij}=\frac{1}{2}S^{k}_{\cdot,ij},$$

woher

$$A_{ijk}=-\frac{1}{2}b_{ijk}.$$

Ausserdem wird die Apolaritätsbedingung befriedigt, was darauf hinweist, dass wir ein F-Paar vor uns haben.

Wenn x so normiert ist, dass es die karthesischen Koordinaten des Punktes in einem affinen Raume darstellt, und die inneren Geometrien ein F-Paar bilden, so ist die Normale erster Art der betreffenden Konfiguration eine affine Normale zur Grundfläche, im Sinne von Blaschke [2].

[1] Fubini-Čech, Geom. Proiettiva Diff., § 14, B., f. (1).

[2] Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, II.

§ 16. Kanonische Serie

Betrachten wir irgendein inhaltstreues Paar. Im § 14 wurde gezeigt, dass das asymptotische Netz eines solchen Paares mit Hilfe einer projektiven Transformation in ein Tschebyschev-Netz transformiert werden kann.

Auf diese Weise, kann jedes inhaltstreue Paar in ein Fubini-Paar transformiert werden.

Dafür genügt, wie gezeigt wurde, der Ansatz einer beliebigen Transformation (m, μ), für welche

$$\frac{m}{\mu} = \left(\frac{\sqrt{b}}{s}\right)^{\frac{1}{4}}. \qquad (1)_{16}$$

Da der Tchebyschev-Vektor asymptotischer Linien eine Invariante einer symmetrischen Transformation darstellt, so führt diese Transformation ein F-Paar wieder in ein F-Paar über. Infolgedessen kann jedes inhaltstreue Paar in ein F-Paar auf unendlich viele Weisen übergeführt werden. Hierbei verfügt man frei über die Wahl einer Funktion zweier Argumente.

Die Gesamtheit aller F-Paare, die man aus ein und demselben inhaltstreuen Paar erhalten kann, werden wir als die kanonische Serie der F-Paare des betreffenden inhaltstreuen Paares bezeichnen.

Da die projektive Transformation eines Paares eine Gruppe bildet, so muss jeden zwei inhaltstreuen Paaren, die voneinander durch eine solche Transformation herleitbar sind, ein und dieselbe kanonische Serie entsprechen. Auf diese Weise ist die kanonische Serie in bezug auf jede projektive Transformation invariant.

Bezeichnen wir mit Segre-Tensor eines gegebenen Paares den Tensor $\overset{*}{S}{}^{i}_{\cdot,jk}$ eines beliebigen Paares der kanonischen Serie, die dem gegebenen Paar entspricht, und mit Segre-Linien die Null-Linien dieses Tensors.

Um den Ausdruck für den Segre-Tensor zu erhalten, betrachten wir die Transformation (m, n), die das gegebene Paar in ein F-Paar überführt. Nach $(1)_{16}$ und $(8)_{14}$ ist

$$\overset{*}{\nabla}_i \lg\left(\frac{\mu}{m}\right) = -\frac{1}{2}\nabla_i \lg\left(\frac{\sqrt{b}}{s}\right) = \frac{1}{2}T_i,$$

und die Formel $(8)_{13}$ ergibt

$$4\overset{*}{S}{}^{i}_{\cdot\cdot jk} = 4S^{i}_{\cdot\cdot jk} - \delta^{i}_{(j}T_{k)} - b_{kj}b^{i\alpha}T_{\alpha}. \qquad (2)_{16}$$

Da die rechte Seite bezüglich einer beliebigen symmetrischen Transformation invariant ist, so wird der Segre-Tensor für alle Paare der kanonischen

Serie ein und derselbe sein. Andererseits ist die kanonische Serie selbst in bezug auf eine beliebige projektive Transformation invariant. Hieraus folgt, *der Segre-Tensor und folglich auch die Segre-Linien sind invariant in bezug auf eine beliebige projective Transformation. Wir bezeichnen mit Darboux-Linien des gegebenen Paares, die B-Linien irgendeines beliebigen Paares der entsprechenden kanonischen Serie.*

Die Invarianz der Darboux-Linien bei einer beliebigen Transformation folgt daraus, dass die Richtungen dieser Linien zu den Richtungen der Segre-Linien konjugiert sind, wie im § 15 gezeigt wurde.

Wir werden genau, wie bei der Ableitung von $(2)_{16}$, zeigen, dass diese Linien zu Null-Linien des Tensors

$$4b_{ijk} - b_{ij}T_k - b_{jk}T_i - b_{ki}T_j \tag*{$(3)_{16}$}$$

werden, der aber bei einer projektiven Transformation einen gewissen Faktor erhält.

Betrachten wir die Invariante

$$\overset{*}{J} = \frac{1}{8}\, \breve{b}^{\alpha}_{\beta}\, \overset{*}{S}{}^{\lambda}_{\cdot\,\cdot\,\mu\alpha}\, \overset{*}{S}{}^{\beta}_{\cdot\,\cdot\,\lambda\,\cdot}{}^{\mu}_{\cdot}. \tag*{$(4)_{16}$}$$

Da der Tensor $\overset{*}{S}{}^{i}_{\cdot\,jk}$ invariant ist, und die Tensoren L_{ij} und L^{ij}, mit deren Hilfe der Index β gesenkt und der Index μ gehoben wurde, bei der Transformation, der Grösse nach, reziproke Faktoren erhalten haben, so muss bei der Transformation $\overset{*}{J}$ selbst mit einem Faktor multipliziert werden. Dieser Faktor ist mit dem Faktor identisch, den dabei der Tensor $\breve{b}^{ij}$ erhält. Somit ist bei einer Transformation (m, μ):

$$\overset{*}{J} = (m\mu)^{-1}\overset{*}{J}. \tag*{$(5)_{16}$}$$

Im Falle, dass $\overset{*}{J} \neq 0$, kann man im Sinne Fubini's eine einfache Methode zur Eliminierung des einzigen *kanonischen Paares* aus einer kanonischen Serie angeben [1].

Nennen wir ein F-Paar von Übertragungen, für das

$$\overset{*}{J} = \text{konst.} \tag*{$(6)_{16}$}$$

ist, ein *projektives Paar.*

Jedem inhaltstreuen Paar von Übertragungen entspricht ein einziges projektives Paar, das der bezüglichen kanonischen Serie angehört, falls $\overset{*}{J} \neq 0$. Um ein dem gegebenen entsprechendes projektives Paar zu finden, genügt es, irgendein Paar der zugehörigen kanonischen Serie einer symmetrischen Trans-

[1] Fubini-Čech, Geom. Proiettiva Diff., I, § 15, D.

formation zu unterwerfen:

$$\left(\frac{m}{\sqrt{\pm \overset{*}{J}}}, \frac{m}{\sqrt{\pm \overset{*}{J}}}\right).$$

Wählt man das Vorzeichen von $\overset{*}{J}$ so, dass keine komplexe Faktoren auftreten, dann erhält man nach der Transformation offenbar

$$J = \pm 1.$$

Im Falle $\overset{*}{J} = 0$ verlieren die vorangehenden Ausführungen ihre Kraft da diese Gleichung bei einer symmetrischen Transformation erhalten bleibt.

§ 17. Lineare Paare

Betrachten wir ein F-Paar, für welches

$$J = \overset{*}{J} = 0 \qquad (1)_{17}$$

wird. Vergleichen wir diese Gleichung mit der Bedingung $(12)_5$, so bekommen wir infolge $(11)_5$

$$S_{i,\,jk} = a_{ij}\lambda_k + a_{ki}\lambda_j - a_{kj}\lambda_i.$$

Beachten wir jetzt die Symmetrie des Tensors $S_{i,\,jk}$, so erhalten wir;

$$a_{k\alpha}\lambda^\alpha = 0,$$

was nur im Fall

$$a_{kj} = \lambda_k\lambda_j$$

möglich ist.

Es ist also

$$S_{i,\,jk} = \lambda_i\lambda_j\lambda_k, \qquad (2)_{17}$$

ausserdem zeigt die Gleichung

$$b^{\alpha\beta}S_{\alpha,\,\beta k} = b^{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_k = 0,$$

dass der Vektor λ_i längs einer asymptotischen Linie gerichtet ist. Folglich; Wenn die Invariante eines F-Paares verschwindet, so fallen alle Segre-Linien miteinander und mit einer der asymptotischen Linien zusammen. Folglich fallen mit der letzten auch alle drei Darboux-Linien zusammen.

Daraus ergibt sich sofort, dass dieselbe Linie ausserdem noch eine dreifache geodätische Linie darstellt und dass das betrachtete Paar ein lineares Paar ist.

Beweisen wir das Umgekehrte unter der Annahme, dass das betreffende Paar linear ist.

Da eine asymptotische Linie zur selben Zeit auch eine Segre-Linie darstellt, ist

$$b_{ij} = \mu_{(i}\lambda_{j)}$$

und

$$S_{\alpha\beta\gamma}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}\lambda^{\gamma} = 0,$$

es ist aber

$$b^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta i} = \lambda^{\alpha}\mu^{\beta}S_{\alpha\beta i} = 0$$

oder

$$S_{ij\alpha}\lambda^{\alpha} = \nu_{(i}\mu_{j)}.$$

Falten wir wiederum mit b^{ij}, so erhalten wir:

$$b^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\mu_{\beta} = 0,$$

woher

$$S_{ij\alpha}\lambda^{\alpha} = a\mu_i\mu_j,$$

endlich

$$S_{\alpha\beta\gamma}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}\lambda^{\gamma} = a\mu_{\alpha}\lambda^{\alpha}\mu_{\beta}\lambda^{\beta} = 0$$

oder

$$a = 0,$$

so dass

$$S_{ij\alpha}\lambda^{\alpha} = 0,$$

woher

$$S_{ijk} = \beta\lambda_i\lambda_j\lambda_k \quad \text{usw.}$$

Die Gleichung $(1)_{17}$ ergibt also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Paar linear ist.

Zeigen wis jetzt, dass die Eigenschaft linear zu sein ein invariantes Faktum in bezug auf eine projektive Transformation darstellt. In der Tat, nehmen wir an, dass λ^i ein Vektor ist, der nach einer Geraden des Paares gerichtet ist. Dann gilt für ihn die Bedingung

$$(\nabla_{\alpha}\lambda^i)\,\lambda^{\alpha} = \omega\lambda^i,$$

da hier eine geodätische Linie vorliegt, unterwerfen wir die linke Seite der Transformation (m, μ), dann ist

$$\nabla_{\alpha}\lambda^i\lambda^{\alpha} = \overline{\nabla}_{\alpha}\lambda^i\lambda^{\alpha} - (\overline{G}^i_{\alpha\beta} - G^i_{\alpha\beta})\,\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} =$$

$$= \overline{\nabla}_{\alpha}\lambda^i\lambda^{\alpha} - [\delta^i_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\lg m - b_{\alpha\beta}b^{i\lambda}\nabla_{\lambda}\lg\,\mu]\,\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} = \overline{\nabla}_{\alpha}\lambda^i\lambda^{\alpha} + \sigma\lambda^i,$$

woher

$$\overline{\nabla}_{\alpha}\lambda^i\lambda^{\alpha} = \overline{\omega}\lambda^i.$$

Hieraus folgt das die Gleichung $\dot{J} = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die Linearität eines beliebigen Paares darstellt.

Wir wollen noch eine Eigenart linearer F-Paare in Betracht ziehen. Ein asymptotisches Netz bildet, wie bekannt, ein Tschebyschev-Netz, und gerade

Linien bilden geodätische Linien. Man kann vom Viereck Gebrauch machen, das von zwei Geraden und zwei asymptotischen Linien einer anderen Schar gebildet wird, um eine parallele Umführung des nach der Geraden gerichteten Vektors zu vollführen, nach welcher seine Richtung unverändert bleibt.

Hieraus folgt gemäss dem Resultat im § 7:

Die gerade Linie eines linearen F-Paares ist eine absolute Linie beider Übertragungen.

Da die Tensoren R_{ij} und ρ_{ij} eine gemeinsame Null-Linie besitzen, eine Gerade, so muss der Tensor $C_{ij}=R_{ij}-\rho_{ij}$ dieselbe Null-Linie haben. Er muss aber, hiergegen, ein konjugiertes Netz bestimmen, während die angemerkte Null-Linie eine asymptotische ist. Daraus folgt, dass der Tensor ausarten muss.

Die Form

$$C_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$$

bildet ein vollständiges Quadrat und ihre einzige Null-Linie fällt mit der geraden Linie des Paares zusammen.

Betrachten wir schliesslich bilineare Paare. Zuerst untersuchen wir ein F-Paar. Für jedes lineares F-Paar muss die Form $S_{\alpha\beta\gamma}du^\alpha du^\beta du^\gamma$ einen vollständigen Kubus darstellen, andererseits muss jede der asymptotischen Linien eine Segre-Linie darstellen. Diese beiden Eigenschaften können aber nicht zusammen statt haben, wenn die Segre-Linien nicht unbestimmt werden sollen. Auf diese Weise muss der Tensor S_{ijk} des betrachteten Paares verschwinden, womit sich das Paar selbstkonjugiert zeigt.

Für ein beliebiges lineares inhaltstreues Paar bekommen wir infolgedessen aus $(2)_{17}$:

$$4S^i_{.jk}=\delta^i_{(j}T_{k)}-b_{jk}b^{i\alpha}T_\alpha \qquad (3)_{17}$$

oder

$$4b_{ijk}=b_{ij}T_k+b_{jk}T_i+b_{ki}T_j. \qquad (4)_{17}$$

Jede von diesen Bedingungen ist notwendig und hinreichend, damit ein inhaltstreues Paar bilinear ist.

§ 18. Affine Länge

Wenn die euklidische affine Ebene auf ein krummliniges Koordinatensystem bezogen wird und die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren v^i und w^i gebildet, durch eine bilineare Form:

$$L_{\alpha\beta}v^\alpha w^\alpha, \qquad (1)_{18}$$

bestimmt wird, so ist der Tensor L_{ij} antisymmetrisch und seine kovariante Ableitung verschwindet:

$$L_{ij\,|\,k}=0.$$

Die affine Länge ds eines Kurvenelementes du^i wird in diesem Fall durch die Formel:

$$ds^3 = L_{\alpha\beta}\, du^\alpha \nabla du^\beta,$$

bestimmt, oder

$$ds^3 = du^\alpha \nabla du_\alpha,$$

falls man den Tensor L_{ij} $(1)_{18}$ benutzt um die Indizes zu senken. Wir wollen jetzt annehmen, dass eine willkürliche inhaltstreue Übertragung vorliegt. Wir wollen, gemäss der Definition die Grösse s, die durch die Formel $(1)_{18}$ bestimmt wird, als d i e a f f i n e L ä n g e d e r K u r v e b e z e i c h n e n.

Von den Eigenschaften der auf diese Weise definierten Invariante bemerken wir vor Allem, dass diese für d i e g e o d ä t i s c h e L i n i e i d e n t i s c h v e r s c h w i n d e t, da in diesem Fall die Vektoren ∇du^i und du^i kollinear werden.

Im Falle eines Paares konjugierter Übertragungen vom F-Typus, für welches ein gemeinsames Flächenmass festgelegt ist, sind mit jeder Kurve drei Arten affiner Längen verknüpft:

$$\left.\begin{aligned} &\text{A. Länge erster Art} \\ &\qquad ds_1^3 = du^\alpha \nabla du_\alpha. \\ &\text{B. Länge zweiter Art} \\ &\qquad ds_2^3 = du^\alpha \nabla du_{(\alpha)}. \\ &\text{C. Länge mittlerer Metrik} \\ &\qquad ds_3^3 = du^\alpha \overset{0}{\nabla} du_\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)_{18}$$

Diese Längen sind miteinander durch folgende evidente Beziehung verbunden:

$$ds_3^3 = \frac{1}{2}(ds_1^3 + ds_2^3). \qquad (3)_{18}$$

Die letzte Formel, auf die geodätische Linie mittlerer Metrik angewandt, ergibt infolge $ds_3 = 0$

$$ds_1^3 = - ds_2^3, \qquad (4)_{18}$$

d. h., d i e a f f i n e n L ä n g e n e r s t e r u n d z w e i t e r A r t d e r g e o d ä t i s c h e n L i n i e m i t t l e r e r M e t r i k k ö n n e n s o g e w ä h l t w e r d e n, d a s s s i e s i c h n u r d u r c h i h r V o r z e i c h e n u n t e r s c h e i d e n.

Betrachten wir die Differenz der dritten Potenzen der affinen Längenelemente der ersten und der zweiten Art einer Kurve

$$ds_2^3 - ds_1^3 = du^\alpha (-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + G^{\ \gamma}_{\alpha\beta})\, du^\beta du_\gamma$$

oder

$$ds_2^3 - ds_1^3 = S_{\alpha\beta\gamma} du^\alpha du^\beta du^\gamma. \qquad (5)_{18}$$

Somit gilt: für alle Kurven, die duch einen gegebenen Punkt gehen und die in ihm ein Tangentialelement du^i besitzen, ist die Differenz der dritten Potenzen der affinen Längenelemente der ersten und der zweiten Art dieselbe, nämlich lässt sie sich durch die kubische Form in bezug auf die Variable du^i ausdrücken, welche Koeffizienten besitzt, die den Tensorkomponenten S_{ij}^k gleich sind.

Mit Hilfe des Begriffs der affinen Längen ist es möglich eine Interpretation der Invariante J zu geben.

Zu diesem Zweck leiten wir einige auf die asymptotischen Linien bezügliche Identitäten ab.

Mögen u^i und v^i zwei verschiedene asymptotische Linien tangieren, dann ist

$$b_{ij} = \lambda u_{(i} v_{j)}.$$

Falten wir nicht b_{ij}, so erhalten wir:

$$2 = 2\lambda b^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta.$$

Möge σ die Fläche des auf unseren Vektoren konstruierten Parallelograms sein.

Wenden wir darauf die bekannte Lagrangesche Identität an:

$$\sigma^2 = (u^\alpha v_\alpha)^2 = b_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta b_{\lambda\mu} u^\alpha v^\mu - (b_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta)^2$$

oder

$$\sigma = i b_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta,$$

woher

$$b_{ij} = -\frac{i}{\sigma} u_{(i} v_{j)}. \tag{6)$_{18}$ \quad (6}$$

Die Invariante kann im Fall eines F-Paares, wofür (4) gilt, auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$J = \frac{1}{8} b^{\alpha\beta} b_{\alpha\lambda\mu} b_{\beta}^{\cdot\lambda\mu} = \frac{1}{8} S^{\beta}_{\cdot\lambda\mu} b_{\beta\cdot\cdot}^{\cdot\lambda\mu} = \frac{1}{8} b^{\alpha\beta} b^{\lambda\mu} b^{\sigma\rho} S_{\alpha\lambda\sigma} S_{\beta\mu\rho}, \qquad (7)_{18}$$

oder auf Grund von $(6)_{18}$ und $(6)_5$

$$J = -\frac{1}{8}\left(-\frac{i}{\sigma}\right)^3 u^{(\alpha} v^{\beta)} u^{(\lambda} v^{\mu)} u^{(\sigma} v^{\rho)} S_{\alpha\lambda\sigma} S_{\beta\mu\rho} =$$

$$= \frac{i}{4\sigma^3} \cdot S_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta u^\gamma S_{\lambda\mu\nu} v^\lambda v^{(\mu} v^{\nu)}. \qquad (8)_{18}$$

Nehmen wir jetzt an, dass die Vektoren u^i und v^i kanonische Tangentenvektoren der Asymptotenlinien sind, für einen Kurvenparameter der dem affinen Bogen erster Art gleich ist

$$u^i = \frac{du^i}{ds_1}; \quad v^i = \frac{du^i}{ds_2}.$$

Bei Ersetzung von ds_1 durch ds_2 wechseln die Vektoren nur das Vorzeichen.

Die Asymptotenlinien sind geodätische Linien mittlerer Metrik, und für diese gilt infolge der Gleichung

$$ds_1^3 + ds_2^3 = 0;$$

die Beziehung

$$ds_1^3 - ds_2^3 = -S_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma = 2ds_1^3,$$

oder für kanonische Vektoren:

$$S_{\alpha\beta\gamma}\, u^\alpha u^\beta u^\gamma = S_{\lambda\mu\nu} v^\lambda v^\mu v^\nu = -2.$$

Vergleichen wir das Letzte mit $(8)_{18}$, so erhalten wir:

$$J = \frac{i}{\sigma^3}. \qquad (9)_{18}$$

Somit ist Invariante J eines Paares F gleich der imaginären Einheit dividiert durch die dritte Potenz der Fläche des Parallelogramms, welches auf den kanonischen Tangentenvektoren der Asymptotenlinien konstruiert ist; wobei die letzten in bezug auf affine Längen beliebiger Art genommen sind.

§ 19. Über ein spezielles Paar von Übertragungen

Betrachten wir ein Paar von Übertragungen von F-Typus, in welchem die Grösse

$$ds_2^3 - ds_1^3 = S_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha du^\beta du^\gamma$$

bei einer Parallelübertragung der mittleren Metrik erhalten bleibt, so dass

$$\overset{0}{\nabla} S_{ijk} = 0. \qquad (1)_{19}$$

Zwecks grösserer Bestimmtheit, nehmen wir ausserdem an, dass alle drei Nullrichtungen S_{ijk} verschieden sind.

Indem wir die Gleichung:

$$S_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0$$

differenzieren, erhalten wir:

$$S_{\alpha\beta\gamma}\, v^\alpha v^\beta \overset{0}{\nabla} v^\gamma = 0,$$

woraus

$$\overset{0}{\nabla} v^i = \lambda v^i. \qquad (2)_{19}$$

Hieraus folgt, dass alle Null-Linien geodätische und zwar dreifache geodätische Linien darstellen. So sehen wir also von vornherein, dass das betrachtete Paar von Übertragungen, wenn es existiert, drei verschiedene Scharen dreifacher geodätischer Linien zulässt.

Weiterhin, ziehen wir in Betracht, dass $(2)_{19}$ auf die Erhaltung der Richtung, bei einer Differenzierung in eine beliebige Richtung, hinweist, so sehen wir, dass die mittlere Metrik die Existenz von drei verschiedenen Feldern absolut paralleler Vektoren zulässt, die nur längs der absoluten Linien der Übertragungen gerichtet sein können. Die absoluten Linien einer mittleren Übertragung müssen also unbestimmt sein, so dass

$$K=0. \tag{3$_{19}$}$$

Andererseits zeigt die Formel $(16)_7$ dass in unserem Fall

$$\rho_{ij}-R_{ij}=\overset{0}{\nabla}_\alpha S^{\alpha}_{\cdot ij}=0, \tag{4$_{19}$}$$

woher aus $(7)_7$

$$\rho_{ij}=Hb_{ij}; \quad R_{ij}=Hb_{ij}, \tag{5$_{19}$}$$

weiterhin ist

$$J_k=\frac{1}{8}\overset{0}{\nabla}_k(b^{\alpha\beta}S_{\alpha\lambda\mu}S^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\alpha})=0, \tag{6$_{19}$}$$

doch infolge von $(3)_{19}$ erhalten wir $J=$ konst.

$$J=H, \tag{7$_{19}$}$$

oder

$$H=\text{konst.} \tag{8$_{19}$}$$

Differenzieren wir $(5)_{19}$ so erhalten wir

$$R_{i\alpha j.}{}^{\alpha}=0; \quad \rho_{(i j)(\alpha)/.}{}^{\alpha}=0. \tag{9$_{19}$}$$

Hieraus folgt, dass die Geometrien beider Art[1] projektive euklidische Geometrien sind.

Verweilen wir noch zum Schluss an der Verteilung der dreifachen geodätichen Linien, indem wir sie vermittelst der Ausdrücke der mittleren Metrik charakterisieren

Es sei $S_{ijk}=\lambda u_{(i}v_j w_{k)}$, wo u^i, v^i, w^k tangentiale Einheitsvektoren der Linien S_{ijk} sind. Aus der Bedingungsgleichung $(6)_5$ folgt

$$b^{\alpha\beta}u_\alpha v_\beta w_i+b^{\alpha\beta}v_\alpha w_\beta u_i+b^{\alpha\beta}w_\alpha u_\beta v_i=0,$$

oder

$$w_i\cos(u,\ v)+v_i\cos(u,\ w)+u_i\cos(v,\ w)=0.$$

Beachten wir, dass es sich um Einheitsvektoren handelt, so erhalten wir, dass die dreifachen geodätichen Linien drei Scharen paralleler Geraden bilden, die miteinander einen Winkel von 120° einschliessen.

О ПАРАХ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕНЕСЕНИЙ

А. П. Норден. (Москва)

Если x и ξ представляют соответственно однородные координаты точки и касательной плоскости поверхности s, а X и Ξ точку и касательную плоскость двух других поверхностей, причем конгруэнция прямых, соединяющих точки x и X, сопряжена поверхности s, а конгруэнция прямых пересечения плоскостей ξ и Ξ ей гармонична, то для величин x, ξ, X и Ξ можно указать однозначно определенное, каноническое нормирование.

Величины G_{ij}^k и Γ_{ij}^k в разложениях:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{u^i \partial u^j} &= G_{ij}^\alpha \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} + p_{ij} x + b_{ij} X, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^i \partial u^j} &= \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial u^\alpha} + \pi_{ij} \xi + b_{ij} \Xi, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

преобразуются как параметры параллельных перенесений при преобразованиях криволинейных координат.

При этом имеет место следующее тождество:

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - G_{ki}^\alpha b_{\alpha j} - \Gamma_{jk}^\alpha b_{i\alpha} = 0, \tag{2}$$

устанавливающее связь между геометриями этих параллельных перенесений и тензором b_{ij}, нулевые линии которого совпадают с асимптотическими линиями поверхности s.

Конфигурации, образованные поверхностью и конгруэнцией соответствующих „нормалей“, представляют частные случаи описанной конфигурации в случаях теорий поверхностей: a) проективно-диференциальной, b) аффинной (Blaschke), c) пространства постоянной кривизны), d) классической. В двух последних случаях две отмеченные геометрии совпадают с внутренней геометрией и с геометрией, определенной третьей квадратичной формой.

Будем говорить, что два параллельных перенесения G_{ij}^k и Γ_{ij}^k сопряжены, если существует тензор b_{ij}, удовлетворяющий тождеству (2). Нулевые направления этого тензора назовем асимптотическими, а направления, гармонически разделяющиеся ими, сопряженными.

Как непосредственные следствия определения получим:

1. При параллельном перенесении направления сопряженное ему переносится тоже параллельно перенесением, сопряженным данному.

2. Направление, сопряженное касательной к геодезической данного перенесения, переносится вдоль нее параллельно в сопряженном перенесении.

3. Называя чебышевской сетью сеть, у которой направление касательной к линии одного семейства переносится параллельно вдоль линии другого семейства, получим: необходимое и достаточное условие сопряженности чебышевской сети состоит в том, что она будет геодезической по отношению к сопряженному перенесению.

4. Асимптотическая линия может быть геодезической только в обоих сопряженных перенесениях.

Определяя среднее перенесение величинами:

$$\mathcal{Z}^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(G^k_{ij} + \Gamma^k_{ij}\right), \tag{3}$$

получим:

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \mathcal{Z}^\alpha_{ik} b_{\alpha j} - \mathcal{Z}^\alpha_{jk} b_{i\alpha} = 0,$$

и таким образом: среднее перенесение определяет метрическую геометрию, основным тензором которой будет b_{ij}.

Для определения пары сопряженных перенесений с помощью тензоров достаточно задать кроме b_{ij} тензор

$$S^{i}_{\cdot,\, jk} = \Gamma^k_{ij} - G^k_{ij}. \tag{4}$$

Тензорный характер этой величины позволяет показать, что если пара перенесений имеет более трех семейств общих геодезических, то перенесения совпадают между собою и со средним перенесением.

Обозначая через $R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot l}$ и $\rho_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot l}$ тензоры Riemann'а сопряженных перенесений и вводя тензоры Ricci:

$$R_{ij} = -R_{\alpha ij\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha};\ \rho_{ij} = -\rho_{\alpha ij\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}, \tag{5}$$

будем иметь:

$$R_{ij} + \rho_{ij} = 2Hb_{ij}. \tag{6}$$

Из этого равенства следует:

1. Нулевые направления тензора Ricci сопряжены нулевым направлением тензора Ricci сопряженного перенесения.

2. Сумма приращений, которые получает вектор при параллельных обводах при обоих перенесениях по замкнутому бесконечно малому контуру, сопряжена по направлению самому вектору.

Если одна из геометрий пары есть геометрия типа Inhaltstreue, то другая геометрия есть геометрия того же типа.

Площади, соответствующие тому и другому перенесению, определяющиеся в этом случае, будут связаны с соответствующей площадью среднего перенесения $\bar{S}$ так:

$$S = s \cdot \sigma. \tag{7}$$

Если одна из геометрий пары сопряженных перенесений метрическая, то другая тоже метрическая. Если обозначить через g, γ и b дискриминанты метрических форм обоих сопряженных перенесений и средней метрики, а через k и $\varkappa$ кривизны первых двух из них, то

$$\varkappa = k\frac{g}{b}; \quad k = \varkappa\frac{\gamma}{b}, \tag{8}$$

и первое из этих равенств дает теорему Gauss'а в случае $\varkappa = 1$. Наконец, если одно из перенесений евклидово-аффинное, то другое будет тоже евклидово-аффинным.

При замене каждой из конгруэнций x, X и ξ, Ξ другой, тоже соответственно сопряженной и гармоничной поверхности s, обе геометрии преобразуются.

Соответствующее преобразование пары сопряженных перенесений будем называть „проективным".

Проективное преобразование есть конформное преобразование средней метрики, которое может быть разложено на два последовательных преобразования того же типа, причем каждое из этих преобразований сохраняет геодезические линии одного или другого перенесения пары.

При этих предположениях получим следующий закон преобразования

$$\begin{gathered}
\bar{G}_{ij}^{k} = G_{ij}^{k} + \delta_{(i}^{k}\nabla_{j)} \lg m - b_{ij}\bar{b}^{k\alpha}\nabla_{\alpha} \lg \mu, \\
\bar{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + \delta_{(i}^{k}\nabla_{j)} \lg \mu - b_{ij}\bar{b}^{k\alpha}\nabla_{\alpha} \lg m, \\
b_{ij} = m\mu b_{ij},
\end{gathered}$$

где m и μ — произвольные функции u^1 и u^2. Преобразование такого типа будем называть симметричным, если $m = \mu$.

Пользуясь проективным преобразованием можно привести всякую пару сопряженных перенесений к такой паре, асимптотические линии которой образуют чебышевскую сеть по отношению к обоим перенесениям. Соответствующая конфигурация и каноническое нормирование совпадают с конфигурацией поверхности и проективных нормалей, которые Fubini и Čech кладут в основу своей теории поверхностей.