Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLIX, № 9

*МАТЕМАТИКА*

А. НОРДЕН

# О ПАРАХ СОПРЯЖЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНЕСЕНИЙ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 IX 1945)*

Назовем симметричный невырождающийся тензор $b_{ij}$, заданный в $n$-мерном пространстве симметричной аффинной связности $A_n$, псевдометрическим, если

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = \omega_{[k} b_{j]i} \tag{1}$$

или, иначе,

$$\nabla_k b_{ij} = \omega_k b_{ij} + b_{ijk}, \tag{2}$$

где $b_{ijk}$ — симметричный тензор.

При замене $\bar{b}_{ij} = \lambda b_{ij}$ уравнения (1) и (2) сохраняют силу, если в них положить

$$\bar{\omega}_k = \omega_k + d_k \lg \lambda; \quad \bar{b}_{ijk} = \lambda b_{ijk}. \tag{3}$$

Задание $b_{ij}$ равносильно заданию конуса второго порядка, содержащего направления, удовлетворяющие условию

$$b_{ij} v^i v^j = 0 \tag{4}$$

или асимптотические направления псевдометрики.

Будем называть гиперплоскость

$$w_i = b_{i\alpha} v^\alpha, \tag{5}$$

которая полярна направлению $v^i$ относительно конуса (4), сопряженной этому направлению. Если направление $v^i$ переносится параллельно вместе со своей сопряженной плоскостью, то мы будем называть его главным направлением, соответствующим данному направлению переноса $du^i$. Главные направления определяются системой

$$(b_{ij} du^k - s b_{ij}) v^j = 0, \tag{6}$$

которая совместна, если $s$ является корнем характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\,| b_{ijk} du^k - s b_{ij} | = 0. \tag{7}$$

Условие (1) равносильно существованию такого конуса взаимных направлений, которые, будучи взятыми попарно, удовлетворяют условию

$$b_{ijk} v^j \omega^k = 0, \tag{8}$$

откуда следует, что каждое направление из этой марки будет главным для другого, рассматриваемого как направление параллельного переноса. Конус взаимных направлений имеет уравнение

$$\mathrm{Det}\,| b_{ijk} v^k | = 0. \tag{9}$$

Будем говорить, что две аффинные связности $G$ и $\Gamma$ с симметричными коэффициентами $g_{ij}$ и $\Gamma_{ij}$ сопряжены между относительно данной псевдометрики, если всякому направлению, переносящемуся параллельно в одной из них, сопряжена гиперплоскость, переносящаяся параллельно в другом.

Условие сопряженности перенесений имеет вид

$$d_k b_{ij} - g^s_{ik} b_{sj} - \Gamma^s_{jk} b_{is} = d_k b_{ij} - \Gamma^s_{ik} b_{sj} - g^s_{jk} b_{is} = \omega_k b_{ij}. \tag{10}$$

Если одно из перенесений и псевдометрика заданы, то другое определяется однозначно, так как их коэффициенты будут связаны соотношением

$$\Gamma^k_{ij} - g^k_{ij} = b^{ks} b_{sij}, \tag{11}$$

где $b^{ks}$ — тензор, взаимный $b_{ij}$. Коэффициенты

$$\gamma^k_{ij} = {}^1/_2 (g^k_{ij} + \Gamma_{ij}) \tag{12}$$

определяют среднюю метрику данной пары. Она будет метрикой Вейля с основным тензором $b_{ij}$, так как

$$\partial_k b_i - \gamma^s_{jk} b_{is} - \gamma^s_{jk} b_{is} = \omega_k b_{ij}. \tag{13}$$

Для тензоров кривизны сопряженных связностей выполняется тождество

$$R^s_{ijp} b_{sq} + \rho^s_{ijq} b_{ps} = \omega_{[ij]} b_{pq}. \tag{14}$$

Отметим некоторые частные случаи.

1. Вейлева пара. Если одна из сопряженных связностей Вейлева и ее основной тензор $g_{ij}$, а взаимный ему $\tilde{g}^{ij}$, то вторая связность тоже Вейлева с основным тензором

$$\gamma_{ij} = \lambda b_{ir} b_{js} \tilde{g}^{rs}. \tag{15}$$

Конусы абсолютных направлений сопряженных метрик Вейля взаимно полярны по отношению асимптотического конуса псевдометрики. Углы между двумя направлениями и между двумя сопряженными им гиперплоскостями равны, если их измерить в различных метриках.

2. Конформная пара. Если

$$\gamma_{ij} = \mu g_{ij}, \tag{16}$$

то конусы абсолютных направлений автополярны относительно асимптотического конуса и совпадают между собою, а обе сопряженные метрики — конформны.

3. Самосопряженная пара. Если

$$b_{ij} = \nu g_{ij}, \tag{17}$$

то $b_{ijk}=0$, и обе сопряженные связности совпадают между собою. Таким образом: всякая метрика Вейля является самосопряженной по отношению к конусу своих абсолютных направлений.

4. Кодацциева пара. Для того чтобы средняя метрика пары была риманова, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\omega_k$ был градиентом. В этом случае тензор $b_{ij}$ можно пронормировать так, чтобы имело место условие $\omega_k=0$. При этом $b_{ij}$ удовлетворяет уравнению Кодацци

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 0 \tag{18}$$

по отношению к обеим связностям.

5. Эквиаффинная пара. Для того чтобы эквиаффинной связности была сопряжена эквиаффинная, необходимо и достаточно, чтобы пара была кодацциевой. Вообще говоря, если из трех положений:

a) связность $G$ — эквиаффинная, b) связность $\Gamma$ — эквиаффинная, c) пара — кодацциева — верны два, то верно и третье.

Обозначая через $W$, $\Omega$ и $Q$ объемы соответствующих элементарных областей в связностях $g$, $\Gamma$ и средней метрики соответственно, будем иметь

$$\partial_i \lg\left(\frac{\Omega}{W}\right) = t_i = b^{rs} b_{rsi}, \tag{19}$$

где $t_i$ — чебышевский тензор псевдометрики,

$$Q = c\sqrt{WQ}, \tag{20}$$

$c$ — постоянное. Обращение в нуль чебышевского тензора эквиаффинной пары характеризует постоянство отношения соответствующих объемов всех трех связностей.

Частный вид эквиаффинной пары можно построить, предположив, что связность $g$ — эквиаффинная проективно-евклидова, так как общее решение уравнения Кодацци в этом случае имеет вид

$$b_{ij} = \nabla_j \varphi_i - \frac{\varphi}{n-1} R_{ij}, \tag{21}$$

где $\varphi_i = \partial_i \varphi$, $R_{ij} = R^k_{kij}$, а $\varphi$ — произвольная функция точки. В частности, при $\varphi = \text{const}$ сопряженная связность будет тоже проективно-евклидовой.

6. Риманова пара. Эквиаффинная вейлева пара будет состоять из двух сопряженных римановых геометрий. Их основные тензоры связаны соотношением

$$\gamma_{ij} = b_{ir} b_{js} \tilde{g}^{rs}, \tag{22}$$

где $b_{ij}$ — тензор, удовлетворяющий уравнению Кодацци. Частный вид римановой пары можно построить, приняв во внимание, что во всякой конформно-евклидовой римановой геометрии с основным метрическим тензором $g_{ij}$ тензор

$$L_{ij} = -R_{ij} + \frac{1}{2(n-1)} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g_{ij} \tag{23}$$

удовлетворяет уравнению Кодацци (1); отсюда следует, что, вводя псевдометрику с помощью тензора

$$b_{ij} = L_{ij} + c g_{ij} \quad (c = \text{const}), \tag{24}$$

мы будем иметь сопряженную связность тоже римановой. В частности, при $c = 0$ сопряженная связность будет тоже конформно-евклидовой. Второй частный вид римановой пары может быть получен, если определить псевдометрику по формуле (21) в пространстве постоянной кривизны.

7. Евклидова пара. Из уравнений (14) следует, что при $n > 2$ только кодацциевые тензоры определяют псевдометрику в евклидовом пространстве, а связность, сопряженная евклидовой, будет снова евклидова. Согласно (21) общее решение уравнения Кодацци в евклидовом пространстве будет

$$b_{ij} = \nabla_j \varphi_i, \tag{25}$$

где $\varphi$ — произвольная функция точки. Подчиняя ее условию $\operatorname{Det} |\nabla_j \varphi_i| \neq 0$, мы получим возможность построить любую евклидову пару.

При $n=2$ сопряженные пары обладают рядом особых свойств. В этом случае всякий невырождающийся тензор $b_{ij}$ будет псевдометрическим. Задание такого тензора равносильно заданию сети линий, а условие сопряженности относит всякому направлению, переносящемуся параллельно в связности $G$, направление, которое разделяется с ним гармонически направлениями сети и переносится параллельно в сопряженной связности $\Gamma$. Таким образом любая аффинная связность при $n=2$ может быть дополнена до сопряженной пары с помощью псевдометрики, определяемой произвольной сетью. В частности, связность, сопряженная евклидовой, будет, вообще говоря, квазиевклидовой, т. е. будет допускать абсолютный параллелизм направлений, но не будет иметь кривизны, равной нулю.

Конформная пара вейлевых связностей при $n=2$ будет или самосопряженной, или характеризуется ортогональностью сети, определяющей псевдометрику. В этом и только в этом случае пара допускает существование $\infty^1$ сетей, по отношению к которым сопряжены ее связности. Тензор $b_{ij}$ конформной пары евклидовых связностей при $n=2$ определяется (25), если $\varphi$ есть гармоническая функция точки. Теория эквиаффинных пар при $n=2$ была подробно изложена автором ([2]). Обращение в нуль тензора (19) характеризует чебышевскую сеть.

Область приложения теории сопряженных пар определяется тем, что на всякой нормализованной гиперповерхности проективного пространства определяется пара аффинных связностей, сопряженных относительно конуса асимптотических направлений ([3]). При замене одного из нормализующих многообразий одна из этих связностей подвергается проективному преобразованию, т. е. преобразованию, сохраняющему ее геодезические линии.

При одновременной замене обоих нормализующих многообразий коэффициенты связностей преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}^{k} &= g_{ij}^{k} + \delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i - b_{ij} b^{km} \bar{n}_m, \\ \bar{\Gamma}_{ij}^{k} &= \Gamma_{ij}^{k} + \delta_i^k \pi_j + \delta_j^k \pi_i - b_{ij} b^{km} p_m, \end{aligned} \tag{26}$$

где $p_i$ и $\pi_i$ — векторы указанных выше проективных преобразований. На всякой гиперповерхности можно определить евклидову пару связностей, предположив, что нормали 1-го рода пересекаются в одной точке, которая инцидентна гиперплоскости, содержащей все нормализующие многообразия 2-го рода. Отсюда следует, что сопряженная пара связностей может быть осуществлена на нормализованной гиперповерхности тогда и только тогда, если ее можно перевести с помощью преобразования (26) в евклидову пару.

Поступило
10 IX 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Рашевский, Введение в риманову геометрию, 1936, стр. 164. [2] А. Норден, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. IV, 1937. [3] А. Норден, ДАН, XLVIII, № 8 (1945).