Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. НОРДЕН

О ПРОЕКТИВНО-ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 X 1944)

Известно, что пространство Вейля числа измерений $n>2$, допускающее геодезическое отображение на евклидово пространство *, есть риманово постоянной кривизны. Вейль показал ([1]), что только при $n=2$ существует нетривиальный класс пространств указанного типа, но не выразил в конечном виде определяющие его величины.

В настоящей заметке задача такого определения $(PW)_2$ решается геометрическим путем с использованием проективной интерпретации проективно-евклидовых пространств, предложенной Bortolotti ([2]).

Согласно Bortolotti, всякому проективно-евклидову пространству n измерений может быть отнесено определенное двойственное соответствие, т. е. непрерывное соответствие между точками и неинцидентными им гиперплоскостями n-мерного проективного пространства, содержащего прямолинейные отображения геодезических линий.

Основной результат, решающий поставленную задачу, состоит в следующем: *для построения двойственного соответствия, дающего по Bortolotti интерпретацию $(PW)_2$, нужно задать в проективной плоскости две произвольные «абсолютные» кривые и отнести к точке пересечения их касательных прямую, соединяющую точки прикосновения.*

Задав абсолютные кривые уравнениями

$$z=z(\sigma);\qquad \bar{z}=\bar{z}(\bar{\sigma}), \tag{1}$$

где z и $\bar{z}$ — сокращенные обозначения однородных координат их точек, а σ и $\bar{\sigma}$ — параметры, получим в области однозначного заполнения точками пересечения касательных коэффициенты связности $(PW)_2$ следующего вида

$$\Gamma^1_{11}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{A}{\bar{A}^2}\right);\quad \Gamma^2_{22}=\frac{\partial}{\partial\bar{\sigma}}\left(\frac{\bar{A}}{A^2}\right);\quad \Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}-0. \tag{2}$$

При этом величины A и $\bar{A}$ выражаются определителями, составленными из однородных координат и их производных по параметрам следующим образом:

$$A=-(z\bar{z}\dot{\bar{z}});\quad \bar{A}=-(\bar{z}\dot{z}\ddot{z}), \tag{3}$$

если координаты пронормированы так, что

$$(z\dot{z}\ddot{z})=(\bar{z}\dot{\bar{z}}\ddot{\bar{z}})=1. \tag{4}$$

---

* В дальнейшем мы будем обозначать пространства такого типа $(PW)_n$.

Если же эти координаты пронормированы и параметризованы так, что

$$z\left\{\sigma,\ w(\sigma);\ 1\right\};\quad \bar{z}\left\{\bar{\sigma}, \bar{w}(\bar{\sigma}); 1\right\}, \tag{5}$$

то

$$A=\bar{\gamma}^2\gamma\left[\dot{\bar{w}}(\bar{\sigma}-\sigma)+\bar{w}-w\right],$$
$$\bar{A}=\gamma^2\bar{\gamma}\left[\dot{w}(\sigma-\bar{\sigma})+w-\bar{w}\right], \tag{6}$$

где

$$\gamma=(\ddot{w})^{-1/3},\quad \bar{\gamma}=\left(\ddot{\bar{w}}\right)^{-1/3}.$$

Отсюда следует, что связность $(PW)_2$ зависит от двух произвольных функций одного аргумента. Чтобы задать $(PW)_2$ в общей системе координат, охарактеризуем тензоры g_{ij} и ω_k, связанные основным соотношением

$$\nabla_k g_{ij}=\omega_k g_{ij}. \tag{7}$$

Первый из них в соответствующем нормировании определяет каноническую метрику Римана, удовлетворяющую условию

$$\Delta\varphi+3a\sin\varphi=0, \tag{8}$$

где $\varphi={}^1/_2\arccos(k/a)$, k — кривизна канонической метрики, a — постоянное, а Δ — знак второго дифференциального параметра Бельтрами. При этом тензор ω_k получается поворотом на прямой угол удвоенного градиента скаляра φ. Геометрическое значенне этого скаляра состоит в том, что он равен углу между двумя векторами, один из которых переносится параллельно в канонической метрике, а другой в перенесении данного $(PW)_2$.

В координатах σ, $\bar{\sigma}$ основная форма канонической метрики имеет вид:

$$\Phi=\frac{2\left(\ddot{w}\ddot{\bar{w}}\right)^{1/3}d\sigma d\bar{\sigma}}{a\left\{\dot{w}(\bar{\sigma}-\sigma)+w-\bar{w}\right\}^{1/2}\left\{\dot{\bar{w}}(\sigma-\bar{\sigma})+\bar{w}-w\right\}^{1/2}}. \tag{9}$$

Если же принять за абсолютные кривые две мнимо сопряженные аналитические кривые, отнесенные к мнимо сопряженным параметрам, то

$$\Phi=\frac{2\left|\ddot{w}\right|d\sigma d\bar{\sigma}}{a\left|\dot{w}(\bar{\sigma}-\sigma)+w-\bar{w}\right|}. \tag{10}$$

При $w=\sigma^2$ абсолют есть кривая 2-го порядка, кривизна формы Φ постоянна, вектор $\omega_k=0$ и $(PW)_2$ есть риманово пространство постоянной кривизны.

Поступило
13 X 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Göttinger Nachrichten, S. 99 (1921). [2] E. Bortolotti, Annali di matematica p. ed ap., 11 (1932).