Доклады Академии Наук СССР
1945. Том L

МАТЕМАТИКА

А. П. НОРДЕН

КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО ВЕЙЛЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1945)

Мы будем называть конформное пространство Мебиуса M_n n измерений нормализованным и обозначать W_n, если каждой его точке x отнесена другая его точка X ([1]).

Предположим, что однородные координаты точек x и X являются функциями криволинейных координат u^α $\alpha=1, 2, \ldots, n$, допускающими частное дифференцирование первых трех порядков*.

Для всякой пары соответствующих точек x и X можно подобрать такую систему величин l_α, чтобы сферы

$$y_\alpha=\partial_\alpha x-l_\alpha x, \tag{1}$$

проходящие через точку x, пересекались также в точке X. Остановившись на некотором нормировании однородных координат x и определив нормирование координат X условием $xX=1$, выразим координаты гиперсфер $\partial_\beta y_\alpha$ в виде линейных комбинаций координат $n+2$-х независимых гиперсфер y_α, x, X. Этим разложениям можно придать вид

$$\partial_\beta y_\alpha=l_\beta y_\alpha+G^\gamma_{\alpha\beta}y_\gamma+p_{\alpha\beta}x-g_{\alpha\beta}X. \tag{2}$$

Величины $G^\gamma_{\alpha\beta}$ симметричны по отношению к перестановке индексов α и β, не зависят от перенормирования координат x и преобразуются как коэффициенты аффинной связности при преобразовании криволинейных координат.

Таким образом, всякое непрерывное и дифференцируемое точечное соответствие в M_n определяет симметричную аффинную связность, которую мы назовем внутренней геометрией W_n ([1]).

Всякому вектору v^α аналитического многообразия значений криволинейных координат u^α соответствует гиперсфера $v=v^\alpha y_\alpha$, проходящая через точки x и X и ортогональная направлению смещения точки $dx=\partial_\alpha x\, du^\alpha$, где $du^\alpha=\sigma v^\alpha$. Называя направляющим кругом последовательности сфер v круг, проходящий через точку x ортогонально сферам v и $v+dv$, получим следующее истолкование параллельного перенесения во внутренней геометрии W_n: для того чтобы направление вектора v^α переносилось параллельно, т. е. чтобы его ковариантный дифференциал удовлетворял условию

$$\delta v^\alpha=\lambda v^\alpha,$$

необходимо и достаточно, чтобы направляющий круг семейства сфер v проходил через точку X.

---

* В дальнейшем предполагается, что точки x, X и гиперсферы A, B и т. д. M_n заданы однородными координатами в числе $n+2$. Инвариант двух сфер $AB=-A^1B^1+A^2B^2+\ldots+A^{n+2}B^{n+2}$ характеризует своим обращением в нуль их ортогональность. Таким же образом уравнение $Ax=0$ выполняется в случае инцидентности сферы и точки, а координаты точки подчинены условию $xx=x^2=0$.

Направляющий круг сфер v, ортогональных кривой $x=x(t)$, совпадает с соприкасающимся кругом этой кривой, откуда следует, что соприкасающийся круг геодезических линий внутренней геометрии W_n проходит через точку X.

Из уравнения (2), которое можно переписать в виде

$$\nabla_\beta y_\alpha = l_\beta y_\alpha + p_{\alpha\beta} x - g_{\alpha\beta} X, \tag{3}$$

следует, что тензор $g_{\alpha\beta}$ определяет угловую метрику M_n и удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\alpha g_{\alpha\beta} = 2 l_\gamma g_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

откуда видно, что внутренняя геометрия W_n есть геометрия Weyl'я с угловой метрикой пространства M_n.

Последнее обстоятельство вместе с вышеприведенным свойством геодезических линий вполне характеризует внутреннюю геометрию W_n.

Рассматривая совместно уравнения (1) и (3), мы придем к следующим соотношениям:

$$p_{[\alpha\beta]} = \nabla_{[\beta} l_{\alpha]}; \quad R_{\gamma\beta\alpha\cdot}^{\;\;\;\;\;\sigma} = p_{[\beta\gamma]} \delta_\alpha^\sigma + p_{\alpha[\beta} \delta_{\gamma]}^\sigma - g^{\sigma\lambda} p_{\lambda[\gamma} g_{\beta]\alpha}, \tag{5}$$

которые вместе с (4) дают условия интегрируемости рассматриваемой системы.

Рассматривая M_n как гиперсферу в пространстве M_{n+1}, соединим точки x и X кругами, ортогональными M_n. Если существует хотя бы одна гиперповерхность, отличная от M_n и ортогональная всем построенным кругам, то существует ∞^1 таких поверхностей, и мы назовем соответствие точек x и X н о р м а л ь н ы м.

Нормальное соответствие характеризуется существованием потенциала векторного поля l_α, а за счет перенормирования координат x можно добиться обращения в нуль этого вектора. Но в таком случае уравнение (4) принимает вид, показывающий, что нормальное соответствие точек x и X характеризуется римановой внутренней геометрией W_n.

В частности, соответствие будет нормальным, если точка X получена из соответствующей точки x инверсией относительно постоянной гиперсферы A. В этом случае внутренняя геометрия W_n будет геометрией пространства постоянной кривизны, интерпретированного по методу Пуанкаре по отношению к абсолюту A.

Если сфера A выродится в точку X_0, то X для всякой x совпадает с точкой X_0, а геометрия будет евклидовой.

Так как всевозможные соответствия $x \longrightarrow X$ определяют метрики Weyl'я, конформные между собою, а среди этих метрик содержатся евклидовы, то все геометрии W_n конформно евклидовы.

Из того, что вектор l_α, определяющий соответствие $x \longrightarrow X$ по формулам (1), можно выбрать произвольно, следует, что любая конформно-евклидова геометрия Weyl'я может быть осуществлена как внутренняя геометрия некоторого W_n и, вследствие этого, существование тензора, удовлетворяющего условиям (5), характеризует конформно-евклидову геометрию Weyl'я.

Обобщая построение метрики постоянной кривизны, предположим, что в M_n задано семейство гиперсфер A, зависящих от $m=n-k$ параметров p^α $\alpha, \beta, \ldots, \mu = 1, 2, \ldots, m$, и соответствие точек x и X состоит в том, что каждая пара их находится в инверсии относительно одной из гиперсфер A. Эту гиперсферу будем называть а б с о л ю т о м для пары точек x и X и, полагая $f(p^\alpha) = -\frac{1}{2} A^2$; $Xx=1$, получим

$$x = fx + A. \tag{6}$$

Геометрическим местом точек x, соответствующих одному абсолюту, будет поверхность k измерений, которую мы назовем э к в и а б с о л ю тной. Внутренняя геометрия этих поверхностей определяется так же как геометрия на поверхности пространства постоянной кривизны с абсолютом A и, следовательно, будет римановой.

Если потребовать, чтобы рассматриваемое соответствие было нормальным, то окажется, что в этом случае координаты гиперсфер A можно пронормировать, добившись выполнения условий

$$xA=1; \quad x\partial_\alpha A = xA_\alpha = 0. \tag{7}$$

Второе из этих равенств определяет эквиабсолютные поверхности как сферы k измерений, по которым пересекаются гиперсферы A_α. Так как внутренняя геометрия всякой сферы в пространстве постоянной кривизны есть тоже метрика постоянной кривизны, то это же будет иметь место в отношении эквиабсолютных поверхностей риманова пространства, определяемого нормальным соответствием относительно семейства абсолютов A.

Предположим, наконец, что семейство A линейно, т. е. что всякая линейная комбинация гиперсфер этого семейства снова определяет гиперсферу того же семейства, и назовем риманову геометрию, определяемую нормальным соответствием относительно этого семейства, геометрией обобщенного пространства Кагана—Шура.

Рассмотрим линейное семейство гиперсфер $B=B(q^\sigma)$ $(\sigma, \rho, \ldots = m+1, \ldots, n)$, ортогональных всем гиперсферам A, и примем параметры p^α и q^σ за криволинейные координаты, полагая $u^\alpha = p^\alpha$, $u^\sigma = q^\sigma$. В этих координатах линейный элемент рассматриваемой метрики имеет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta + F(u^\lambda) \gamma_{\sigma\rho} du^\sigma du^\rho. \tag{8}$$

Величины $g_{\alpha\beta}$ зависят только от p^α и определяют произвольную конформно-евклидову метрику на сферах, по которым пересекаются все гиперсферы $\partial_\sigma B$. Эти поверхности будут вполне геодезическими. Величина $\gamma_{\sigma\rho}$ зависит только от параметров u^σ и определяет метрику постоянной кривизны на эквиабсолютных поверхностях. $F(u^\lambda)$ — произвольная функция u^λ. Вид линейного элемента показывает, что пространство допускает группу перемещений в себе, зависящую от $^1/_2 k(k+1)$ параметров.

Если уравнения $u^\sigma = u^\sigma(t)$ определяют геодезическую линию на эквиабсолютной поверхности, то те же уравнения определяют в пространстве поверхность $n-k+1$ измерения, которая оказывается вполне геодезической. Однако по свойству метрики постоянной кривизны параметры u^σ можно подобрать так, чтобы уравнения (9) были линейными. Отсюда непосредственно следует, что рассматриваемое пространство будет $k-1$ раз проективным ([2]).

В частном случае, когда $m=1$, рассматриваемые нами пространства совпадают с субпроективными пространствами Кагана ([2]), а при $n=2$ их метрика есть метрика произвольной поверхности вращения.

Поступило
1 IV 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Норден, ДАН, XLVIII, № 8 (1945). [2] В. Ф. Каган, Сб. трудов семинара по векторному и тензорному анализу, в. 1 (1933).