О ВНУТРЕННИХ ГЕОМЕТРИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

А. П. Норден

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

§ 1. Геометрия аффинной связности

Ряд существенных особенностей, выделяющих бинарную область среди пространств другого числа измерений, связан с тем фактом, что в ней все кососимметричные тензоры второго ранга отличаются только скалярным множителем. Действительно, матрица компонент всякого такого тензора имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{Vmatrix},$$

вследствие чего он вполне определяется заданием одного числа. Выбрав некоторый тензор ε_{ij} за основной кососимметричный тензор (альтернатор), определим взаимный ему тензор ε^{ij} тождеством

$$\varepsilon^{ik}\varepsilon_{kj} = \delta^{i}_{\cdot j}. \tag{1.1}$$

Мы можем с большим удобством воспользоваться этим тензором для того, чтобы «поднимать» и «опускать» индексы, определив соответствующие операции следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a^{i}_{\cdot j\cdot\cdot} &= \varepsilon^{ik}a_{kj\cdot\cdot}, \\ b_{ij\cdot\cdot} &= \varepsilon_{ik}b^{k}_{\cdot j\cdot\cdot}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Пользуясь этим соглашением, выразим некоторый тензор, заданный в бинарной области, кососимметричный относительно двух своих индексов i и j, через ε_{ij}. Свернув его по остальным индексам с рядом произвольных векторов и имея в виду замечание, сделанное вначале, получим:

$$a_{ijk\cdot\cdot}v^{k}_{\cdot\cdot} = \lambda\varepsilon_{ij},$$

откуда

$$\varepsilon^{ji}a_{ijk\cdot\cdot}v^{k}_{\cdot\cdot} = a^{m}_{\cdot\,mk\cdot\cdot}v^{k}_{\cdot\cdot} = 2\lambda$$

или, освобождаясь от произвольных векторов, будем иметь

и аналогично
$$\left.\begin{aligned} 2a_{i\,j\,k\cdot\cdot} &= \varepsilon_{ij}a^{\cdot m}_{\cdot\; mk\cdot\cdot} \\ 2b^{ij}_{\cdot\cdot k\cdot\cdot} &= \varepsilon^{ij}b^{m\cdot}_{\cdot\; mk\cdot\cdot} \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Результату альтернации по индексам i и j можно, согласно предыдущему, придать следующий вид:

$$A_{[ij]\,k} = A_{ijk} - A_{jik} = \varepsilon_{ij}A^{m}_{\cdot\; mk}, \tag{4.1}$$

вследствие чего условие симметрии по этим же индексам равносильно равенству

$$A^{m}_{\cdot\; mi} = 0. \tag{5.1}$$

В частности, для того чтобы два вектора v^i и w^j были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их произведение

$$v^i w^j$$

было симметрично. Отсюда условие коллинеарности

$$v^k w_k = 0. \tag{6.1}$$

Если a_{ij} — симметричный тензор, то взаимный ему тензор $\tilde{a}^{ij}$ определяется равенством

$$\tilde{a}^{ik}a_{kj} = \delta^i_j;$$

с другой стороны, тензор

$$a_{i\cdot}^{\;k}a_{jk} = -a_{ik}a_{j\cdot}^{\;k}$$

кососимметричен, откуда

$$a_{i\cdot}^{\;k}a_{jk} = \lambda\varepsilon_{ij},$$

или

$$a^{ik}a_{kj} = \lambda\delta^i_j,$$

так что

$$\tilde{a}^{ij} = \mu a^{ij}. \tag{7.1}$$

Отметим, наконец, что условие линейной зависимости трёх симметричных тензоров a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} можно записать так:

$$a_{i\cdot}^{\;j}b_{j\cdot}^{\;k}c_{k\cdot}^{\;i} = 0, \tag{8.1}$$

заметив, что левая часть только множителем отличается от определителя, составленного из координат данных тензоров.

Тензор кривизны произвольной геометрии аффинной связности

$$R_{ijk\cdot}^{\;\;\;\;l} = \partial_j\Gamma_{ki}^{\;l} - \partial_i\Gamma_{kj}^{\;l} - \Gamma_{mi}^{\;l}\Gamma_{kj}^{\;m} + \Gamma_{mj}^{\;l}\Gamma_{ki}^{\;m\,*)}, \tag{9.1}$$

*) См., например, J. A. Schouten, Der Ricci-Kalcul, Berlin 1924 г. (эта книга в дальнейшем цитируется как R. C.), гл. II, формула (101).

будучи кососимметричным относительно индексов i и j, может быть выражен в бинарной области через тензор 2-го ранга и альтернатор так:

$$R_{ijk}{}^{l} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}R^{m}_{\cdot}{}_{mk}{}^{l} = -\varepsilon_{ij}R^{l}_{\cdot k}. \qquad (10.1)$$

С другой стороны,

$$R_{mjk}{}^{m} = -\varepsilon_{mj}R^{m}_{\cdot k} = R_{jk} \text{ *)}. \qquad (11.1)$$

Отсюда следует, что тензор R_{jk} есть так называемый *тензор Риччи* данной геометрии.

Особое значение тензора Риччи для бинарной области выясняется в результате рассмотрения известной формулы, устанавливающей связь между направлением вектора и направлением приращения, которое он получает после параллельного обвода по бесконечно малому контуру

$$Dv^{i} = R_{mnk}{}^{i}v^{k}du^{m}\delta u^{n} \text{ **)}$$

или вследствие (10.1)

$$Dv^{i} = \omega R^{i}_{\cdot k}v^{k}, \qquad (12.1)$$

где ω — бесконечно малая скалярная величина, зависящая от выбора контура.

Последнее соотношение показывает, что *тензор Риччи определяет соответствие направлений, в котором всякому направлению вектора отвечает направление приращения, которое он получает после параллельного обвода по бесконечно малому замкнутому контуру.*

Двойные элементы указанного соответствия определяются из условия

$$R_{mn}v^{m}v^{n} = 0 \qquad (13.1)$$

и обладают тем свойством, что соответствующее им направление не изменяется после параллельного обвода по бесконечно малому замкнутому контуру.

Будем называть эти направления *абсолютными направлениями* данной геометрии, а огибающие их кривые — *абсолютными линиями.* Дифференциальное уравнение сети абсолютных линий будет

$$R_{mn}du^{m}du^{n} = 0. \qquad (14.1)$$

Рассмотрим, наконец, тождество (имеющее место, если кручение $\Gamma^{k}_{ij} - \Gamma^{k}_{ji}$ равно 0)

$$\nabla_{[i}\nabla_{j]}v_{k} = R_{ijk}{}^{m}v_{m} \text{ ***)}.$$

*) R. C., гл. II, формула (123).
**) R. C., гл. II, формула (102).
***) R. C., гл. II (116в).

Вместо левой части имеем в случае бинарной области [см. (4)]

$$\varepsilon_{ij}\nabla^m\nabla_m v_k,$$

откуда

$$\nabla^m\nabla_m v_k = -R^{m}_{\cdot\, k} v_m \tag{15.1}$$

и аналогично

$$\nabla^m\nabla_m l^k = R^{k}_{\cdot\, m} l^m \ ^{*)}. \tag{16.1}$$

Таким же образом

$$\nabla^m\nabla_m a_{ij} = -R^{m}_{\cdot\, i} a_{mj} - R^{m}_{\cdot\, j} a_{im} \ ^{**)}. \tag{17.1}$$

Перейдём теперь к рассмотрению различных частных случаев геометрии афинной связности, сразу предположив при этом, что кручение в рассматриваемых случаях равно нулю.

А. Эквиаффинная геометрия ***) характеризуется существованием такого антисимметричного тензора L_{ij}, что инвариант двух произвольных векторов

$$\sigma = L_{mn} v^m w^n \tag{18.1}$$

сохраняется при их параллельном перенесении. По определению инвариант этот считают совпадающим с площадью параллелограмма, построенного на данных векторах.

Дифференцируя билинейную форму (18.1) и предполагая при этом, что $\nabla v^i = \nabla w^i = 0$, получаем

$$(\nabla_k L_{mn}) v^m w^n du^k = 0,$$

откуда

$$\nabla_k L_{mn} = 0. \tag{19.1}$$

Приняв $L_{ij} = \lambda\varepsilon_{ij}$ и применяя формулу (17.1), получим:

$$\nabla^m\nabla_m L_{ij} = -R^{m}_{\cdot\, i} L_{mj} - R^{m}_{\cdot\, j} L_{im} = 0,$$

откуда

$$R_{ij} = R_{ji}$$

или

$$R^{m}_{\cdot\, m} = 0. \tag{20.1}$$

Итак, *для того чтобы геометрия была эквиаффинной, необходимо и достаточно, чтобы тензор Риччи был симметричен* ****).

В. Геометрия Вейля характеризуется существованием симметричного невырождающегося тензора g_{ij}, удовлетворяющего уравнению

$$\nabla_k g_{ij} = \omega_k g_{ij} \ ^{*****)}. \tag{21.1}$$

---

*) R. C., гл. II (116а).

**) R. C., гл. II (118).

***) Термин «эквиаффинная» употребляется геометрами итальянской школы, например Bortolotti, и соответствует немецкому термину «Inhaltstreue».

****) R. C., гл. II, § 15.

*****) См. R. C., гл. VI.

Выбрав произвольный альтернатор и составляя условие интегрируемости этой системы, получим, согласно (17.1)

$$-R^{m}_{\cdot i} g_{mj} - R^{m}_{\cdot j} g_{im} = \nabla^m \omega_m g_{ij}. \qquad (22.1)$$

Симметрирование (без деления) даёт нам

$$-R^{k}_{\cdot (i} g_{j)k} = \nabla^m \omega_m g_{ij}$$

или

$$-R^{k}_{\cdot i} g_{jk} = \frac{1}{2} \nabla^m \omega_m g_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}.$$

Разрешая систему относительно $R^{k}_{\cdot i}$, получим

$$2R_{ki} = -\nabla^m \omega_m \varepsilon_{ki} + k g_{ij}, \qquad (23.1)$$

где

$$k = \tilde{g}^{mn} R_{mn} \qquad (24.1)$$

и

$$\nabla^k \omega_k = -R^{k}_{\cdot k}. \qquad (25.1)$$

Наконец, симметрирование даёт нам

$$R_{(ki)} = k g_{ki}. \qquad (26.1)$$

Дифференцируя последнее равенство, мы получим

$$\nabla_s R_{(ij)} = (\nabla_s k) g_{ij},$$

откуда, если $k \neq 0$, то

$$\nabla_s R_{(ij)} = \mu_s R_{(ij)}. \qquad (27.1)$$

Последнее равенство, являясь необходимым признаком геометрии Вейля, является очевидно и достаточным, если тензор $R_{(ij)}$ не вырождается, так как в этом случае за основной тензор g_{ij}, который, как известно, определён из (21.1) только с точностью до множителя, можно просто взять тензор $R_{(ij)}$.

Будем говорить, что *направление вектора v^i переносится параллельно*, если вектор удовлетворяет уравнению

$$\nabla v^i = \lambda v^i. \qquad (28.1)$$

Для того чтобы вектор v^i определял поле *абсолютно параллельных направлений* (переносимых параллельно вдоль любой линии), необходимо и достаточно, чтобы имело место

$$\nabla_k v^i = \lambda_k v^i, \qquad (29.1)$$

что, как легко видеть, равносильно условию

$$\nabla_k v_i = {}'\lambda_k v_i, \qquad (30.1)$$

где индексы опущены с помощью произвольного альтернатора. Рассмотрим невырождающийся симметрический тензор

$$g_{ij} = v_{(i}w_{j)},$$

предположив, что геометрия допускает существование двух различных полей абсолютно параллельных направлений, определяющихся векторами v_j и w_j.

Дифференцируя и пользуясь (30.1), получим:

$$\nabla_k g_{ij} = \omega_k g_{ij},$$

так что рассматриваемая геометрия есть геометрия Вейля.

Обратно, если известно, что данная геометрия вейлева, то, взяв поле изотропных направлений тензора g_{ij}

$$g_{mn}v^m v^n = 0,$$

дифференцируя последнее тождество и принимая во внимание (21.1), получим

$$g_{mn}(\nabla_s v^m) v^n = 0,$$

откуда

$$\nabla_s v^m = \lambda_s v^m,$$

так что рассматриваемое поле есть поле абсолютно параллельных направлений.

Итак: *для того чтобы геометрия была вейлевой, необходимо и достаточно, чтобы она допускала существование двух различных полей, абсолютно параллельных направлений.*

C. **Квазиевклидовой геометрией** мы будем называть такую геометрию, которая позволяет для каждого вектора, заданного в некоторой точке, построить поле абсолютно параллельных ему направлений *).

Необходимым и достаточным условием того, чтобы геометрия была квазиевклидовой, является, очевидно, неограниченная интегрируемость системы уравнений

$$\nabla_k v^i = \lambda_k v^i;$$

составляя условие этого, получим равенство

$$-R^{k}_{\cdot m} v^m = \mu v^k,$$

которое должно иметь место для вектора любого направления. Но последнее возможно только, если

$$R^{k}_{\cdot m} = \gamma \delta^k_m,$$

*) Возможность рассмотрения геометрии, которую мы называем квазиевклидовой, была отмечена в книге Fubini-Čech, Geometria proiettiva-differenziale, Bologna, 1926—1927 г., § 83 A (эта книга в дальнейшем цитируется как F + Č. G).

или

$$R_{km} = \gamma^2{}_{km},$$

или ещё иначе

$$R_{(km)} = 0. \tag{31.1}$$

Итак: *квазиевклидова геометрия характеризуется антисимметрией тензора Риччи.*

Отметим, что вследствие существования ∞^1 полей абсолютно параллельных направлений, квазиевклидова геометрия является частным случаем геометрии Вейля, причём тензор g_{ij}, удовлетворяющий условию (21.1), может быть в ней выбран ∞^2 способами по числу возможных пар полей абсолютно параллельных направлений.

D. Геометрия Римана есть геометрия Вейля, которая одновременно является эквиаффинной. Сравнивая условия (20.1) и (25.1), получим

$$\nabla^k \omega_k = 0,$$

откуда следует, что геометрия Римана характеризуется существованием тензора a_{ij}, удовлетворяющего уравнению

$$\nabla_k a_{ij} = \omega_k a_{ij},$$

где ω_k есть градиентный вектор.

Полагая

$$\omega_k = \partial_k \omega,$$

и производя замену

$$a_{ij} \doteq e^{\omega} g_{ij},$$

получаем условие

$$\nabla_k g_{ij} = 0. \tag{32.1}$$

Итак тензор a_{ij}, существование которого характеризует геометрию Римана, всегда может быть пронормирован так, чтобы его ковариантная производная была равна нулю. Соответствующий тензор будем называть *основным тензором геометрии Римана.*

Чтобы установить связь между основным тензором римановой геометрии и основным эквиаффинным альтернатором L_{ij} той же геометрии, примем во внимание, что тензор $\tilde{g}^{ij}$, определённый равенством

$$\tilde{g}^{ik} g_{kj} = \delta^i_j,$$

как это легко видеть, будет иметь ковариантную производную, равную нулю

$$\nabla_k \tilde{g}^{ij} = 0.$$

Аналогичным образом для тензора L^{ij}, взаимного основному альтернатору

$$\nabla_k L^{ij} = 0.$$

Отсюда, дифференцируя тождество, следующее из (7.1)

$$\tilde{g}^{ij} = \lambda L^{im} L^{jn} g_{mn},$$

и получив

$$\partial_k \lambda = 0,$$

будем иметь

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij}, \tag{33.1}$$

вследствие чего матрица для L_{ij} будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} 0, & \sqrt{g} \\ -\sqrt{g}, & 0 \end{Vmatrix},$$

где g — дискриминант основного тензора.

E. Наконец, будем называть **евклидовой** геометрию, которая одновременно является и квазиевклидовой и эквиаффинной. Одновременное выполнение обоих условий (20.1) и (31.1) возможно только, если выполнено условие

$$R_{ij} = 0, \tag{34.1}$$

которое и является характерным. Отметим, что, по определению, евклидова геометрия является частным случаем геометрии Римана.

F. **Проективно евклидовой** (Схоутен *)) называем такую геометрию, которая допускает непрерывное отображение своих геодезических на прямые евклидова пространства соответствующего числа измерений. Условие, характеризующее такую геометрию, будет иметь для случая двух измерений вид

$$\nabla^k (2R_{ki} + R_{ik}) = 0 \text{ **)}. \tag{35.1}$$

Здесь же отметим, что согласно теореме Бельтрами риманова геометрия двух измерений может быть проективно евклидовой тогда и только тогда, если кривизна основной метрической формы

$$g_{mn} du^m du^n$$

постоянна.

§ 2. Сети

Для того чтобы данная геометрия аффинной связности была евклидово-аффинной, необходимо и достаточно, чтобы определяющие её величины Γ_{ij}^k являлись коэффициентами вполне интегрируемой системы уравнений

$$\partial_j \bar{r}_i = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k; \quad \partial_i \bar{r} = \bar{r}_i, \tag{1.2}$$

*) R. C., гл. IV, § 2.

**) R. C., гл. IV, формулы (14) и (19).

где $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ есть векторы n-мерного аффинного пространства.

В общем случае система (1.2) не интегрируема, однако всегда возможно интегрирование системы обыкновенных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{r}_i}{dt} &= \Gamma_{ik}^{l}\frac{du^k}{dt}\bar{r}_l\\ \frac{d\bar{r}}{dt} &= \bar{r}_k\frac{du^k}{dt},\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

которая получает смысл, если задана последовательность точек или линия Γ_A данного пространства аффинной связности

$$u^i = u^i(t).$$

Интегрируя систему (2.2), мы получим некоторую линию евклидова пространства Γ_E, заданную уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(t),$$

которую будем называть *отображением линии* Γ_A *на евклидово пространство*.

В каждой точке M рассматриваемого пространства аффинной связности существует n-мерное многообразие контравариантных векторов, которое мы будем называть *векторным пространством* данной точки и обозначать V_M. Отображая линию Γ_A на линию Γ_E евклидова пространства, мы получим в каждой точке последней репер, определяемый n векторами евклидова пространства

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(t),$$

с помощью которого можно получить отображение всякого контравариантного вектора l^i точки M кривой Γ_A на вектор $\bar{l}$ евклидова пространства, полагая

$$\bar{l} = l^m\bar{r}_m.$$

Таким образом: *интегрируя систему* (2.2), *мы достигаем возможности отображения последовательности* V_Γ *векторных пространств, заданных в точках кривой* Γ_A *на одно и то же евклидово пространство.*

Легко видеть, что полученное отображение не зависит от преобразований криволинейных координат и определяется с точностью до аффинного преобразования, вследствие свободы выбора начальных данных уравнения (2.2).

Рассмотрим теперь некоторый контравариантный вектор l^i, переносящийся параллельно вдоль линии Γ_A, так что

$$\frac{dl^i}{dt} + \Gamma_{kl}^{i} l^k \frac{du^l}{dt} = 0.$$

Тогда для соответствующего ему в отображении вектора $\bar{l}$ имеем:

$$\frac{d\bar{l}}{dt}=\frac{dl^k}{dt}\bar{r}_k+l^k\frac{d\bar{r}_k}{dt}=\bar{r}_k\left(\frac{dl^k}{dt}+\Gamma^k_{lm}l^l\frac{du^m}{dt}\right)=0,$$

вследствие чего последовательности значений контравариантного вектора, переносящегося параллельно вдоль кривой Γ_A, соответствует последовательность равных векторов евклидова пространства, на которое отображена линия Γ.

Полезно также определить образ, являющийся отображением ковариантного вектора. Рассмотрим для этого систему декартовых координат, началом которой является некоторая точка M кривой Γ_E, а за координатные векторы приняты n векторов $\bar{r}_i$. Тогда всякой точке P пространства будет соответствовать вектор

$$\overrightarrow{MP}=\bar{r}_\alpha x^\alpha$$

и x^i будут её координатами. Если t_i есть ковариантный вектор, заданный в точке кривой Γ_A, соответствующей точке M, тогда уравнение

$$t_m x^m=1$$

будет инвариантно по отношению к преобразованию координат и определит гиперплоскость в евклидовом пространстве, которое содержит кривую Γ_E. Эту гиперплоскость и следует считать отображением ковариантного вектора.

В частности, *всякому ковариантному вектору аффинного пространства двух измерений соответствует при отображении кривой, в точке которой задан вектор — вполне определённая прямая, не проходящая через соответствующую точку отображающей кривой.*

Перейдём теперь окончательно к рассмотрению многообразия двух измерений. Мы будем говорить, что в нём задана *сеть*, если задано уравнение

$$a_{mn}du^m du^n=0, \tag{3.2}$$

где a_{ij} — симметричный тензор с действительными координатами и определителем:

$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}, \tag{4.2}$$

отличным от нуля.

Будем называть тензор a_{ij} *тензором сети* и считать, что две сети, заданные тензорами a_{ij} и $\overset{*}{a}_{ij}$, совпадают тогда и только тогда, если

$$\overset{*}{a}_{ij}=\lambda a_{ij},$$

т. е. если тензоры сети отличаются только скалярным множителем.

Геометрическое значение уравнения (3.2) получим, рассмотрев инволюцию направлений, определяющуюся в каждой точке многообразия в силу соотношений

$$a_{mn}du^m\delta u^n = 0. \tag{5.2}$$

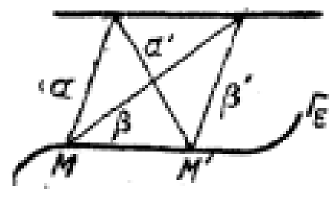
Итак: задание сети равносильно заданию некоторой инволюции направлений в каждой точке бинарной области или *заданию поля инволюций*.

Если сеть соответствует полю *гиперболических* инволюций, то в каждой точке пространства определяются два различных и действительных двойных направления (будем называть их просто *направления сети*). Кривые, огибающие эти направления и совпадающие с интегральными кривыми уравнения (3.2), образуют два семейства *линий сети*, чем и объясняется самый термин *сеть*.

Предполагая, что сеть задана в пространстве (двух измерений) аффинной связности A_2, отобразим некоторую произвольную линию Γ_A этого пространства на линию Γ_E евклидовой плоскости.

Заданная сеть определит в каждой точке кривой Γ_A некоторую инволюцию направлений, и после отображения мы получим последовательность инволюций, заданных в точках кривой евклидовой плоскости Γ_E.

Рассмотрим теперь две точки последней кривой M и M' и найдём прямую γ, на которой обе инволюции направлений (M) и (M') определяют перспективно одну и ту же точечную инволюцию. Такая прямая определяется всегда однозначно и притом будет действительной, если только одно из двойных направлений в (M) и (M') не направлено по прямой MM'. Чтобы убедиться в этом, достаточно принять во внимание, что нахождение указанной прямой γ сводится к нахождению прямой, соединяющей соответствующие точки пересечения прямых α и β, выходящих из точки M, и α', β', выходящих из точки M' и касающихся линии сети. Прямые α и β, с одной стороны, и α', β', с другой, могут быть мнимо сопряжёнными, но тогда и точки $(\alpha\alpha')$ и $(\beta\beta')$ будут тоже мнимо сопряжёнными, а прямая, их соединяющая, будет всё же действительной.



Фиг. 1.

Предположим теперь, что точка M' неограниченно приближается по кривой Γ_E к точке M, тогда прямая γ будет стремиться занять некоторое предельное положение, в котором мы назовём её *характеристической прямой последовательности инволюций* Γ_A, *соответствующей точке* M.

Перейдём к аналитическому определению характеристической прямой. Для этого примем за координатные линии (мнимые или действительные) линии сети, и, отобразив точку M последовательности Γ_A на евклидову плоскость, введём там декартову систему координат, поместив начало в точку M и определив радиус-вектор точки $P(x^1, x^2)$ так:

$$\overrightarrow{MP} = \bar{r}_k x^k.$$

Тогда для точек пересечения прямых двойных направлений сети в точках M и $M + dM$ будем иметь координаты

$$x^1 = \lambda^1; \quad x^2 = 0;$$
$$x^1 = 0; \quad x^2 = \lambda^2.$$

Для первой из этих точек получим:

$$\lambda^1 \bar{r}_1 = d\bar{r} + d(\lambda^1 \bar{r}_1) = d\bar{r} + \lambda^1 d\bar{r}_1 + d\lambda^1 \bar{r}_1$$

или, сравнивая коэффициенты при $\bar{r}_1$ и пользуясь системой (2.2), будем иметь

$$0 = du^2 + \lambda^1 \Gamma_{1k}^2 du^k,$$

откуда, вводя угловой коэффициент направления

$$\frac{du^2}{du^1} = k,$$

получим

$$\lambda^1 = -\frac{1}{\Gamma_{11}^2 k^{-1} + \Gamma_{12}^2}$$

и аналогично

$$\lambda^2 = -\frac{1}{\Gamma_{22}^1 k + \Gamma_{12}^1}.$$

Записав уравнение характеристической прямой в виде

$$h_1 x^1 + h_2 x^2 = 1,$$

введя обозначения

$$\Gamma_{11}^2 = \beta; \quad \Gamma_{22}^1 = \gamma; \quad \Gamma_{12}^2 = -t_1; \quad \Gamma_{12}^1 = -t_2$$

и приняв во внимание, что она проходит через точки $(\lambda^1, 0)$ и $(0, \lambda^2)$, получим:

$$\begin{aligned} -h_1 &= \beta k^{-1} - t_1, \\ -h_2 &= \gamma k - t_2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Из полученных формул вытекает, что *характеристическая прямая зависит только от направления касательной кривой* Γ_A, *в точках которой задана последовательность инволюций.*

При переходе к произвольной системе координат, вследствие того, что характеристическая прямая инвариантна, определяющие её величины h_i совпадут с координатами некоторого ковариантного тензора.

Если $\beta\gamma \neq 0$, то k можно исключить из системы (6.2)

$$(h_1 - t_1)(h_2 - t_2) = \beta\gamma, \tag{7.2}$$

где h_1 и h_2 — переменные, а все остальные величины постоянны для точки M.

Так как h_1 и h_2 есть тангенциальные координаты характеристической прямой, то уравнение (7.2) показывает, что огибающая семейства характеристических прямых есть кривая 2-го класса. Мы будем называть эту кривую *индикатрисой сети*.

Чтобы установить её свойства, перейдём к однородным тангенциальным координатам, полагая, например

$$h_1 = \frac{\xi_1}{\xi}; \quad h_2 = \frac{\xi_2}{\xi},$$

и примем во внимание, что обращение в нуль координаты ξ характерно для прямой, проходящей через точку M. В частности, прямые, касательные к линиям сети, имеют координаты

$$(1,\ 0,\ 0) \text{ касательная к линии } u^1 = \mathrm{const}$$

и

$$(0,\ 1,\ 0) \text{ касательная к линии } u^2 = \mathrm{const}.$$

Подставляя их в однородное уравнение индикатрисы

$$(\xi_1 - t_1\xi)(\xi_2 - t_2\xi) = \beta\gamma\xi^2,$$

убеждаемся, что *индикатриса касается обеих касательных к линиям сети.*

Найдём теперь *поляру точки M относительно индикатрисы*, назвав её *ассоциированной прямой сети.*

Для этого запишем полярную форму уравнения (7.2)

$$(\overset{*}{\xi}_1 - t_1\overset{*}{\xi})(\xi_2 - t_2\xi) + (\overset{*}{\xi}_2 - t_2\overset{*}{\xi})(\xi_1 - t_1\xi) = 2\beta\gamma\overset{*}{\xi}\xi.$$

Так как для всех прямых, проходящих через точку M, характерно $\xi = 0$, то это и должно вытекать из последнего уравнения, если в него подставить координаты искомой поляры. Вследствие этого координаты искомой поляры будут:

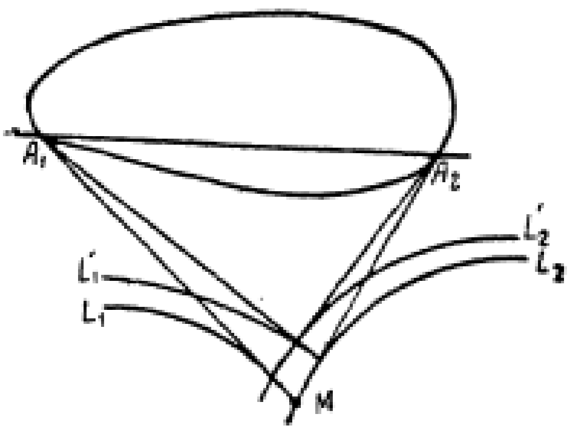
$$\frac{\overset{*}{\xi}_1}{\overset{*}{\xi}} = t_1; \quad \frac{\overset{*}{\xi}_2}{\overset{*}{\xi}} = t_2.$$

Итак, ассоциированная прямая сети определяется тензором, координаты которого в системе с координатными линиями сети равны

$$t_1 = -\Gamma_{12}{}^2; \quad t_2 = -\Gamma_{12}{}^1. \tag{8.2}$$

В случае действительных линий сети можно дать простой способ построения ассоциированной прямой.

Рассмотрим последовательность инволюций вдоль линии сети L_1. Предельное положение точки пересечения прямых, касающихся этой линии, есть сама точка M, а характеристическая прямая, соответствующая направлению той же линии, совпадает с касательной к другой линии сети L_2. Но эта прямая касается индикатриссы в точке A_2, а эта точка, как это легко видеть, совпадает с точкой пересечения касательной к L_2 и касательной к бесконечно близкой ей линии сети L_2'. Отсюда приходим к следующему способу построения ассоциированной прямой: *отобразим обе линии сети L_1 и L_2 на евклидову плоскость и построим в каждой точке кривых L_{1A} и L_{2A} прямую, направление которой совпадает с направлением касательной к другой линии другого семейства. Каждое из семейств прямых, построенных вдоль линий L_1 и L_2, будет иметь огибающую. Прямая, соединяющая точки этих двух огибающих, соответствующих точке A, и будет ассоциированной.*



Фиг. 2.

Рассмотрим теперь случай вырождения, которое наступает, если $\beta\gamma = 0$.

Предположим сначала, что только один из этих множителей, например β, обращается в нуль вдоль всей линии сети

$$\beta = \Gamma_{11}^{2} = 0.$$

Тогда при отображении на плоскость будем иметь

$$\partial_1 \bar{r}_1 = \Gamma_{11}^{1} \bar{r}_1,$$

откуда сейчас же следует, что линия сети отображается на прямую, откуда в свою очередь заключаем, что отображённая линия есть геодезическая, так как её касательный вектор переносится вдоль неё параллельно.

Будем в дальнейшем называть сеть, одно из семейств линий которой геодезическое, *полугеодезической*. Обращаясь к рассмотрению характеристических прямых полугеодезической сети, будем иметь из (6.2)

$$h_1 = t_1. \tag{9.2}$$

Так как h_1 оказывается не зависящим от углового коэффициента направления, то все характеристические прямые проходят через одну и ту же точку $(t_1, 0)$, которая лежит на прямой, отображающей геодезическую линию сети.

Итак: *индикатриса полугеодезической сети вырождается, обращаясь в пучок прямых с центром на прямой, отображающей геодезическую линию сети.*

Так как индикатриса всегда действительна, то и *полугеодезическая сеть может быть только действительной* *).

Если оба семейства линий сети геодезические, мы назовём сеть просто *геодезической*, и в этом случае имеем одновременно

$$\beta = 0; \quad \gamma = 0.$$

Для характеристической прямой

$$h_1 = t_1; \quad h_2 = t_2. \tag{10.2}$$

Итак: *характеристическая прямая геодезической сети не зависит от направления линии, вдоль которой взята последовательность инволюций и совпадает с ассоциированной прямой сети.*

Если линии геодезической сети мнимы, то приведённое свойство можно считать за геометрическую характеристику поля соответствующих инволюций.

Обращаясь к рассмотрению частных случаев, будем называть сеть *чебышевской, если индикатрисса каждой её точки M есть центральная кривая с центром в точке M.*

Так как ассоциированная прямая чебышевской сети будет бесконечно удалённой, то она характеризуется обращением в нуль тензора

$$t_4 = 0. \tag{11.2}$$

Будем считать последнее свойство определением чебышевской сети и в том случае, если она есть одновременно полугеодезическая или геодезическая.

Приняв во внимание способ построения ассоциированной прямой в случае действительных линий сети, мы видим, что прямые, отображающие направления касательных к двум бесконечно близким линиям чебышевской сети L_1 и L_1' в точках их пересечения с линией другого семейства L_2, пересекаясь на бесконечно удалённой характеристической прямой, будут параллельны.

Итак: *вектор, касательный к линии чебышевской сети, переносится параллельно вдоль линии другого семейства.* Последнее свойство и оправдывает употребляемый нами термин. Действительно, таково характеристическое свойство сетей, рассмотренных самим Чебышевым в метрической геометрии. Свойство это было установлено

*) При этом следует принять во внимание, что совокупность двух семейств мнимых линий мы называем сетью только в том случае, если эти линии мнимо сопряжённые.

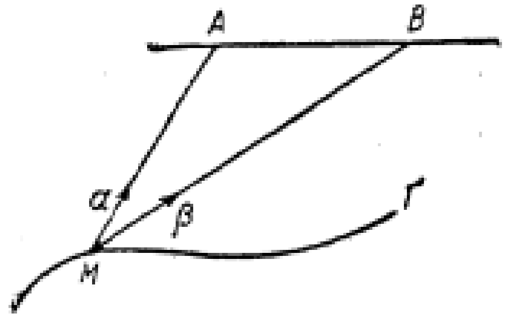
Бианки *) и было принято мною за определение чебышевской сети в любой геометрии аффинной связности **).

Установленная нами характеристика чебышевских сетей обладает тем преимуществом, что она не теряет своего геометрического характера и в том случае, если линии сети мнимо сопряжённые.

Рассмотрим, наконец, сеть одновременно и геодезическую и чебышевскую, назовём её *декартовой*, по аналогии с сетью координатных линий декартовой системы координат на плоскости.

Характеристическая прямая декартовой сети не будет зависеть от направления и совпадёт с бесконечно удалённой прямой плоскости, на которую происходит отображение.

Рассмотрим некоторую произвольную линию Γ и декартову сеть Σ. Вдоль линии Γ в каждой её точке M декартова сеть определит последовательность инволюций направлений (M). Так как характеристическая прямая для всех точек одна и та же и совпадает с бесконечно удалённой прямой, то инволюции (M) в любой точке кривой определят перспективно на бесконечно удалённой прямой одну и ту же точечную инволюцию (μ).



Фиг. 3.

Пусть α и β — два направления, соответствующих в инволюции (M), а A и B — отвечающие им бесконечно удалённые точки, соответствующие между собою в инволюции (μ).

Если α переносится параллельно вдоль кривой, то ему отвечает всё время одна и та же точка A, вследствие чего и направлению β тоже отвечает одна и та же точка B, и значит направление β тоже переносится параллельно. Итак: *если направление α переносится параллельно, то направление β, соответствующее ему в инволюциях, определяемых декартовой сетью, тоже переносится параллельно.*

Если линии сети действительны, то направления сети при отображении на плоскость любой кривой Γ должны быть направлены в двойные точки одной и той же точечной инволюции на бесконечно удалённой прямой, т. е. должны всё время оставаться параллельными. Так как этот результат не зависит от выбора кривой Γ, то, следовательно, *направления декартовой сети переносятся параллельно по любой кривой, т. е. образуют два поля абсолютно параллельных направлений.*

*) Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale, т. II, ч. 2, стр. 802 (Bologna, 1924).

**) Norden C. R. de l'Acad. de Sc. 142, p. 136, 1931.

Сравнивая полученный результат с характеристикой геометрии Вейля, полученной в предыдущем параграфе, приходим к следующему заключению: *существование декартовой сети является характеристическим для геометрии Вейля, где она совпадает с сетью изотропных линий.*

Понятие индикатрисы позволяет нам установить новый принцип классификации сетей. Мы будем называть сеть эллиптической, гиперболической или параболической, судя по типу её индикатрисы.

Займёмся последним из этих трёх типов. Так как индикатриса касается несобственной прямой, тангенциальные координаты которой будут (0, 0, 1), то признаком параболической сети будет равенство

$$t_1 t_2 = \beta\gamma. \tag{12.2}$$

Рассмотрим последовательность инволюций параболической сети вдоль кривой Γ, касающейся в каждой своей точке направления, которому соответствует бесконечно удалённая характеристическая прямая. Вдоль *этой* линии инволюция будет переноситься параллельно, так же, как это имеет место для *любой* линии декартовой сети. В частности, если направления сети действительны, то они будут переноситься параллельно вдоль Γ.

Иными словами, *оба поля направлений параболической сети будут иметь общую трансверсаль* (по терминологии Бианки).

Среди геодезических сетей только декартовы сети будут параболическими, так как для них всякая линия будет являться трансверсалью.

Введём некоторые термины, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Будем называть углом двух направлений $\underset{1}{m}$ и $\underset{2}{m}$ относительно сети с направлениями $\underset{1}{l}$ и $\underset{2}{l}$ величину, определяемую логарифмом ангармонического отношения этих четырёх направлений

$$\varphi = c \lg(\underset{1}{l}\underset{2}{l}\underset{1}{m}\underset{2}{m}),$$

где c не зависит от точки.

В частности, мы будем говорить, что направления *ортогональны или сопряжены* относительно данной сети, если они соответствуют в определяемой ею инволюции, т. е. разделяются направлениями сети гармонически. Приняв во внимание сохранение ангармонического отношения направлений при параллельном перенесении каждого из них, можем утверждать, что *угол двух направлений относительно параболической сети сохраняется при параллельном перенесении их вдоль трансверсали сети.* Сформулируем обратную теорему в форме, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Если существует хотя бы одно значение угла $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ относительно сети, которое сохраняется при параллельном перене-

сении любых образующих его направлений вдоль каждой из линий Γ *некоторого семейства, то сеть — параболическая.*

Для доказательства рассмотрим две точки M и N линии Γ и пусть двойным направлением сети в каждой из этих точек отвечают бесконечно удалённые точки $\underset{1}{M}$, $\underset{2}{M}$ и $\underset{1}{N}$, $\underset{2}{N}$ соответственно. Двум направлениям, переносящимся параллельно и заключающим угол φ_0, будут соответствовать в обоих случаях одни и те же бесконечно удалённые точки X и Y.

Вследствие этого будем иметь

$$(\underset{1}{M}\underset{2}{M}XY) = \alpha; \quad (\underset{1}{N}\underset{2}{N}XY) = \alpha,$$

где α — постоянная величина данного ангармонического отношения.

Обе зависимости между точками X и Y, одна из которых может быть выбрана произвольно, определяют на несобственной прямой совпадающие между собой проективитеты. Двойные элементы обоих проективитетов тоже должны совпасть, поэтому $\underset{1}{M}$ совпадает с $\underset{1}{N}$, а $\underset{2}{M}$ с $\underset{2}{N}$. Отсюда следует, что каждое из направлений сети переносится параллельно вдоль Γ, что возможно только если Γ есть трансверсаль параболической сети.

Декартова сеть является параболической сетью с неопределённой трансверсалью. Поэтому:

1. Угол двух направлений относительно декартовой сети сохраняется при их параллельном перенесении вдоль любой кривой.

2. Если некоторое значение угла, образуемое любыми направлениями, сохраняется при параллельном перенесении этих направлений по любому направлению, — то сеть декартова.

Из двух последних положений следует, что *для того чтобы геометрия была вейлевой, необходимо и достаточно, чтобы она допускала существование такой сети, что угол двух любых направлений относительно этой сети не изменяется при любом параллельном перенесении. Сеть эта будет изотропной.*

Ангармоническое отношение четырёх направлений сохраняется при параллельном перенесении и, обратно, всякое направление, образующее постоянное ангармоническое отношение с тремя направлениями, переносящимися параллельно, тоже переносится параллельно. Отсюда следует, что поле направлений, образующих постоянное ангармоническое отношение с тремя полями абсолютно параллельных направлений, будет тоже полем абсолютно параллельных направлений.

Итак: *если геометрия допускает существование трёх полей абсолютно параллельных направлений, то она допускает и существование* ∞^1 *таких полей, и параллельное перенесение не зависит от пути, т. е. геометрия будет квазиевклидовой.* Так как всякая сеть, направления которой образуют два поля абсолютно параллельных направлений, декартова, то, согласно предыдущему, имеем:

Квазиевклидова геометрия характеризуется существованием двух различных декартовых сетей и если последнее имеет место, то существует ∞^2 *таких сетей.*

Квазиевклидова геометрия может ∞^2 способами рассматриваться как геометрия Вейля, так как каждая из декартовых сетей может быть принята за изотропную.

Если остановить свой выбор на одной такой сети Σ и определить угол направлений другой тоже декартовой сети Σ' относительно первой, то вследствие постоянства ангармонического отношения четырёх параллельных направлений угол, образованный направлениями Σ', не будет зависеть от точки и мы будем говорить, что Σ' *изогональна* относительно Σ. Иными словами: *две любые декартовы сети взаимно изогональны.*

Предположим, что некоторая чебышевская (или геодезическая) сеть Σ' изогональна относительно декартовой сети Σ. Так как направления одной из линий Σ' переносятся параллельно вдоль другой (той же) линии этой сети, а направление, касательное к этой (другой) линии, образует с ним постоянный угол, то оба направления сети переносятся параллельно вдоль её линий, и сеть декартова.

Итак: *если для некоторой неизотропной сети пространства Вейля (двух измерений) верны два из трёх положений — a) сеть геодезическая, в) сеть чебышевская, c) сеть изогональная, то верны и все три сразу; сеть будет декартовой и геометрия квазиевклидовой.*

§ 3. О парах сопряжённых параллельных перенесений

Уже в предыдущем изложении нам больше приходилось иметь дело с понятием перенесения направлений, чем с перенесением векторов. В дальнейшем первое из этих понятий тоже будет играть основную роль. Чтобы выяснить их взаимозависимость, которая тоже оказывается особенно простой в случае двух измерений, поставим следующий вопрос: *могут ли две различные геометрии аффинной связности, заданные в одном и том же многообразии, определять одно и то же параллельное перенесение направлений?*

Пусть две геометрии, находящиеся в указанной зависимости, определяются величинами Γ_{ij}^{k} и $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$, причём мы не предполагаем, что их кручения равны нулю. Если вектор v^i переносится параллельно в первой из них так, что

$$dv^i + \Gamma_{kl}^{i} v^k du^l = 0,$$

то вектор, коллинеарный ему, переносится параллельно во второй, или

$$d(\lambda v^i) + \overset{*}{\Gamma}{}_{kl}{}^{i} \lambda v^k du^l = 0,$$

откуда

$$(\overset{*}{\Gamma}_{kl}{}^{i} - \Gamma_{kl}{}^{i}) v^k du^l = \mu v^i.$$

Освобождаясь от произвольного вектора v^k, получим

$$(\overset{*}{\Gamma}_{jl}{}^{i} - \Gamma_{jl}{}^{i}) du^l = \mu \delta_j{}^i,$$

откуда вытекает

$$\overset{*}{\Gamma}_{kl}^{k} - \Gamma_{kl}^{k} = 2p_l,$$

$$\mu = p_l du^l,$$

или, вследствие произвольности du^l, будем иметь окончательно

$$\overset{*}{\Gamma}_{jk}{}^{i} = \Gamma_{jk}{}^{i} + \delta_j{}^i p_k, \tag{1.3}$$

где p_k — произвольный вектор.

Предположим теперь, что в *бинарной области* заданы все геометрии, определяющие одно и то же параллельное перенесение направлений. Будем искать в этой совокупности такую геометрию, кручение которой равно нулю. Пусть $\overset{*}{\Gamma}_{ij}{}^{k}$ — данные и $\Gamma_{ij}{}^{k}$ — искомые. В таком случае

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{i}{}_{\cdot k}{}^{k}_{\cdot} = \Gamma^{i}{}_{\cdot k}{}^{k}_{\cdot} + \delta_k{}^i p^k,$$

откуда

$$p^i = \overset{*}{\Gamma}_{k}{}^{ik}_{\cdot}. \tag{2.3}$$

Так как индексы справа и слева подняты с помощью одного и того же альтернатора, то p_i определяется однозначно. Таким образом: *среди всех геометрий аффинной связности пространства двух измерений, определяющих одно и то же перенесение направлений, существует одна и только одна геометрия без кручения.*

Будем говорить, что эта геометрия *симметрично представляет данное перенесение направлений.*

Раньше чем перейти к дальнейшему изложению, введём понятие *смешанного дифференцирования* *).

Предположим, что в одном и том же многообразии заданы две различные геометрии, характеризуемые коэффициентами связности $G_{ij}{}^{k}$ и $\Gamma_{ij}{}^{k}$ соответственно.

Вводя обозначение для ковариантного дифференцирования

$$\nabla_k a_i = \partial_k a_i - G_{ik}{}^{l} a_l; \quad \nabla_k a_{(i)} = \partial_k a_i - \Gamma_{ik}{}^{l} a_l,$$

*) Norden, Die relative Geometrie der Flächen, § 7. Труды Семинара по векторному и тензорному анализу, вып. II — III.

будем называть *смешанной производной* тензора высшего ранга (например 2-го) выражение

$$\nabla_k a_{i(j)} = a_i \nabla_k a_{(j)} + (\nabla_k a_i)\, a_j, \tag{3.3}$$

где a_i и a_j — идеальные множители данного тензора. Из определения следует линейный характер введённой операции и обычное правило для дифференцирования произведения.

Особо следует отметить возможность введения смешанного дифференцирования при нахождении обычных ковариантных производных выражений, содержащих свёртывание. Так, например,

$$\nabla (a_{ik} b^k) = (\nabla a_{i(k)})\, b^k + a_{ik} \nabla b^{(k)}. \tag{4.3}$$

Следует также иметь в виду, что при альтернированном дифференцировании

$$\nabla_{[i} a_{j]k}$$

обычная производная не отличается от смешанной. Так,

$$\begin{aligned} \nabla_{[i} a_{(j)]k} &= (\nabla_{[i} a_{j]})\, a_k - a_{[j} \nabla_{i]} a_k = \\ &= \partial_{[i} a_{j]} a_k - a_{[j} \nabla_{i]} a_k = \nabla_{[i} a_{j]} a_k - a_{[j} \nabla_{k]} a_i, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\nabla_{[i} a_{(j)]k} = \nabla_{[i} a_{j]k}.$$

Перейдём теперь к определению понятия пары сопряжённых перенесений, которое следует считать занимающим центральное место во всей настоящей работе.

Напомним предварительно, что мы называем два направления сопряжёнными относительно сети, если они гармонически разделяются направлениями сети, или, иначе говоря, соответствуют друг другу в инволюции, определяемой сетью.

Будем говорить, что два параллельных перенесения, заданных в бинарной области, образуют пару сопряжённых перенесений, если существует такая сеть (базис пары), что всякий раз как некоторое направление переносится параллельно в одном из перенесений пары, то направление, сопряжённое данному относительно базиса, тоже переносится параллельно в другом перенесении пары. Будем называть также *сопряжёнными две геометрии аффинной связности, симметрично представляющие два перенесения направлений, образующих сопряжённую пару.*

Пусть b_{ij} будет тензор сети, данная геометрия аффинной связности представляется симметричными величинами G_{ij}^k, а искомое перенесение представляется также симметричными величинами Γ_{ij}^k.

Рассмотрим два вектора v^i и w^j, направления которых сопряжены относительно сети. Тогда

$$b_{ij} v^i w^j = 0. \tag{6.3}$$

Пользуясь введёнными выше обозначениями для двух различных ковариантных дифференциалов, будем иметь, в силу (6.3) и условия сопряжённости перенесений, предположив, что вектор v^i переносится параллельно, одновременно

$$\nabla v^i = \lambda v^i; \quad \nabla w^{(j)} = \mu w^j. \tag{7.3}$$

Дифференцируя (6.3) и пользуясь приёмом, указанным в тождестве (4.3), будем иметь, в силу (6.3) и (7.3),

$$db_{ij} v^i w^j = \nabla b_{i(j)} v^i w^j + \lambda b_{ij} v^i w^j + \mu b_{ij} v^i w^j = 0$$

или

$$\nabla b_{i(j)} v^i w^j = 0.$$

Так как последнее равенство должно быть удовлетворено при любых v^i и w^j, удовлетворяющих (6.3), то

$$\nabla b_{i(j)} = \nu b_{ij},$$

что, в свою очередь, должно иметь место для любого направления дифференцирования. Отсюда окончательно

$$\nabla_k b_{i(j)} = \omega_k b_{ij}. \tag{8.3}$$

Таково необходимое и достаточное условие сопряжённости данных параллельных перенесений относительно сети, базис которой определяется тензором b_{ij}.

Следует заметить, что ω_k есть, очевидно, ковариантный тензор. Так как тензор сети задан с точностью до скалярного множителя, то и тензор ω_k не определяется однозначно. При перенормировании

$$b_{ij} = \sigma \overset{*}{b}_{ij} \tag{9.3}$$

условие (8.3) принимает вид:

$$\nabla_k \overset{*}{b}_{i(j)} = (\omega_k - \partial_k \lg \sigma) b_{ij},$$

откуда

$$\overset{*}{\omega}_k = \omega_k - \partial_k \lg \sigma. \tag{10.3}$$

Покажем теперь, что *если в бинарной области задана аффинная связность и сеть, то в той же области всегда определяется и притом однозначно параллельное перенесение, сопряжённое данному относительно заданной сети.*

Будем считать, что G_{ij}^k представляют симметрично данное перенесение, а Γ_{ij}^k тоже симметрично представляют искомое, и будем исходить из условия (8.3) для тензора b_{ij} заданной сети.

Введя тензор

$$S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k, \tag{11.3}$$

получим из (8.3)

$$\nabla_k b_{i(j)} = \partial_k b_{ij} - G_{ik}{}^m b_{mj} - \Gamma^m_{jk} b_{mi} = \nabla_k b_{ij} - S^m{}_{kj} b_{im} = \omega_k b_{ij},$$

откуда

$$S^m{}_{kj} b_{im} = -\omega_k b_{ij} + \nabla_k b_{ij}. \qquad (12.3)$$

Если мы согласимся в дальнейшем всегда пользоваться альтернатором, выбранным «согласованно» с тензором b_{ij} так, чтобы при этом имело место тождество

$$b^{ij} = \widetilde{b}^{ij}, \qquad (13.3)$$

то из полученной нами системы уравнений (12.3) получим:

$$S^i_{jk} = b^{im} \nabla_k b_{jm} - \omega_k \delta^i_j. \qquad (14.3)$$

Но

$$S^i_{jk} = S^i_{kj} \qquad (15.3)$$

в силу симметрии G^k_{ij} и Γ^k_{ij}, откуда

$$S'^i{}_{k.}{}^k = b^{im} \nabla^k b_{km} - \omega^i = 0$$

или

$$\omega_i = b^m_i \nabla^k b_{km}. \qquad (16.3)$$

Итак $S^{\cdot i}_{\cdot jk}$, а следовательно, и $\Gamma_{ij}{}^k$ определяются однозначно.

Отметим ещё важное следствие равенства (12.3). Его правая часть, очевидно, симметрична относительно индексов i и j, откуда, свёртывая по этим индексам, с помощью альтернатора получим

$$b^{mn} S^{\cdot}_{mnk} = 0. \qquad (17.3)$$

Введём тензор

$$S_i = S^{\ m}_{\ mi}. \qquad (18.3)$$

Если $S_k = 0$, то тензор $S^{\cdot}_{ijk}$ симметричен по всем своим индексам.

Выведем ещё одно тождество, связывающее введённые величины. Для этого свернём (14.3) с b^{jk}

$$S^i{}_{jk} b^{jk} = b^{im} b^{jk} \nabla_k b_{jm} - \omega_k b^{ki} = b^{im} (b^{jk} \nabla_k b_{jm} - \omega_m).$$

С другой стороны,

$$S_j = S^k{}_{jk} = b^{km} \nabla_k b_{jm} - \omega_j,$$

откуда

$$S^i{}_{jk} b^{jk} = S_k b^{ik}. \qquad (19.3)$$

Рассмотрим, наконец, симметричную часть тензора $S^{\cdot}_{ijk}$:

$$\frac{1}{6} S^{\cdot}_{(ijk)} = \frac{1}{3} (S^{\cdot}_{ijk} + S^{\cdot}_{jki} + S^{\cdot}_{kij});$$

свёртывая с b^{ij}, получим:

$$b^{ij}S^{\cdot}_{(ijk)} = 4b^{m}_{k}S_{m}. \tag{19a.3}$$

Отсюда, если $S^{\cdot}_{(ijk)}=0$, то и $S_m=0$, а следовательно, и $S^{\cdot}_{ijk}$, будучи симметричным, обращается в нуль. Итак, *тензор $S^{\cdot}_{ijk}$ обращается в нуль вместе со своей симметричной частью.*

По двум данным перенесениям пары построим третье, определив соответствующее ковариантное дифференцирование равенством:

$$\nabla a_i + \nabla a_{(j)} = 2\overset{0}{\nabla} a_i. \tag{20.3}$$

Откуда следует, что γ_{ij}^{k} — величины, определяющие это перенесение, которое мы будем называть *средним*, выражаются так:

$$\gamma_{ij}^{\ \ k} = \frac{1}{2}(G_{ij}^{k} + \Gamma_{ij}^{k}). \tag{21.3}$$

Переставив в тождестве (8.3) индексы i и j, введя идеальные множители и сложив полученные результаты, получим

$$(\nabla_k b_i + \nabla_k b_{(i)})\, b_j + b_i(\nabla_k b_j + \nabla_k b_{(j)}) = 2\omega_k b_{ij},$$

откуда

$$\overset{0}{\nabla}_k b_{ij} = \omega_k b_{ij}. \tag{22.3}$$

Полученное равенство показывает, что *среднее перенесение пары есть перенесение Вейля.*

Мы будем называть соответствующую ему геометрию *средней геометрией пары сопряжённых перенесений.*

Формула (22.3) даёт нам возможность дать истолкование тензора ω_k, который участвует в основном тождестве (8.3).

Тензор ω_k определяет вместе с тензором сети b_{ij} среднюю метрику Вейля.

Возвратимся к рассмотрению тензора S^{i}_{jk} и решим для уяснения его геометрического значения следующую задачу: *найти направление w^i, по которому данное направление v^i переносится в бесконечно близкую точку параллельно, одновременно и в одном и в другом перенесении пары.*

По условию, имеем:

$$dv^i + \Gamma_{kl}^{\ i} v^k w^l dt = \lambda v^i,$$

$$dv^i + G_{kl}^{\ i} v^k w^l dt = \mu v^i,$$

откуда, вычитая,

$$S^{i}_{\ kl} v^k w^l = \alpha v^i,$$

или

$$S_{i\,[l} v^{i} v^{k} w^{l]} = 0. \tag{23.3}$$

Если поставить тот же самый вопрос о направлении, переносящимся *вдоль самого себя*, в бесконечно близкую точку, то вектор, соответствующий ему, должен будет удовлетворять уравнению

$$S_{ijk}v^i v^j v^k = 0. \tag{24.3}$$

Будем называть направление, соответствующее последнему требованию, *направлением* S рассматриваемой пары. Из (24) следует, что в каждой точке многообразия данная пара определяет, вообще говоря, три направления S. Линии, огибающие последовательности направлений S, будем тоже называть S-*линиями* пары.

Будем называть линию *двойной геодезической* по отношению данной пары сопряжённых перенесений, если она одновременно является геодезической и в одной, и в другой геометрии пары. Из определения сейчас же следует, что *двойной геодезической может быть только линия* S. Мы придём к более общим результатам, сравнив четыре условия для вектора v^i, касающегося некоторой линии:

$$\nabla v^i = \lambda v^i; \quad \nabla v^{(i)} = \mu v^i; \quad \nabla v^i + \nabla v^{(i)} = \nu v^i; \quad \nabla v^i - \nabla v^{(i)} = \sigma v^i.$$

Первое из них будет выполнено для геодезических одной из геометрий пары, второе для геодезических второй геометрии, третье для геодезических средней метрики, а четвёртое для линии S. Так как каждые два из них являются следствием двух других, то имеет место следующая теорема.

Если из четырёх положений, относящихся к некоторой линии: a) *что она геодезическая* 1*-го рода,* b) *что она геодезическая* 2*-го рода,* c) *что она геодезическая средней метрики,* d) *что она линия* S, *справедливы два, то справедливы и все четыре.*

В частности, всякая линия базиса пары, которая, как мы видели, совпадает с изотропной сетью средней метрики, является геодезической по отношению к средней метрике. Вследствие этого, если *для линии базиса пары сопряжённых перенесений выполнено хотя бы одно из требований* a), b) *и* d), *то тогда выполнены и все три.*

Запишем теперь три условия для касательных векторов некоторой сети:

$$\nabla v^i = \lambda w^i; \quad \nabla v^{(i)} = \mu w^i; \quad \nabla v^i + \nabla v^{(i)} = \nu w^i;$$

$$\nabla w^i = {}'\lambda v^i; \quad \nabla w^{(i)} = {}'\mu v^i; \quad \nabla w^i + \nabla w^{(i)} = {}'\nu v^i,$$

каждое из которых является следствием двух других, а каждое в отдельности характерно для чебышевской сети одной из основных или средней геометрии пары.

Из их сравнения следует, что *сеть, являющаяся чебышевской по отношению к двум из этих геометрий, является чебышевской и по отношению к третьей.*

Декартова сеть является одновременно и чебышевской, и геодезической, следовательно, *будучи таковой в двух из указанных геометрий, она будет такой же и в третьей.*

Рассмотрим, наконец, *сеть, направления которой будут сопряжены относительно направлений базиса,* и которую вследствие этого будем называть *сопряжённой*.

Предположим, что она чебышевская (геодезическая) по отношению к одному из перенесений пары; в таком случае вектор какой-либо её линии будет переноситься параллельно по другой (по той же) линии сети, а сопряжённый ему вектор самой (другой) линии тоже переносится параллельно во втором перенесении пары. Вследствие этого: *сопряжённая сеть чебышевская (геодезическая) по отношению к одному из перенесений пары будет геодезическая (чебышевская) по отношению к другому перенесению.*

Чтобы установить связь между тензорами кривизны двух геометрий, образующих сопряжённую пару, будем искать альтернированную ковариантную производную обеих частей тождества (8.3)

$$\nabla^k \nabla_k b_{i(j)} = \nabla^k (\omega_k b_{i(j)}),$$

причём оба раза будем производить смешанное дифференцирование так, как это указано скобками при индексах.

Разлагая тензор b_{ij} на идеальные множители и выполняя дифференцирование, получим:

$$(\nabla^k \nabla_k b_i) b_j + (\nabla^k b_i) \nabla_k b_{(j)} + (\nabla^k b_i) \Delta_k \flat_{(i)} + b_i \nabla^k \nabla_k \flat_{(j)} = (\nabla^k \omega_k) b_{ij} + \omega^k \omega_k b_{ij}.$$

Два внутренних слагаемых левой части отличаются только знаком, что же касается двух других слагаемых, то, приняв во внимание формулы (5.3) и (15.1), получим:

$$R^k_{.i} b_{kj} + \rho^k_{.j} b_{ik} = -\nabla^k \omega_k b_{ij}, \tag{25.3}$$

где R_{ij} и ρ_{ij} есть тензоры Риччи геометрии 1-го и 2-го рода пары. Симметрируя обе части, получим:

$$R^k_{.(i} b_{j)k} + \rho^k_{.(i} b_{j)k} = -2\nabla^k \omega_k b_{ij},$$

откуда

$$-(R^k_{.i} + \rho^k_{.i}) b_{kj} = \nabla^k \omega_k \flat_{ij} + \lambda \varepsilon_{ij}$$

или

$$R_{ji} + \rho_{ji} = 2H b_{ij} + \varepsilon_{ij} \nabla^k \omega_k, \tag{26.3}$$

где

$$4H = b^{kl} (R_{kl} + \rho_{kl}). \tag{27.3}$$

Альтернирование обеих частей (25.3) даёт нам

$$2H = \flat^{kl} R_{kl} = b^{kl} \rho_{kl}. \tag{28.3}$$

Вводя тензор Риччи средней метрики K_{ij}, полагая

$$K = b^{kl} K_{kl} \tag{29.3}$$

и вводя величину

$$J = H - K \tag{30.3}$$

получим, применив формулу (23.1) вместо (26.3),

$$R_{ij} + \rho_{ij} = 2K_{ij} + Jb_{ij}, \tag{31.3}$$

откуда

$$R^{k}_{.k} + \rho^{k}_{.k} = 2K^{k}_{.k}. \tag{32.3}$$

И, наконец,

$$R_{(ij)} + \rho_{(ij)} = 4Hb_{ij}. \tag{33.3}$$

Последнее равенство показывает, как это нетрудно видеть, что *каждое из семейств абсолютных линий одного рода образует с одним из семейств абсолютных линий другого рода сопряжённую сеть.*

Сравним полученные формулы с известными формулами, дающими связь между тензорами Риччи двух перенесений, зависимость между которыми задана равенством

$$\Gamma^{k}_{ij} - {}'\Gamma^{k}_{ij} = T^{k}_{ij},$$

где T^{k}_{ij} — известный тензор. Тогда *)

$$R_{ij} = {}'R_{ij} + {}'\nabla_{[i} T^{k}_{k]} - T^{\;l}_{j[i} T^{\;k}_{k]l}.$$

Применим эту зависимость к нашему случаю, подставив в неё вместо T^{k}_{ij}

$$G^{k}_{ij} - z^{k}_{ij} = -\frac{1}{2} S^{k}_{ij}$$

или

$$\Gamma^{k}_{ij} - z^{k}_{ij} = \frac{1}{2} S^{k}_{ij},$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} R_{ij} &= K_{ij} - \frac{1}{2} \overset{0}{\nabla}_{[i} S^{k}_{k]j} - \frac{1}{4} S^{l}_{.j[i} S^{k}_{k]l}, \\ \rho_{ij} &= K_{ij} + \frac{1}{2} \overset{0}{\nabla}_{[i} S^{k}_{k]j} - \frac{1}{4} S^{l}_{.j[i} S^{k}_{k]l}. \end{aligned}\right\} \tag{34.3}$$

Складывая, имеем:

$$R_{ij} + \rho_{ij} = 2K_{ij} - \frac{1}{2} S^{l}_{j[i} S^{k}_{k]l}$$

*) R. C., гл. II, формула (132).

или, сравнив с (31.3),

$$4Jb_{ij} = S^{l}_{\cdot j[k}S^{k}_{i]l}, \tag{35.3}$$

откуда

$$8J = b^{ij}S^{l}_{j[k}S^{k}_{i]l}. \tag{36.3}$$

Заметим, что (35) можно было получить также, разрешив уравнение (17.3) относительно b_{ij}. Его решение будет, таким образом, однозначным (до множителя) тогда и только тогда, если $J \neq 0$. Вычитая уравнение (34.3) одно из другого, получим

$$\rho_{ij} - R_{ij} = \overset{0}{\nabla}_{[i}S^{k}_{k]j} \tag{37.3}$$

и, наконец,

$$\rho^{k}_{.k} - R^{k}_{.k} = \overset{0}{\nabla}{}^{k}S_{k}. \tag{38.3}$$

В заключение найдём связь между величинами, определяющими пару сопряжённых перенесений для того случая, когда базис пары совпадает с сетью координатных линий. В этом случае

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b^{11} = b^{22} = 0, \quad b_{12} = \theta, \quad b^{12} = \theta^{-1}. \tag{39.3}$$

Одно из условий (17.3) примет вид:

$$S_{121} + S_{211} = 0$$

или

$$\varepsilon_{12}S^{2}_{.21} + \varepsilon_{21}S^{1}_{.11} = 0,$$

откуда

$$S^{2}_{21} = S^{1}_{11}; \quad S^{1}_{12} = S^{2}_{22}.$$

Введём обозначения

$$\left.\begin{aligned} S^{1}_{11} = S^{2}_{21} = 2T_1; \quad & S^{2}_{22} = S^{1}_{12} = 2T_2; \\ S^{2}_{11} = -2\beta; \quad & S^{1}_{22} = -2\gamma \end{aligned}\right\} \tag{40.3}$$

и тогда

$$S_1 = 4T_1; \quad S_2 = 4T_2. \tag{41.3}$$

Так как основная сеть будет декартовой сетью средней метрики, то для величин z^{k}_{ij} будем иметь:

$$z^{2}_{11} = z^{1}_{22} = z^{1}_{12} = z^{2}_{22} = 0, \quad z^{1}_{11} = \varphi; \quad z^{2}_{22} = \psi, \tag{42.3}$$

откуда, пользуясь (22.3), получаем:

$$\nabla_1 b_{12} = \partial_1\theta - \varphi\theta = \omega_1\theta$$

где

$$\omega_1 = \partial_1 \lg - \varphi; \quad \omega_2 = \partial_2 \lg\theta - \psi \tag{43.3}$$

И, наконец, пользуясь формулами (11.3) и (21.3), получаем:

$$\left.\begin{array}{llll} G_{11}^{\ 1}=\varphi-T_1; & G_{22}^{\ 2}=\psi-T_2 & \Gamma_{11}^{\ 1}=\varphi+T_1; & \Gamma_{22}^{\ 2}=\psi+T_2 \\ G_{12}^{\ 1}=-T_2; & G_{12}^{\ 2}=-T_1 & \Gamma_{12}^{\ 1}=T_2; & \Gamma_{12}^{\ 2}=T_1 \\ G_{11}^{\ 2}=\beta; & G_{22}^{\ 1}=\gamma & \Gamma_{11}^{\ 2}=-\beta; & \Gamma_{22}^{\ 1}=-\gamma. \end{array}\right\} \qquad (44.3)$$

Отметим ещё одну формулу, которая будет полезна в дальнейшем

$$R_{11}=R_{k11}^{\ \ k}=R_{211}^{\ \ 2}=\partial_1 G_{12}^{\ 2}-\partial_2 G_{11}^{\ 2}-G_{11}^{\ 2}(G_{11}^{\ 1}-G_{21}^{\ 2})-G_{11}^{\ 2}(G_{22}^{\ 2}-G_{12}^{\ 1}),$$

откуда

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}=-\rho_{11}=-\partial_1 T_1+\varphi T_1-\partial_2\beta-\psi\beta, \\ R_{22}=-\rho_{22}=-\partial_2 T_2+\psi T_2-\partial_1\gamma-\varphi\gamma. \end{array}\right\} \qquad (45.3)$$

§ 4. Специальные пары перенесений

1. Чебышевская пара. Мы будем называть пару сопряжённых перенесений *чебышевской*, если её базис будет чебышевской сетью. Этот факт может иметь место только одновременно по отношению к обоим перенесениям пары, так как направление, касательное линии базиса, будет самосопряжённым и будет переноситься параллельно одновременно в обоих перенесениях.

Сравнив признак чебышевской сети (11.2) с формулами (6.2), (44.3) и (41.3), получим признак чебышевской пары, не зависящей от системы координат, в виде

$$S_i=0; \qquad (1.4)$$

иными словами, для *чебышевской пары характерна симметрия тензора* $S_{ijk}^{\cdot}$:

$$S_{ijk}^{\cdot}=\frac{1}{6}S_{(ijk)}^{\cdot}. \qquad (2.4)$$

Вследствие этой симметрии условие (17.3) равносильно аполярности направлений S и направлений базиса. Обратно, если эта аполярность имеет место, т. е.

$$b^{mn}S_{(mni)}^{\cdot}=0, \qquad (3.4)$$

то, согласно (19а.3), мы имеем:

$$b_k^m S_m=0,$$

откуда

$$S_i=0.$$

Итак, *для того чтобы пара была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы тройка её направления S была аполярна паре направлений её базиса.*

Будем называть *направлением D, соответствующим данному направлению S*, направление, разделяющее вместе с последним гармонически пару других направлений S. Тогда, приняв во внимание известное геометрическое определение аполярности *), можем заключить, что *для чебышевской пары будет характерной сопряжённость направлений D соответствующим направлениям S.*

Заметим, что, не нарушая условий аполярности, мы можем предположить, что два из направлений S совпадают между собою, но тогда они будут совпадать с третьим направлением S, с тремя направлениями D, и с одним из направлений базиса. Обратно, если одно из направлений S касается линии базиса, то это совпадение семи направлений необходимо будет иметь место в случае выполнения условия аполярности.

2. Полугеодезическая и геодезическая пара. Назовём пару *полугеодезической*, если одно из семейств линий базиса геодезическое и *геодезической*, если базис есть геодезическая сеть.

Каждая из этих возможностей может иметь место только одновременно по отношению к обоим перенесениям, так что все указанные геодезические линии — двойные. Необходимым и достаточным условием того, чтобы базис был полугеодезическим (или геодезическим), является совпадение семейства (или обоих семейств) его линий с семейством (или двумя семействами) линий S.

В частности, для того чтобы пара перенесений являлась одновременно и полугеодезической, и чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы совпадали семь направлений — три направления S, три направления D и направление базиса. Иными словами, левая часть уравнения

$$S^{\cdot}_{mnp}\, du^m\, du^n\, du^p = 0$$

представляет собою полный куб, и оно удовлетворяется для одного из направлений базиса. Очевидно также, что последний результат характеризует полугеодезическую пару, если известно, что она чебышевская.

Получим ещё аналитическую характеристику полугеодезической и чебышевской пары. Так как

$$S^{\cdot}_{ijk} = \lambda u_i\, u_j\, u_k,$$

то одно из уравнений (17.3)

$$b^{kl}\, S^{\cdot}_{kli} = 0$$

*) Fubini-Cech, Introduction à la géomètrie projective differentielle des surfaces, Paris, 1931, § 3, стр. 6 (в дальнейшем эта книга цитируется как F — Č. J.).

будет следствием другого, и b_{ij} не может быть определено из этой системы, вследствие чего, согласно замечанию, которым мы сопровождали формулу (35.3), инвариант $J=0$.

Обратно, если для некоторой чебышевской пары имеет место обращение в нуль J, то по тем же соображениям тензор $S^{\cdot}_{ijk}$ имеет вид

$$S^{\cdot}_{ijk}=a_{ij}\lambda_k.$$

Но вследствие симметрии

$$a_{ik}\lambda^k=0,$$

что, в свою очередь, возможно только, если

$$a_{ij}=\mu\lambda_i\lambda_j,$$

откуда

$$S^{\cdot}_{ijk}=\mu\lambda_i\lambda_j\lambda_k$$

и, кроме того, в силу (17.3)

$$b^{kl}\lambda_k\lambda_l=0,$$

откуда следует, что пара полугеодезическая.

Итак, для того чтобы чебышевская сеть была полугеодезической, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$J=0. \tag{4.4}$$

3. Кодацциева пара. Мы будем называть сеть *кодацциевой*, если тензор этой сети после надлежащего нормирования будет удовлетворять уравнению Кодацци:

$$\nabla^k a_{ik}=0.$$

Пару перенесений, у которой базисом будет служить кодацциева сеть, мы будем называть просто *кодацциевой парой*.

Предположим, что нормирование, после которого удовлетворяется приведённое уравнение, уже выполнено, тогда тензор b_{ij} мы назовём *основным тензором* кодацциевой пары. Из уравнений (16.3) и (22.3) сейчас же следует в этом случае: *для того чтобы пара была кодацциевой, необходимо и достаточно, чтобы её средняя метрика была римановой* *).

Отсюда же мы получаем, в свою очередь, доказательство симметрии определения кодацциевой пары по отношению к обеим её геометриям. Действительно: *если тензор базиса удовлетворяет уравнению Кодацци по отношению к одному из перенесений со-*

*) А. П. Норден, О парах сопряжённых перенесений. Труды семинара по тензорному и векторному анализу при Московском Государственном университете, вып. IV.

пряжённой пары, то он удовлетворяет такому же уравнению и по отношению к другому перенесению, т. е. является основным тензором кодацциевой пары.

4. Эквиаффинная пара. Мы будем называть пару *эквиаффинной*, если обе образующие её сопряжённые геометрии эквиаффинны. Если мы выпишем следующие условия:

a) геометрия 1-го рода эквиаффинная

$$R^{k}_{\cdot k} = 0, \tag{A}$$

b) геометрия 2-го рода эквиаффинная

$$\rho^{k}_{\cdot k} = 0, \tag{B}$$

c) средняя метрика эквиаффинная, т. е. риманова

$$2K^{k}_{\cdot k} = \rho^{k}_{\cdot k} + R^{k}_{\cdot k} = 0, \tag{C}$$

d) тензор S_i градиентен

$$\nabla^{k} S_{k} = \rho^{k}_{\cdot k} - R^{k}_{\cdot k} = 0, \tag{D}$$

то, сравнив их между собою, мы придём к следующим заключениям: *все приведённые условия имеют место для эквиаффинной пары и, обратно, если какие-либо два из них имеют место, то имеют место и все четыре, и пара будет в этом случае эквиаффинной.* В качестве важнейших следствий полученного результата отметим, во-первых, что *всякая эквиаффинная пара является кодацциевой* и, во-вторых, что *если для некоторой чебышевской пары имеет место одно из трёх условий* a, b *и* c, *то она эквиаффинная.*

Отметим теперь связи, которые существуют между «площадями» геометрии 1-го, 2-го рода и средней римановой метрики эквиаффинной пары. Для этого рассмотрим три определяющих их формулы, аналогичные формуле (18.1):

$$\sigma_1 = L_{mn} v^m w^n; \quad \sigma_2 = \Lambda_{mn} v^m w^n; \quad \sigma = \varepsilon_{mn} v^m w^n,$$

причём мы будем иметь, в силу (19.1),

$$\overset{1}{\nabla} L_{mn} = 0; \quad \nabla \Lambda_{(m)(n)} = 0; \quad \overset{0}{\nabla} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Но вместо первого из этих равенств, например, мы можем написать:

$$\partial_1 L - G^1_{11} L - G^2_{21} L = 0,$$

откуда получим, продолжая по аналогии,

$$G^{k}_{ki} = \partial_i \lg L; \quad \Gamma^{k}_{ki} = \partial_i \lg \Lambda; \quad \overset{0}{\Gamma}{}^{k}_{ki} = \partial_i \lg \varepsilon.$$

Вычитая из второго первое, мы получим, пользуясь формулой (11.3):

$$S_i = \partial_i \lg \frac{\Lambda}{L} = \partial_i \lg \frac{\Lambda\,(v^1w^2 - v^2w^1)}{L\,(v^1w^2 - v^2w^1)},$$

или

$$S_i = \partial_i \lg \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \tag{5.4}$$

так что *тензор S_i эквиаффинной пары равен логарифмической производной отношения соответствующих площадей 2-го и 1-го рода*. В силу этого результата *эквиаффинная и одновременно чебышевская пара характеризуется тем, что в ней соответствующие площади 1-го и 2-го рода находятся в постоянном отношении*.

Сложив первые два из полученных равенств и сравнив с третьим, получим, вследствие (21.3), соотношение, которое после интеграции примет вид

$$L\Lambda = cs^2.$$

Так же, как в предыдущем случае, мы получаем:

$$\sigma_1\sigma_2 = c\sigma^2, \tag{6.4}$$

откуда следует, что *площадь, определяемая в средней метрике только постоянным множителем, отличается от среднего пропорционального соответствующих площадей 1-го и 2-го рода*. Нужно заметить, что этот постоянный множитель можно свести к единице при надлежащем выборе «масштабов» для измерения площадей и их ориентации. Для эквиаффинной чебышевской пары все три площади можно считать совпавшими.

5. Парой Вейля мы будем называть такую пару, которая образована двумя сопряжёнными между собою геометриями Вейля. Так как геометрия Вейля характеризуется существованием двух полей абсолютно параллельных направлений, касательных к её изотропной сети, то поля направлений, сопряжённых изотропным направлением некоторой геометрии Вейля, будут снова полями абсолютно параллельных направлений. Отсюда следует, что *геометрия, сопряжённая геометрии Вейля, будет тоже геометрией Вейля*. Итак: *всякая пара сопряжённых перенесений, из которых одно вейлево — вейлева*. Из приведённых рассуждений следует также: *каждое из семейств изотропных линий геометрии Вейля образует сопряжённую сеть с одним из изотропных семейств сопряжённой геометрии*.

Установим связь между углами 1-го и 2-го рода, определёнными относительно каждого из перенесений вейлевой пары. Рассмотрим два произвольных направления $\underset{1}{l}$ и $\underset{2}{l}$, два изотропных направления первой метрики $\underset{1}{i}$ и $\underset{2}{i}$. Угол 1-го рода между направлениями $\underset{1}{l}$ и $\underset{2}{l}$ определится так:

$$\widehat{\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}} = c \lg (\underset{1}{i}\,\underset{2}{i}\,\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}).$$

Так как изотропные направления $\underset{1}{j}$ и $\underset{2}{j}$ второй метрики сопряжены направлением $\underset{1}{i}$ и $\underset{2}{i}$ соответственно, то угол 2-го рода между направлениями $\underset{1}{m}$ и $\underset{2}{m}$ соответственно сопряжёнными данным

$$\widehat{m_1\, m_2} = c' \lg (\underset{1}{j}\,\underset{2}{j}\,\underset{1}{m}\,\underset{2}{m}),$$

вследствие очевидного совпадения ангармонических отношений, будет только постоянным множителем отличаться от угла $\widehat{\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}}$. Итак: *в двух сопряжённых геометриях Вейля можно установить измерение углов так, что угол 1-го рода между двумя направлениями будет равен углу 2-го рода между направлениями, сопряжёнными данным относительно базиса пары.*

Отсюда, в частности:

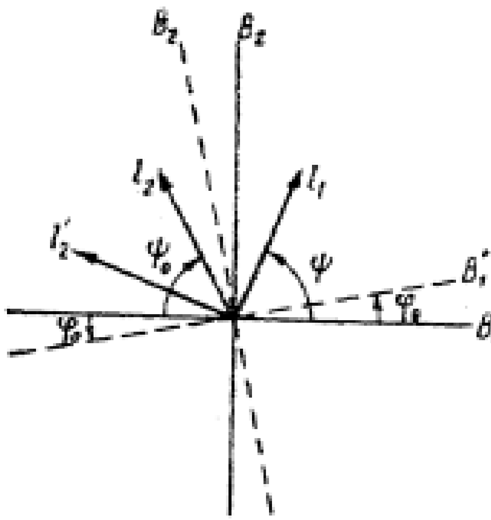
a) угол между двумя сопряжёнными направлениями равен в обеих геометриях (по абсолютной величине),

b) угол между направлениями базиса равен в обеих геометриях.

6. Минимальной парой будем называть такую пару Вейля, базис которой будет ортогональной сетью в обеих сопряжённых геометриях.

Очевидно, что мы получим тоже характеристическое свойство минимальной пары, если потребуем, чтобы изотропные сети каждой из сопряжённых геометрий Вейля были сопряжёнными. Изотропные семейства 1-го и 2-го рода пары Вейля должны быть попарно сопряжены между собою, откуда следует: *изотропные сети обеих геометрий Вейля, образующих минимальную пару, совпадают между собою.* Иными словами: *обе метрики Вейля, образующие минимальную пару, находятся в конформном соответствии.*

Рассмотрим сеть B, совпадающую с базисом минимальной пары, и образуем из неё новую ортогональную сеть B', повернув в каждой точке направления касательные к линиям B на один и тот же угол φ_0. Возьмём два направления $\underset{1}{l}$ и $\underset{2}{l}$ сопряжённых относительно B, которые могут быть изображены двумя векторами, симметрично расположенными относительно прямой B_2, изображающей одну из двух взаимно ортогональных касательных сети B. Повернув оси B на угол φ_0, получим направление B'. Находя вектор $\underset{2}{l'}$, представляющий направление, сопряжённое направлению $\underset{1}{l}$ относительно B', мы без труда убедимся, что для этого достаточно взять вектор, образующий угол $2\varphi_0$ с вектором $\underset{2}{l}$, и во всех этих рассуждениях приходится опереться только на аддитивный характер функции, определяющей угол. Итак, направление $\underset{2}{l}$, сопряжённое $\underset{1}{l}$ относительно B, и направление $\underset{2}{l'}$, сопряжённое ему же относительно B', образуют между собою угол, не зависящий от точки. Предположим теперь, что направление $\underset{1}{l}$ переносится параллельно в перенесении 2-го рода. В этом случае направление $\underset{1}{l}$ тоже переносится параллельно в перенесении 1-го рода, в силу сопряжённости. Но это перенесение вейлево и сохраняет углы, а значит, и направление $\underset{2}{l'}$ тоже переносится параллельно в перенесении 1-го рода.



Фиг. 4.

Отсюда следует, что сеть B', относительно которой сопряжены $\underset{1}{l}$ и $\underset{2}{l'}$, тоже может считаться базисом пары, наравне с сетью B.

Итак: *если некоторая ортогональная сеть служит базисом минимальной пары, то, повернув её касательные на один и тот же угол, мы образуем новую ортогональную сеть, которая тоже будет базисом этой же пары.* Отсюда следует, что *минимальная пара допускает существование ∞^1 различных базисов.*

Последний результат показывает, что *средняя метрика минимальной пары будет квазиевклидовой*; действительно, базис является декартовой сетью средней метрики, и существование ∞^1 таких сетей допускает только квазиевклидова геометрия.

Предположим теперь, что о некоторой паре известно только то, что она допускает существование двух различных базисов B и B'. Так как оба они будут декартовыми сетями средней метрики, то она будет квазиевклидова. Если измерять углы относительно одного из этих базисов B, то декартову сеть B' нужно будет считать изогональной и, следовательно, четвёрка направлений B и B' образует ангармоническое отношение, не зависящее от точки. Рассмотрим теперь сеть C, сопряжённую одновременно и относительно B, и относительно B', которая всегда существует и определяется однозначно, если B и B' независимы. Если измерять углы относительно C, то обе сети B и B' следует считать ортогональными, и соответствующие им направления образуют один и тот же угол φ_0, не зависящий от точки, вследствие постоянства ангармонического отношения направлений B и B'. Рассмотрим произвольное направление $\underset{1}{l}$ и два сопряжённых ему направления $\underset{2}{l}$ и $\underset{2}{l'}$ относительно B и B' соответственно. Угол между ними $\widehat{\underset{2}{l'}\,\underset{2}{l}}$ будет постоянным и равным, как это было показано в аналогичном случае. Но при параллельном перенесении 1-го рода направления $\underset{1}{l}$, направления $\underset{2}{l}$ и $\underset{2}{l'}$ будут переноситься параллельно в геометрии 2-го рода, сохраняя при этом свой угол относительно сети C, которая вследствие этого есть изотропная сеть геометрии Вейля. Оба базиса B и B' будут ортогональными в этой геометрии, откуда следует, что рассматриваемая пара минимальная. Итак: *если некоторая пара допускает существование двух различных базисов, то она допускает существование и* ∞^1 *базисов и есть минимальная пара.*

7. **Квазиевклидовой парой** будем называть пару, образованную двумя квазиевклидовыми геометриями. Чтобы получить квазиевклидову пару геометрий, достаточно потребовать, чтобы одна из геометрий сопряжённой пары была квазиевклидовой. Действительно, если геометрия 1-го рода обладает абсолютным параллелизмом направлений, то всякому полю направлений абсолютно параллельных в этой геометрии будет соответствовать поле сопряжённых направлений, которые будут тоже абсолютно параллельными в геометрии 2-го рода. Итак: *геометрия, сопряжённая квазиевклидовой, будет тоже квазиевклидовой, причём каждому полю параллельных направлений соответствует в сопряжённой геометрии тоже поле параллельных направлений, сопряжённых данным.*

8. **Парой Римана** мы будем называть пару сопряжённых геометрий Римана. В силу определения, имеем: *риманова пара есть эквиаффинная пара Вейля.* Вследствие этого для получения римановой пары достаточно найти геометрию, сопряжённую произвольной геометрии Римана относительно некоторой кодацциевой сети, принятой за базис. Рассмотрим линейные элементы

$$ds_1 = g_{kl}du^k du^l; \quad ds_2 = \gamma_{kl}du^k du^l$$

двух сопряжённых геометрий Римана и кривизны соответствующих квадратических форм K и $\varkappa$.

Как известно, кривизна основной квадратичной формы римановой геометрии равна пределу отношения угла поворота вектора, обведённого параллельно по бесконечно малому контуру, к площади, заключённой внутри этого контура, стягивающегося к точке

$$K = \lim_{\Delta\sigma_1 \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma_1}; \quad \varkappa = \lim_{\Delta\sigma_2 \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta\sigma_2}.$$

Рассмотрим теперь два вектора $\underset{1}{l}$ и $\underset{2}{l}$, направления которых будут сопряжены относительно базиса пары, и будем обводить оба эти вектора параллельно по одному и тому же контуру, но первый в перенесении 1-го рода, а второй в перенесении 2-го рода; заметим, что сопряжённость их направлений при этом не нарушится. Вернувшись в начальную точку контура со значениями $\underset{1}{l'}$ и $\underset{2}{l'}$ и оставаясь сопряжёнными, они образуют вследствие этого между собою одинаковые углы 1-го и 2-го рода так же, как и до начала перенесения. Отсюда сейчас же следует

$$\Delta\varphi = \underset{1}{l}\,\overset{\wedge}{}\underset{2}{l'} = \Delta\psi = \underset{2}{l}\,\overset{\wedge}{}\underset{2}{l'},$$

или

$$\frac{K}{\varkappa} = \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_1}, \tag{7.4}$$

или же

$$\frac{K}{\varkappa} = c\,\frac{\varepsilon^2}{L^2} = \frac{1}{c}\,\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2}, \tag{8.4}$$

или, наконец,

$$\partial_i \lg\left(\frac{K}{\alpha}\right) = S_i. \tag{9.4}$$

Таким образом: *кривизны двух сопряжённых римановых геометрий обратно пропорциональны соответственным бесконечно малым площадям.*

Формула (9.4) показывает, что у *чебышевской римановой пары кривизны геометрии 1-го и 2-го рода отличаются только постоянным множителем, который зависит от выбора масштаба измерения дуг в обеих геометриях.*

Отметим ещё, что для *минимальной римановой пары средняя геометрия*, которая должна являться одновременно и квазиевклидовой, и эквиаффинной, *будет евклидовой.*

9. Евклидовой парой будем называть риманову пару, составленную из двух евклидовых геометрий. Вопрос построения евклидовой пары решается особенно просто. Он сводится к отысканию такого тензора *евклидовой плоскости*, который удовлетворяет уравнению Кодацци (см. случай 8) и который нужно принять за основной тензор базиса евклидовой пары:

$$\nabla^k b_{ki} = 0.$$

Первый интеграл этого уравнения получим, положив

$$b_{ij} = \nabla_j \varphi_i,$$

но, в силу симметрии b_{ij}, φ_i градиентен, откуда

$$\varphi_i = \nabla_i \psi,$$

или

$$b_{ij} = \nabla_i \nabla_j \psi,$$

где ψ — произвольная функция точки.

10. Самосопряжённой парой мы будем называть пару совпадающих между собою геометрий. Так как в этом случае направления, сопряжённые относительно базиса, должны переноситься параллельно одновременно и притом в одном и том же перенесении, то прямой угол относительно базиса сохраняется при параллельном перенесении, откуда следует, что геометрия будет вейлевой, а базис совпадает с её изотропной сетью.

Итак: *всякая самосопряжённая пара составлена из двух совпадающих геометрий Вейля*. Очевидно и наоборот: *всякая геометрия Вейля сопряжена самой себе относительно базиса, совпадающего с её изотропной сетью*. Вследствие того, что базис самосопряжённой пары будет декартовой сетью, *самосопряжённая пара является одновременно и геодезической, и чебышевской, и вейлевой*.

Минимальная пара будет самосопряжённой тогда и только тогда, если она допускает существование базиса декартового и ортогонального одновременно. Но в таком случае каждая из геометрии пары допускает существование двух декартовых сетей, т. е. будет квазиевклидовой. Обратно, квазиевклидову самосопряжённую пару можно считать минимальной, так как каждую из ∞^2 декартовых сетей, которая будет ортогональна относительно такой же сети, принятой за основную, можно считать базисом.

Итак: *для того чтобы самосопряжённая пара была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы она была квазиевклидовой*.

Допустим теперь, что в некоторой паре существуют более, чем три семейства двойных геодезических. Так как двойные геодезические будут линиями S, уравнение которых есть

$$S_{lmn} du^l du^m du^n = 0,$$

то это возможно только при условии

$$S_{(lmn)} = 0,$$

но тензор S_{lmn} обращается в нуль вместе со своей симметричной частью и следовательно,

$$S_{lmn} = 0.$$

Итак: *если пара допускает существование более чем трёх семейств двойных геодезических, то она самосопряженная*. Вследствие этого минимальная геодезическая пара будет самосопряжённой, так как она допускает существование двух семейств двойных геодезических базиса и двух двойных геодезических семейств общей изотропной сети сопряжённых геометрий.

Минимальная чебышевская пара тоже будет самосопряжённой, так как она допускает существование ортогонально чебышевского базиса, который вследствие этого будет геодезическим.

Итак: *если для данной пары верны два из трёх положений:* 1) *что она геодезическая,* 2) *что она чебышевская,* 3) *что она минимальная, то верны и все три сразу, и пара является самосопряжённой квазиевклидовой.*

§ 5. Преобразование перенесений

Так как всякую сеть

$$a_{mn}du^m du^n = 0,$$

заданную в пространстве аффинной связности, можно принять за базис пары, образованной данным перенесением, то тензор (14.3)

$$S^i_{jk} = \tilde{a}^{im}\nabla_k a_{jm} - \tilde{a}^m_k \nabla^n a_{nm}\delta^i_j, \tag{1.5}$$

а с ним и тензор

$$S_j = S^k{}_{kj} = \tilde{a}^{km}\nabla_k a_{mj} - \tilde{a}^m_j \nabla^n a_{nm} \tag{2.5}$$

будут *инвариантами сети*, т. е. не будут меняться при изменении нормирования тензора сети.

В инвариантности последнего тензора можно убедиться ещё вводя тензор

$$t_i = \frac{1}{4} S_i. \tag{3.5}$$

Приняв данную сеть за сеть координатных линий, мы получим из (41.3) и (44.3)

$$t_1 = -G^2_{12}; \quad t_2 = -G^1_{12},$$

откуда, сравнив с (8.2), будем иметь: *координаты тензора t_i совпадают с тангенциальными координатами ассоциированной прямой сети.*

Вследствие этого обращение его в нуль характеризует чебышевскую сеть.

Тензор, совпадающий с тензором t_i для сетей пространства Римана, был введён Я. С. Дубновым, который и назвал его *чебышевским тензором сети**). Я указал**), что тензор этот имеет

*) Compt. Rend., t. 192 (1931 г.), стр. 261—264.
**) Compt. Rend., t. 192 (1931 г.), стр. 135—137.

смысл и для любой геометрии аффинной связности, и сохранил для него то же название.

После небольших преобразований правой части (2.5) придадим ей более удобную форму, употребляемую обычно Я. С. Дубновым,

$$t_i = \frac{1}{2}\tilde{a}^{mn}\left(\nabla_m a_{ni} - \frac{1}{2}\nabla_i a_{mn}\right). \tag{4.5}$$

Найдём закон преобразования чебышевского тензора при преобразовании перенесения, определённом условием

$$'G^k_{ij} = G^k_{ij} + \sigma^k_{ij}. \tag{5.5}$$

Приняв во внимание, что ковариантная производная тензора сети преобразуется так:

$$'\nabla_k a_{ij} = \nabla_k a_{ij} - \sigma^m_{ki} a_{jm} - \sigma^m_{kj} a_{jm},$$

получим:

$$'t_i = t_i - \frac{1}{2}\tilde{a}^{mn}\left(\sigma^k_{mi} a_{kn} + \sigma^k_{mn} a_{ki} - \sigma^k_{mn} a_{ki}\right),$$

откуда:

$$'t_i = t_i - \frac{1}{2}\tilde{a}^{mn}\sigma^k_{mn} a_{ki}. \tag{6.5}$$

Предположим теперь, что в пространстве задана сеть a_{ij} и пара сопряжённых перенесений, базис которой, вообще говоря, не совпадает с сетью. В таком случае для данной сети можно вычислить три чебышевских тензора t_i, τ_i и θ_i по отношению к каждой из геометрий; чебышевский тензор 1-го рода, чебышевский тензор 2-го рода и чебышевский тензор по отношению к средней метрике.

Чтобы установить связь между ними, заметим, что на геометрию 2-го рода можно смотреть как на преобразование геометрии 1-го рода, причём это преобразование определено (5.5), где

$$\sigma^k_{ij} = S^k_{ij};$$

тогда, согласно (6.5), будем иметь для чебышевского тензора 2-го рода:

$$\tau_i = t_i - \frac{1}{2}\tilde{a}^{mn} S^k_{mn} a_{ki}. \tag{7.5}$$

Кроме того,

$$\nabla a_{ij} + \nabla a_{(i)\,(j)} = 2\overset{0}{\nabla} a_{ij},$$

откуда, имея в виду линейность и однородность выражений чебышевского тензора через ковариантные производные тензора сети, получаем:

$$\theta_i = \frac{t_i + \tau_i}{2}. \tag{8.5}$$

Применив последнюю формулу к базису, который всегда будет чебышевской сетью средней метрики, получим для него, обозначив его чебышевский тензор через T_i:

$$t_i = T_i = \frac{S_i}{4}; \quad \tau_i = -T_i = -\frac{S_i}{4}. \tag{9.5}$$

Перейдём теперь к рассмотрению различных преобразований.

А) Проективное преобразование. Будем говорить, что перенесение подвергается *проективному преобразованию* *), если при этом преобразовании сохраняются геодезические линии. Известно, что такое преобразование, относящее геометрии аффинной связности, без кручения, такую же геометрию можно задать формулой (5.5), положив в ней

$$\sigma_{ij}^{k} = \delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i, ^{**)} \tag{10.5}$$

где p_i — произвольный вектор, который будем называть *вектором преобразования*.

Закон преобразования чебышевского тензора t_i некоторой сети будет в этом случае иметь вид:

$$'t_i = t_i - p_i; \tag{11.5}$$

как первое его следствие, будем иметь для двух сетей:

$$'t_i - '\overset{*}{t}_i = t_i - \overset{*}{t}_i, \tag{12.5}$$

так что *разность чебышевских тензоров двух сетей есть инвариант проективного преобразования.*

Если применить преобразование, вектор которого равен чебышевскому тензору данной сети $p_i = t_i$, то после этого преобразования сеть станет чебышевской.

Итак: *среди совокупности перенесений, заданных в бинарной области и связанных между собою проективным преобразованием, существует одно и только одно перенесение, по отношению к которому данная сеть будет чебышевской.*

Иными словами: *перенесение определяется однозначно, если заданы его геодезические и задана одна чебышевская сеть.* Мы будем называть геометрию *проективно присоединённой данной сети пространства аффинной связности*, если его геодезические совпадают с геодезическими данной геометрии, а сеть по отношению к ней — чебышевская.

Предыдущий результат говорит нам, что проективно присоединённая геометрия однозначно определяется заданием сети и связности. Если данная сеть геодезическая, то в присоединённой ей геометрии

*) Bahntreue Transformation у Схоутена.
**) R. C., гл. IV, § 1.

она будет декартовой. Итак, *геометрия, проективно присоединённая геодезической сети, будет вейлева, и данная сеть совпадает с её изотропной сетью.*

Я. С. Дубнов называет *) геодезическую сеть метрической геометрии *особенной*, если существует другая геодезическая сеть, чебышевский тензор которой совпадает с чебышевским тензором данной геодезической сети.

Сохраняя это название и для геодезических сетей любой связности, заметим, прежде всего, что их характерное свойство инвариантно по отношению к проективному преобразованию вследствие (12.5). Находя присоединённую геометрию особенной чебышевской сети, мы видим, что эта геометрия будет допускать существование двух декартовых сетей, и следовательно, будет *квазиевклидовой*. Если принять одну из этих декартовых сетей за изотропную сеть Вейля, то другая будет изогональной и, следовательно, обе сети определяют ангармоническое отношение, не зависящее от точки. Строя, наконец, в присоединённой геометрии все другие декартовы сети числом ∞^2, мы видим, что и в данной геометрии существует ∞^2 геодезических сетей с одинаковыми чебышевскими тензорами, причём каждые две из них определяют постоянное ангармоническое отношение.

Итак: *для того чтобы геометрия допускала существование особенных геодезических сетей, необходимо и достаточно, чтобы она допускала геодезическое отображение на квазиевклидову геометрию. Если существуют две особенные геодезические сети, то их существует и ∞^2, причём каждые две из них определяют постоянное ангармоническое отношение* **).

Простым примером особенной геодезической сети может служить такая сеть проективно евклидовой геометрии, которая при геодезическом отображении на плоскость переходит в сеть, образованную двумя пучками прямых. Всякая сеть такого же характера с центрами соответствующих ей пучков, лежащими на той же прямой, будет иметь тот же чебышевский тензор, что и первая. Это станет тотчас же очевидным, стоит только принять эту прямую за несобственную прямую аффинной геометрии, тогда все указанные сети плоскости будут декартовыми.

Будем называть проективное преобразование — эквиаффинным, если оно относит эквиаффинной геометрии снова эквиаффинную. Так как для данной и для преобразованной геометрии будем иметь:

$$'G^k_{ki} = G^k_{ki} - 3p_i, \tag{13.5}$$

а для эквиаффинных геометрий сумма G^k_{ki} градиентна, то *эквиаффинное*

---

*) Известия Академии Наук СССР, 1935 г., том IV (IX), № 1—2 (70—71), стр. 9.

**) Вторая часть этого результата для случая метрической геометрии принадлежит Я. С. Дубнову, см. сноску на стр. 163.

проективное преобразование характеризуется тем, что вектор его градиентен.

В § 5, разделе 4) мы видим, что базис эквиаффинной пары есть сеть Кодацци. С другой стороны, тензор S_i соответствующей пары градиентен. Отсюда мы заключаем, что в *эквиаффинной геометрии кодацциева сеть характеризуется тем, что её чебышевский тензор градиентен.*

Сопоставляя полученные результаты, мы получаем новую характеристику кодацциевой сети эквиаффинной геометрии: *присоединённая геометрия этой сети эквиаффинная. Называя сетью Риччи геодезическую-кодацциеву сеть эквиаффинной геометрии* и принимая во внимание, что присоединённая геометрия её будет одновременно и эквиаффинной и вейлевой, т. е. геометрией Римана, приходим к следующему заключению: *для того чтобы эквиаффинное пространство двух измерений допускало геодезическое отображение на пространство Римана, необходимо и достаточно, чтобы в нём существовала сеть Риччи.*

В частности, то же условие характеризует метрику Лиувилля, которая, согласно теореме Дини, есть единственная риманова метрика, допускающая проективное отображение на другую метрику Римана. При этом следует добавить для исключения тривиального случая тождественного преобразования, что сеть Риччи, существование которой мы требуем, должна быть отлична от изотропной.

Запишем линейный элемент метрики Лиувилля в обычном виде

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2),$$

а линейный элемент метрики Лиувилля, на которую происходит отображение, в виде

$$d's^2 = \left(\frac{1}{U+h} + \frac{1}{V-h}\right)\left(\frac{du^2}{U+h} - \frac{dv^2}{V-h}\right).$$

Так как h — произвольное постоянное, то отображение это возможно ∞^1 способами.

Уравнение сетей Риччи, которые должны переходить после отображения в изотропные сети новых метрик, будет иметь вид:

$$\frac{du^2}{U+h} - \frac{dv^2}{V-h} = 0,$$

т. е. давать известный квадратичный интеграл геодезических *).

Приняв всё это во внимание, заключаем: что если некоторая эквиаффинная геометрия допускает существование двух сетей Риччи, то она допускает существование и ∞^1 таких сетей и так как она отображается геодезически на поверхность Лиувилля.

---

*) **Bianchi**, loc. cit., § 112, 117.

Применим полученные результаты к геодезической римановой паре. Так как базис геодезический и вместе с тем кодацциев, то базис такой пары будет сетью Риччи. Если геометрия не самосопряжённая и базис не совпадает с изотропными сетями сопряжённых метрик, то обе они допускают существование двух сетей Риччи и, следовательно, будут геометриями *Лиувилля.*

Итак: *риманова геодезическая пара или самосопряжённая, или состоит из двух метрик* Лиувилля.

Рассмотрим, наконец, проективно евклидово эквиаффинное двухмерное пространство. Оно может быть отображено только на риманово пространство постоянной кривизны, как это следует из теоремы Бельтрами. С другой стороны, метрика постоянной кривизны, будучи осуществлена на проективной плоскости, будет иметь в качестве абсолюта кривую 2-го класса (которая, в частности, может распасться на пару пучков), и изотропные прямые метрики будут касаться абсолюта.

Отсюда следует: сетью Риччи эквиаффинной проективно евклидовой геометрии будет всякая геодезическая сеть, которая перейдёт в сеть прямолинейных касательных кривой 2-го класса при геодезическом отображении на плоскость. Таким образом геометрия указанного типа допускает существование ∞^5 таких сетей, из которых ∞^4 будет особенных геодезических. Последние будут отображаться на два пучка.

В частности, последние результаты имеют силу и для римановой геометрии постоянной кривизны.

В. Конформное преобразование. Понятие конформного преобразования, которое устанавливается обычно для метрики Римана, можно распространить и на случай метрики Вейля.

Будем называть конформным преобразованием метрики Вейля переход к другой такой метрике, с той же изотропной сетью, что и у данной.

Так как тензоры g_{ij} изотропных сетей в обоих случаях можно считать одинаковыми, то геометрии могут отличаться только тензорами ω_i так, что

$$g_{ij} = 'g_{ij}; \quad '\omega_i = \omega_i + q_i, \tag{14.5}$$

где q_i — произвольный вектор, который мы будем называть вектором преобразования. Так как перенесение Вейля определяется известной формулой *)

$$G_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\left[\omega_i \delta_j^k + \omega_j \delta_i^k - g_{ij}\tilde{G}^{k\alpha}\omega_\alpha\right], \tag{15.5}$$

где $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ — скобка Кристоффеля формы $g_{ij}du^i du^j$, то конформное преобразование определяется (5.5), где

$$\sigma_{jk}^i = \frac{1}{2}\left[q_i \delta_j^k + q_j \delta_i^k - g_{ij}\tilde{g}^{k\alpha}q_\alpha\right]. \tag{16.5}$$

*) См. R. C., гл. VI, приведённые в начале формулы (II 47.40), (II 65).

Найдём закон изменения чебышевского тензора некоторой сети. Применяя формулу (6.5), получаем:

$$'t_i = t_i - \frac{1}{2} q_i + \frac{1}{4} [\tilde{a}^{mn} g_{mn} \tilde{g}^{kl} q_l a_{ki} - 2\tilde{a}^{mn} a_{mi} q_n]$$

или

$$'t_i = t_i - \frac{1}{2} q_i + \frac{1}{4} \tilde{a}^{mn} g_{mn} \tilde{g}^{kl} q_k a_{li}. \quad (17.5)$$

Особенно простой вид принимает эта зависимость для ортогональной сети, т. е. если

$$\tilde{a}^{mn} g_{mn} = 0;$$

в этом случае

$$'t_i = t_i - \frac{1}{2} q_i, \quad (18.5)$$

т. е.

$$'t_i - '\overset{*}{t}_i = t_i - \overset{*}{t}_i. \quad (19.5)$$

Итак: *разность чебышевских тензоров двух ортогональных сетей есть инвариант конформного преобразования.*

Задав некоторую сеть с чебышевским тензором t_i и произведя преобразование

$$q_i = \frac{1}{2}\ t_i,$$

мы получим новую геометрию Вейля, в которой данная сеть будет чебышевской. Так как, с другой стороны, она останется ортогональной, т. е. декартовой, то эта новая геометрия будет допускать существование двух декартовых сетей (одна изотропная, другая данная). Итак: *среди совокупности геометрий Вейля, заданных в бинарной области и связанных между собою конформным преобразованием, существует одна и только одна квазиевклидова геометрия, по отношению к которой данная ортогональная сеть будет декартовой.*

Эту геометрию мы будем называть *конформно-присоединённой* данной ортогональной сети.

В качестве первого следствия отметим, что *всякая геометрия Вейля может быть конформно отображена на квазиевклидову геометрию.*

Будем называть *пучком ортогональных сетей* совокупность сетей, каждая из которых получена поворотом касательных одной из них на угол, не зависящий от точки. В геометрии, присоединённой к одной из сетей пучка, все сети пучка будут декартовыми и, следовательно, чебышевские тензоры двух любых из них будут равны нулю, а значит и между собою. Но в силу (19.5), это равенство должно иметь место и в данной геометрии. Итак: *все сети пучка* *ортогональных сетей имеют один и тот же чебышевский тензор.* Обратно, *если две ортогональные сети имеют одинаковые чебышевские тензоры, то они принадлежат пучку.*

Обобщая понятие пучка, будем называть пучком сетей, сопряжённых относительно данной сети (базиса пучка), совокупность сетей, образующих попарно между собою постоянное ангармоническое отношение. Предположим, что пучок задан в любом пространстве (двух измерений) аффинной связности, а базис пучка геодезический. Рассмотрим геометрию, *проективно присоединённую* к базису пучка. В этой геометрии наш пучок станет пучком ортогональных сетей, так как базис станет изотропной сетью вейлевой геометрии. Поэтому все сети пучка будут после преобразования иметь одинаковые чебышевские тензоры. Но факт этот не зависит от преобразования. Итак: *все сети пучка сопряжённых сетей с геодезическим базисом имеют один и тот же чебышевский тензор**).

Конформное преобразование в обычном смысле этого слова относит геометрии Римана снова геометрию Римана, т. е. иными словами сохраняет эквиаффинный характер геометрии. Получив из (16.5)

$$'G^k_{ki} = G^k_{ki} + q_i \tag{20.5}$$

и приняв во внимание градиентный характер сумм в правой и левой части, получаем: *вектор конформного преобразования, относящего геометрии Римана снова геометрию Римана, градиентен.* Рассмотрим ортогональную кодацциеву сеть риманова пространства. Так как её чебышевский тензор градиентен, то геометрия, присоединённая к ней, будет снова риманова. Но эта геометрия квазиевклидова, а значит должна быть просто евклидовой. Данная ортогональная сеть будет по отношению к своей присоединённой геометрии ортогональной декартовой сетью евклидовой плоскости. Выбрав её за координатную сеть, приведём линейный элемент присоединённой римановой геометрии к виду:

$$d's^2 = dx^2 + dy^2.$$

Возвращаясь к данной геометрии, мы получим линейный элемент данной геометрии в тех же параметрах

$$ds^2 = \lambda\,(dx^2 + dy^2),$$

так что сеть будет изотермически ортогональной. Обратно, если сеть изотермически ортогональная, то при комформном отображении на плоскость она может быть переведена в декартову, откуда следует градиентность её чебышевского тензора. Итак: *для того чтобы сеть римановой геометрии была изотермически ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы она была кодацциевой.*

*) Последний результат принадлежит Я. С. Дубнову.

Применим полученный результат к минимальной римановой паре. Базис этой пары ортогонален по отношению к обеим метрикам пары и вместе с тем является кодаццневой сетью. Отсюда: *базис минимальной римановой пары будет изотермически ортогональным по отношению к обеим геометриям.*

Отсюда: *для построения самой общей римановой минимальной пары следует принять за базис произвольную ортогональную изотермическую сеть римановой геометрии и найти относительно неё геометрию, сопряжённую данной.*

C. Составное преобразование пары сопряжённых перенесений. Зафиксировав базис пары сопряжённых перенесений, будем подвергать одно из них проективному преобразованию и выясним, как должно преобразовываться второе перенесение, чтобы сопряжённость не нарушилась.

Имея по условию

$$'G^k_{ij} = G^k_{ij} + \delta^k_{(i}p_{j)},$$

положим:

$$'\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \sigma^k_{ij},$$

и примем во внимание, что, в силу сохранения базиса, средняя метрика должна испытывать конформное преобразование. Поэтому

$$'z^k_{ij} = \frac{1}{2}('G^k_{ij} + '\Gamma^k_{ij}) = \frac{1}{2}[\Gamma^k_{ij} + G^k_{ij} + \delta^k_{(i}p_{j)} + \sigma^k_{ij}] =$$

$$= z^k_{ij} + \frac{1}{2}[\delta^k_{(i}q_{j)} - b_{ij}b^{km}q_m],$$

откуда

$$\sigma^k_{ij} = \delta^k_i(q_j - p_j) + \delta^k_j(q_i - p_i) - b_{ij}b^{km}q_m;$$

с другой стороны, условие (17.3)

$$b^{mn}S_{mni} = 0$$

должно выполняться как до, так и после преобразования. Откуда, вследствие тождества

$$b^m_n('\Gamma^n_{mj} - 'G^n_{mj}) = b^m_n(\Gamma^n_{mj} - G^n_{mj}) + b^m_n\sigma^n_{mj} - b^m_j p_m,$$

получаем:

$$b^m_n\sigma^n_{mj} = b^m_j p_m$$

или, подставив вместо σ^n_{mj} его значение, имеем:

$$b^m_j(q_m - p_m) + b^m_j q_m = b^m_j p_m,$$

откуда

$$q_m = p_m,$$

так что

$$\sigma^k_{ij} = -b_{ij}b^{km}p_m.$$

Таким образом, формула преобразования для всех трёх геометрий имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} {}'G_{ij}^{k} &= G_{ij}^{k} + \delta_{(i}^{k} p_{j)}, \\ {}'\Gamma_{ij}^{k} &= \Gamma_{ij}^{k} - b_{ij} b^{km} p_m, \\ {}'z_{ij}^{k} &= z_{ij}^{k} + \frac{1}{2}\,[\delta_{(i}^{k} p_{j)} - b_{ij} b^{km} p_m]. \end{aligned}\right\} \qquad (21.5)$$

В силу полной симметрии в определении сопряжённости, естественно рассмотреть *преобразование, сохраняющее сопряжённость относительно неизменного базиса и состоящее из двух последовательно выполненных проективных преобразований каждой геометрии в отдельности.* Мы будем называть такое преобразование *составным преобразованием пары сопряжённых перенесений.*

Если векторы двух указанных в определении проективных преобразований будут p_i и π_i, то составное преобразование определится формулами, которые вытекут непосредственно из (21.5)

$$\left.\begin{aligned} {}'G_{ij}^{k} &= G_{ij}^{k} + \delta_{(i}^{k} p_{j)} - b_{ij} b^{km} \pi_m, \\ {}'\Gamma_{ij}^{k} &= \Gamma_{ij}^{k} + \delta_{(i}^{k} \pi_{j)} - b_{ij} b^{km} p_m, \\ {}'z_{ij}^{k} &= z_{ij}^{k} + \frac{1}{2}\,[\sigma_{(i}\delta_{j)}^{k} - b_{ij} b^{km} \sigma_m], \end{aligned}\right\} \qquad (22.5)$$

где $\sigma_m = p_m + \pi_m$. Будем обозначать это составное преобразование символически

$$(p_i,\ \pi_i).$$

Закон композиции двух составных преобразований можно записать символически так:

$$(p_i,\ \pi_i)\,(\overset{*}{p}_i,\ \overset{*}{\pi}_i) = (p_i + \overset{*}{p}_i,\ \pi_i + \overset{*}{\pi}_i),$$

откуда следует, что эти преобразования образуют группу.

Проективные преобразования 1-го и 2-го рода, образующие в своей совокупности составное преобразование, изобразятся символически как $(p_i,\ 0)$ и $(0,\ \pi_j)$, причём самоё определение составного преобразования можно записать так:

$$(p_i,\ 0)\,(0,\ \pi_i) = (p_i,\ \pi_i).$$

При составном преобразовании $(p_i,\ \pi_i)$ средняя метрика Вейля подвергается конформному преобразованию, вектор которого

$$q_i = \sigma_i = p_i + \pi_i. \qquad (23.5)$$

Тензор S_{ij}^k преобразуется так:

$$'S_{ij}^k = S_{ij}^k + \delta_{(i}^k \delta_{j)} + b_{ij} b^{km} \delta_m, \tag{24.5}$$

где

$$\delta_m = \pi_m - p_m, \tag{25.5}$$

а тензор S_i

$$'S_i = S_i + 4\delta_i. \tag{26.5}$$

Среди частных видов составных преобразований отметим те, которые характеризуются символом

$$(p_i, p_i), \tag{27.5}$$

называя их *симметричными.*

Для этих преобразований вектор

$$\delta_i = 0, \tag{28.5}$$

откуда следует, что *тензоры S_{jk}^i и S_k сохраняются.*

Обратно, если известно, что некоторое составное преобразование сохраняет тензор S_i, то из (26.5) следует, что $\delta_i = 0$ и значит преобразование симметричное. В частности: *составное преобразование, переводящее чебышевскую пару снова в чебышевскую, симметрично.*

Будем называть преобразование антисимметричным, если его символ таков:

$$(p_i, -p_i). \tag{29.5}$$

Из (23.5) следует, что *для того, чтобы преобразование было антисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы оно сохраняло среднюю метрику.*

Всякое составное преобразование можно разбить на симметричное и антисимметричное так:

$$(p_i, \pi_i) = \left(\frac{p_i + \pi_i}{2}, \frac{p_i + \pi_i}{2}\right)\left(\frac{p_i - \pi_i}{2}, \frac{\pi_i - p_i}{2}\right). \tag{30.5}$$

В заключение, применим формулы, полученные для составного преобразования к величинам, определяющим пару перенесений, базис которой принят за координатную сеть. Тогда из (22.5) получаем:

$$\left.\begin{array}{lll} 'G_{11}^1 = G_{11}^1 + 2p_1; & 'G_{12}^1 = G_{12}^1 + p_2 - \pi_2; & 'G_{11}^2 = G_{11}^2; \\ 'G_{22}^2 = G_{22}^2 + 2p_2; & 'G_{12}^2 = G_{12}^2 + p_1 - \pi_2; & 'G_{22}^1 = G_{22}^1. \end{array}\right\} \tag{31.5}$$

Отсюда следует прежде всего, что *величины β и γ, определённые формулой* (40.3), *сохраняются при любом составном преобразовании.*

Предположим, что заданы две пары сопряжённых перенесений, имеющих один и тот же базис, и пусть геометрия 1-го рода каждой из них определяется величинами G_{ij}^{k} и $\overset{*}{G}{}_{ij}^{k}$, причём известно, что у этих пар

$$\beta = \overset{*}{\beta}; \quad \gamma = \overset{*}{\gamma}. \tag{32.5}$$

Применим к величинам G_{ij}^{k} составное преобразование, которое будем искать из условий

$$\overset{*}{G}{}_{ij}^{k} = {}'G_{ij}^{k}.$$

Формулы (31.5) сейчас же покажут нам, что соответствующие величины p_i и π_i определятся и притом однозначно.

Итак: *равенство* (32.5) *необходимо и достаточно для того, чтобы две данных в одном многообразии пары переходили друг в друга при некотором составном преобразовании.*

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

§ 6. Нормализованная гиперповерхность

Вторая часть настоящей работы будет посвящена теории поверхностей трёхмерного проективного пространства. Однако, результаты, положенные в основу изложения этой теории, без всякого труда распространяются и на гиперповерхности многомерного пространства. Поэтому в первом параграфе этой части рассмотрим гиперповерхность n измерений в проективном пространстве $n+1$ измерения.

Для большей отчётливости в обозначениях примем следующие условия:

1. Однородные координаты *точек* пространства $n+1$ измерений будем обозначать латинскими буквами с греческими индексами вверху.

2. Однородные координаты *гиперплоскостей* пространства будем обозначать греческими буквами с греческими индексами внизу.

3. Таким образом, греческие индексы всегда будем считать пробегающими значение от 1 до $n+2$.

4. Величинам, связанным внутренним образом с гиперповерхностью, будем приписывать латинские индексы, считая, что они пробегают значение от 1 до n.

Все определения и выводы будем строить двойственно, рассматривая гиперповерхность и как место точек, и как огибающую семейства гиперплоскостей.

Итак, пусть некоторая гиперповерхность задана уравнением

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(u^1, u^2, \ldots, u^n); \quad \xi_{\alpha} = \xi_{\alpha}(u^1, u^2, \ldots, u^n), \tag{1.6}$$

где x^α — однородные координаты точки этой гиперповерхности, | где ξ_α однородные координаты касательной гиперплоскости этой гиперповерхности,

а $u^1, u^2, \ldots, u^n$ — криволинейные координаты.

Тогда, в силу инцидентности, будем иметь:

$$x^\alpha \xi_\alpha = 0, \tag{2.6}$$

а также, вводя знак ∂_k — дифференцирования по криволинейным координатам,

$$\partial_k x^\alpha \xi_\alpha = 0 \quad \Big| \quad \partial_k \xi_\alpha x^\alpha = 0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим:

n точек в касательной гиперплоскости

$$y_k^\alpha = \partial_k x^\alpha - l_k x^\alpha,$$

где l_k — некоторый ковариантный тензор многообразия u^i.

Эти n точек определяют некоторую гиперпрямую L_2 *), расположенную в касательной гиперплоскости.

n гиперплоскостей, проходящих через точку гиперповерхности

$$\eta_{\alpha k} = \partial_k \xi_\alpha - \lambda_k \xi_\alpha, \tag{4.6}$$

где λ_k — некоторый ковариантный тензор многообразия u^i.

Эти n плоскостей определяют некоторую прямую L_1, проходящую через точку гиперповерхности.

Вследствие тензорного характера величин l_i и λ_i оба многообразия L_1 и L_2 остаются инвариантными при любых преобразованиях криволинейных координат, так как при этом величины y_k^α и $\eta_{\alpha i}$ комбинируются линейно, иначе говоря, ведут себя так же, как координаты ковариантного тензора и могут быть названы тензорами с «точечными» или «тангенциальными компонентами»**).

Выясним, как следует изменить координаты тензора $l_i(\lambda_i)$ при перенормировании координат $x^\alpha(\xi_\alpha)$, т. е. при умножении всех их на одну и ту же скалярную функцию криволинейних координат. Итак, пусть

$$\xi_\alpha = \sigma' \xi_\alpha \quad \Big| \quad x^\alpha = s' x^\alpha, \tag{5.6}$$

тогда, например,

$$\partial_i x^\alpha = \partial_i' x^\alpha + ' x^\alpha \partial_i s,$$

откуда

$$y_i^\alpha = S\,[\partial_i' x^\alpha - (l_i - \partial_i \lg s)\, x^\alpha] = s\,(\partial_i' x^\alpha - 'l_i x^\alpha) = s' y_i^\alpha,$$

если

$$'l_i = l_i - \partial_i \lg s.$$

*) Для большей терминологической симметрии будем называть *гиперпрямой* линейное многообразие n — 2-го измерения.

**) Ср. Я. С. Дубнов. Труды Семинара по векторному и тензорному анализу, т. I.

Таким образом, для того чтобы при перенормировании (5.6) многообразие L_1 (L_2), определённое вектором λ_i (l_i), оставалось инвариантным, необходимо и достаточно, чтобы его координаты заменялись по формулам

$$'\lambda_i = \lambda_i - \partial_i \lg \sigma \quad | \quad 'l_i = l_i - \partial_i \lg s \tag{6.6}$$

и тогда:

координаты гиперплоскостей $\eta_{\alpha i}$ будут изменяться так же, как и координаты касательных гиперплоскостей

$$\eta_{\alpha k} = \sigma' \eta_{\alpha k},$$

координаты точек y_i^α будут изменяться так же, как и координаты точек гиперповерхности

$$y_k^\alpha = s' y_k^\alpha. \tag{7.6}$$

Будем называть *нормализатором 1-го (2-го) рода* ковариантный вектор гиперповерхности, координаты которого изменяются по формулам (6.6) при перенормировании (5.6) касательной гиперплоскости (точки гиперповерхности). Выше мы получили:

Всякому нормализатору 1-го рода однозначно соответствует прямая, проходящая через точку гиперповерхности и связанная с ней инвариантно.

Всякому нормализатору 2-го рода однозначно соответствует гиперпрямая, расположенная в касательной гиперплоскости и связанная с ней инвариантно.

Будем называть гиперповерхность нормализованной, если

в каждой её точке задана прямая, проходящая через эту точку, но не лежащая в касательной гиперплоскости. Будем называть эту прямую нормалью 1-го рода.

в каждой её касательной гиперплоскости задана гиперпрямая, не проходящая через точку прикосновения. Будем называть эту гиперпрямую нормалью 2-го рода.

С каждой точкой нормализованной гиперповерхности свяжем два проектированных репера (или $n+2$-эдра)

Вершины первого из них поместим в точках

$$x^\alpha, y_i^\alpha, X^\alpha,$$

где X^α — некоторая точка на нормали 1-го рода, не совпадающая с точкой гиперповерхности.

Так как через нормаль 1-го рода проходят все гиперплоскости $\eta_{\alpha i}$, то для её точки X^α будем име ь:

$$X^\alpha \eta_{\alpha i} = 0.$$

Гиперграни второго репера совместим с гиперплоскостями

$$\xi_\alpha, \eta_{\alpha i}, \Xi_\alpha,$$

где Ξ_α — некоторая гиперплоскость, проходящая через нормаль 2-го рода и не касающаяся гиперповерхности.

Так как все точки y_i^α лежат на нормали 2-го рода, то для гиперплоскости Ξ будем иметь:

$$\Xi_\alpha y_i^\alpha = 0. \tag{8.6}$$

Пронормируем, кроме того, координаты X^α так, чтобы

$$X^\alpha \xi_\alpha = 1.$$

Будем называть точку X^α вершиной нормали 1-го рода.

Пронормируем координаты Ξ так, чтобы

$$\Xi_\alpha x^\alpha = 1. \tag{9.6}$$

Будем называть плоскость Ξ_α основанием нормали 2-го рода.

Представив частные производные точек y_i^α и гиперплоскостей $\eta_{\alpha i}$ в виде линейных комбинаций координат элементов соответствующих реперов, мы получим две системы уравнений, которые будем называть *основными*:

$$\partial_j y_i^\alpha = a_{ij}^k y_k^\alpha + p_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha \quad \Big| \quad \partial_j \eta_{\alpha i} = \alpha_{ij}^k \eta_{\alpha k} + \pi_{ij} \xi_\alpha + \beta_{ij} \Xi_\alpha.$$

Приведём вычисление коэффициентов только для левого из этих уравнений и по принципу двойственности распространим полученные результаты и на правое уравнение.

Свёртывая с ξ_α и учитывая (2.6) и (3.6), получаем:

$$b_{ij} = \xi_\alpha \partial_j y_i^\alpha \quad \Big| \quad \beta_{ij} = x^\alpha \partial_j \eta_{\alpha i},$$

но дифференцирование условия $\xi_\alpha y_i^\alpha = 0$ даёт нам сейчас же

$$b_{ij} = -\partial_j \xi_\alpha y_i^\alpha = -(\partial_j \xi_\alpha - \lambda_j \xi_\alpha) y_i^\alpha,$$

откуда

$$b_{ij} = -\eta_{\alpha i} y_i^\alpha = \beta_{ij}. \tag{10.6}$$

Из (10.6) следует, что *величины* b_{ij} *и* β_{ij} *суть тензоры*.

Введя обозначение

$$X^\alpha \Xi_\alpha = \Omega \tag{11.6}$$

и свернув левое уравнение с Ξ_α, получаем:

$$p_{ij} = \Xi_\alpha \partial_j y_i^\alpha - \Omega b_{ij},$$

откуда после дифференцирования (8.6) и соответствующей замены

$$p_{ij} = -(\partial_j \Xi_\alpha y_i^\alpha + \Omega b_{ij}) \quad \Big| \quad \pi_{ij} = -(\partial_j X^\alpha \eta_{\alpha i} + \Omega b_{ji}). \tag{12.6}$$

Таким образом *величины* p_{ij} *и* π_{ij} *тоже тензоры*. Не занимаясь вычислением величин a_{ij}^k и α_{ij}^k, выясним, однако, характер их преобразования при переходе к новой координатной системе.

Переписав основные уравнения так:

$$\partial_j y_i^\alpha - a_{ij}^k y_k^\alpha = p_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha$$

и приняв во внимание тензорный характер правой части, тензорный характер величины y_i^α и строение левой части, приходим к заключению, что *величины* a_{ij}^k и α_{ij}^k *преобразуются как коэффициенты аффинной связности*.

Для того чтобы выяснить симметрию введённых величин, развернём выражение $\partial_j y_i^\alpha$, пользуясь при этом формулой (4.6)

$$\partial_j y_i^\alpha = \partial_{ij}^2 x^\alpha - l_i \partial_j x^\alpha - \partial_j l_i x^\alpha = \partial_{ij}^2 x^\alpha - l_i y_j^\alpha - (\partial_j l_i - l_i l_j)\, x^\alpha,$$

откуда

$$a_{[ij]}^k y_k^\alpha + p_{[ij]} x^\alpha + b_{[ij]} X^\alpha = l_{[i} y_{j]}^\alpha + \partial_{[i} l_{j]} x^\alpha.$$

Так как вершины тетраэдра независимы, то коэффициенты при координатах соответствующих вершин равны. Отсюда

$$b^{[ij]} = \beta_{[ij]} = 0. \qquad (13.6)$$

$$b_{ij} = \beta_{ij} \qquad (14.6)$$

$$p_{[ij]} = \partial_{[i} l_{j]} \quad\Big|\quad \pi_{[ij]} = \partial_{[i} \lambda_{j]} \qquad (15.6)$$

$$a_{[ij]}^k = l_{[j} \delta_{i]}^k \quad\Big|\quad \alpha_{[ij]}^k = \lambda_{[j} \delta_{i]}^k.$$

Обозначив симметричную часть величин a_{ij}^k и α_{ij}^k

$$G_{ij}^k = a_{ij}^k - l_j \delta_i^k \quad\Big|\quad \Gamma_{ij}^k = \alpha_{ij}^k - \lambda_j \delta_i^k, \qquad (16.6)$$

так что

$$G_{[ij]}^k = 0 \quad\Big|\quad \Gamma_{[ij]}^k = 0, \qquad (17.6)$$

и переписав основные уравнения в новом виде

$$\begin{array}{l|l} \partial_j y_i^\alpha = l_j y_i^\alpha + G_{ij}^k y_k^\alpha + & \partial_j \eta_{\alpha i} = \lambda_j \eta_{\alpha i} + \Gamma_{ij}^k \eta_{\alpha k} + \\ \qquad + p_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha & \qquad + \pi_{ij} \xi_\alpha + b_{ij} \Xi_\alpha, \end{array} \qquad (18.6)$$

исследуем поведение величин G_{ij}^k и Γ_{ij}^k при различных преобразованиях системы (18.6).

Прежде всего, очевидно, что G_{ij}^k и Γ_{ij}^k *инвариантны*, как и все остальные коэффициенты системы (18.6) *при проективном преобразовании пространства.*

При преобразовании криволинейных координат величины G_{ij}^k *и* Γ_{ij}^k, отличающиеся от величин a_{ij}^k и α_{ij}^k только тензорными слагаемыми, *будут преобразовываться как коэффициенты аффинной связности.*

Произведём теперь перенормирование координат x^α и ξ_α по формулам (5.6). Тогда для первого из основных уравнений вследствие (7) имеем:

$$\partial'_{j\alpha} y_i^\alpha + s \partial'_j y_i^\alpha = \rho l'_i y_i^\alpha + s G_{ij}^{k'} y_k^\alpha + s p'_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha,$$

но l_j — нормализатор и, следовательно,

$$'l_j = l_j + \partial_j \lg s,$$

откуда

$$\partial'_j y^\alpha_i = {}'l_j y^\alpha_i + G^{k'}_{ij} y^\alpha_k + p'_{ij} x^\alpha + s^{-1} b_{ij} X^\alpha.$$

Итак, *величины G^k_{ij} и Γ^k_{ij} инвариантны при перенормировании координат точек гиперповерхности и её касательных гиперплоскостей.*

Примем, наконец, во внимание, что выбор вершины нормали 1-го рода и основание нормали 2-го рода не предопределяется выбором нормализации. Поэтому мы можем, не меняя нормализации, произвести замену величин X^α и Ξ_α

$$'X^\alpha = X^\alpha - ux^\alpha \quad \Big| \quad '\Xi_\alpha = \Xi_\alpha - v\xi_\alpha, \tag{19.6}$$

однако после подстановки новых величин в основные уравнения, все коэффициенты останутся неизменными кроме p_{ij} и π_{ij}, которые преобразуются так:

$$'p_{ij} = p_{ij} + ub_{ij} \quad \Big| \quad '\pi_{ij} = \pi_{ij} + vb_{ij}. \tag{20.6}$$

Сейчас для нас существенно только то, что *величины G^k_{ij} и Γ^k_{ij} не зависят от выбора вершины и основания и, следовательно, вполне определяются нормализацией.* Приняв во внимание все последние результаты, мы приходим к следующей теореме:

коэффициенты G^k_{ij} и Γ^k_{ij} уравнений (18.6) *определяют в многообразии $u^1, u^2, \ldots, u^n$ две геометрии аффинной связности, без кручения, строение которых инвариантно определяется заданием нормализованной гиперповерхности.*

Эти геометрии мы будем называть *внутренними геометриями нормализованной гиперповерхности* и, различая их между собою, говорить о геометрии 1-го и 2-го рода.

Вводя символы соответствующих им ковариантных дифференцирований 1-го и 2-го рода, перепишем основные уравнения в виде

$$\nabla_j y^\alpha_i = l_j y^\alpha_i + p_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha \quad \Big| \quad \nabla_j \eta_{\alpha(i)} = \lambda_j \eta_{\alpha i} + \pi_{ij} \xi_\alpha + b_{ij} \Xi_\alpha. \tag{21.6}$$

При этом будем иметь в виду, что это дифференцирование распространяется только на латинские индексы.

Обратимся теперь к основному предмету нашего изучения — поверхности трёхмерного проективного пространства. Определение нормализованной поверхности останется таким же, как и в общем случае, только обе нормали и 1-го и 2-го рода будут просто прямыми.

Совокупности этих прямых образуют две конгруенции, которые мы будем называть *нормализующими конгруенциями 1-го и 2-го рода* соответственно. Между лучами этих конгруенций, точками поверхностей и касательными плоскостями осуществлено соответствие так, что нормаль 1-го рода проходит через соответствующую точку поверхности, но не лежит в соответствующей касательной плоскости, а нормаль 2-го рода лежит в соответствующей касательной плоскости, но не проходит через соответствующую точку поверхности. Всей этой совокупности соответствующих между собою элементов отвечает многообразие двух измерений, элемент которого определяется парой значений криволинейных координат. Чтобы не нарушать принципа двойственности, мы будем часто говорить о положении в точке этого аналитического многообразия, ибо, говоря то же самое о точке поверхности, мы поставили бы её в особое положение по отношению к касательной плоскости.

Для поверхности мы можем гораздо глубже вскрыть природу уже полученного понятия внутренних геометрий. Для этого начнём с некоторых предварительных замечаний.

Рассмотрим некоторый контравариантный вектор v^i аналитического многообразия u^1, u^2 данной нормализации. Всякому такому вектору однозначно соответствует

точка $v^\alpha = y^\alpha_k v^k$,	плоскость $v_\alpha = \eta_{\alpha k} v^k$, (22.6)
лежащая на нормали 2-го рода (коротко — *нормальная точка*).	проходящая через нормаль 1-го рода (коротко — *нормальная плоскость*).

Установленное соответствие не взаимно однозначно, так как двум коллинеарным векторам соответствуют одинаковые нормальные точки (плоскости). Говоря о совокупности всех векторов, коллинеарных данному, как о *направлении аналитического многообразия*, можем утверждать, что *для данной точки аналитического многообразия формулы* (22.6) *устанавливают взаимно однозначное соответствие между направлениями аналитического многообразия, с одной стороны, и нормальными точками и нормальными плоскостями, с другой стороны.*

Если нормальная точка v^α и нормальная плоскость w_α инцидентны, то

$$v^\alpha w_\alpha = y^\alpha_k \eta_{\alpha l} v^k w^l = 0$$

или

$$b_{kl} v^k w^l = 0, \tag{23.6}$$

но тензор b_{ij} можно представить в следующем виде:

$$b_{kl} = -y^\alpha_k \eta_{\alpha l} = -(\partial_k x^\alpha - l_k x^\alpha)(\partial_l \xi_\alpha - \lambda_l \xi_\alpha) = -\partial_k x^\alpha \partial_l \xi_\alpha,$$

откуда

$$b_{kl} du^k \delta u^l = -dx^\alpha \delta \xi_\alpha. \tag{24.6}$$

Отсюда следует, что: *нулевые линии тензора b_{ij} совпадают с асимптотическими линиями поверхности*. Вследствие этого условие (23.6) есть условие сопряжённости.

Итак: *для того, чтобы нормальная точка и нормальная плоскость были инцидентны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им направления аналитического многообразия были сопряжены.* В частности: *нормальная точка и нормальная плоскость, соответствующие одному и тому же направлению, будут инцидентны тогда и только тогда, если это направление асимптотическое.*

Если нормальная точка и нормальная плоскость соответствуют одному и тому же направлению аналитического многообразия du^i, то эта точка лежит на прямой, соединяющей точки поверхности, определяемые криволинейными координатами u^i и $u^i + du^i$, а нормальная плоскость проходит через прямую пересечения касательных плоскостей в этих же точках. Таким образом: *если нормальная точка и нормальная плоскость соответствуют одному и тому же направлению аналитического многообразия, то прямая, соединяющая эту точку с точкой поверхности, и прямая пересечения данной плоскости с касательной плоскостью сопряжены по направлению. Обратное положение тоже справедливо.*

Переходя к интерпретации параллельных перенесений, определяемых внутренними геометриями, выясним интерпретацию для геометрии 1-го рода и переложим её согласно принципу двойственности для геометрии 2-го рода. Пусть направление аналитического многообразия v^i переносится параллельно, так что

$$\nabla v^i = \mu v^i.$$

Для нормальной точки, соответствующей этому направлению, будем иметь, согласно (21.6),

$$dv^\alpha = \nabla v^k y^\alpha_k = v^k \nabla_l y^\alpha_k du^l = \mu v^k y^\alpha_k + (l_k y^\alpha_m + p_{km} x^\alpha + b_{km} X^\alpha)\, v^m du^k$$

или

$$dv^\alpha = \lambda v^\alpha + \mu x^\alpha + \nu X^\alpha.$$

Обратно, если dv^α представляется в виде такой линейной комбинации, то условие параллельного перенесения направления v^k выполняется.

Так как точки v^α, x^α и X^α определяют нормальную плоскость, инцидентную точке v^α, то:

для того чтобы направление переносилось параллельно в бесконечно близкую точку в геометрии 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему нормальная точка смещалась в инцидентной ей нормальной плоскости.	для того чтобы направление переносилось параллельно в бесконечно близкую точку в геометрии 2-го рода, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему нормальная плоскость вращалась вокруг инцидентной ей нормальной точки.

Сравнивая оба полученные нами результата, мы замечаем, что можем объединить их в одном требовании сохранения инцидентности нормальной точки и нормальной плоскости при параллельном перенесении соответствующего рода отвечающих им направлений. Но в силу инцидентности нормальной точки и плоскости отвечающие им направления сопряжены. Приняв всё это во внимание, приходим к следующему важному выводу: *если некоторое направление переносится параллельно во внутренней геометрии одного рода, то сопряжённое ему направление тоже переносится параллельно в геометрии другого рода.*

Иными словами: *внутренние геометрии нормализованной поверхности образуют сопряжённую пару, базис которой совпадает с сетью асимптотических линий этой поверхности.*

§ 7. Последовательности направлений, поля и сети на нормализованной поверхности

Всякой кривой $u^i = u^i(t)$ аналитического многообразия соответствует:

линия g как место точек поверхности.	развёртывающая поверхность γ как огибающая семейства плоскостей, касающихся поверхности.

Если вдоль кривой $u^i = u^i(t)$ аналитического многообразия задана последовательность направлений $l^i = l^i(t)$, то ей соответствует

линейчатая поверхность R_l, образующая которой соединяет точку M кривой с нормальной точкой, отвечающей направлению l^i.	линейчатая поверхность R_λ, образующая которой лежит на пересечении плоскости μ с нормальной плоскостью, отвечающей направлению l^i.

Направления соответствующих образующих R_l и R_λ будут сопряжены.

Будем называть *ассоциированной точкой последовательности направлений* $l^i = l^i(t)$ точку, в которой нормальная плоскость, проходящая через образующую R_l, коснётся этой поверхности.	Будем называть *ассоциированной плоскостью последовательности направлений* $l^i = l^i(t)$ плоскость, касающуюся поверхности R_λ в нормальной точке, лежащей на её образующей.

Будем называть последовательность направлений $l^i = l^i(t)$ *сопряжённой*, если направление последовательности сопряжено направлению касательной кривой g, вдоль которой задана последовательность.

R_l сопряжённой последовательности есть развёртывающаяся поверхность, описанная вдоль кривой g.

R_λ сопряжённой последовательности есть развёртывающаяся поверхность, ребро возврата которой совпадает с линией g.

Называя *характеристической точкой кривой* g точку ребра возврата описанной вдоль g развёртывающейся поверхности, отметим, что

ассоциированную точку сопряжённой последовательности следует считать совпадающей с характеристической точкой кривой.

ассоциированную плоскость сопряжённой последовательности следует считать совпадающей с соприкасающейся плоскостью кривой.

Будем называть последовательность *тангенциальной*, если её направление совпадает с направлением кривой, вдоль которой она задана.

R_l тангенциальной последовательности есть развёртывающаяся поверхность, ребро возврата которой совпадает с линией g.

R_λ тангенциальной последовательности есть развёртывающаяся поверхность, описанная вдоль кривой g.

Ассоциированная точка тангенциальной последовательности или совпадает с точкой кривой g, или неопределённа, что имеет место тогда и только тогда, если соприкасающаяся плоскость g нормальна.

Ассоциированная плоскость тангенциальной последовательности или совпадает с касательной плоскостью поверхности в точке кривой g, или неопределённа, что имеет место тогда и только тогда, если характеристическая точка кривой g нормальна.

Рассмотрим последовательность направлений, параллельных по отношению к геометрии 1-го рода и заданных вдоль кривой g. В то время как точка этой кривой движется по ней, нормальная точка направления последовательности M' пробегает кривую g', расположенную на R_l, и по свойству параллельного перенесения каждое её бесконечно малое смещение совершается в инцидентной ей нормальной плоскости. Эта плоскость, проходя через образующую R_l и касаясь кривой g', должна касаться R_l в точке M'. Распространив полученный результат на случай перенесения 2-го рода, получаем, в силу двойственности:

ассоциированная точка последовательности направлений, параллельных в геометрии 1-го рода, лежит на нормали 2-го рода.

ассоциированная плоскость последовательности направлений, параллельных в геометрии 2-го рода, проходит через нормаль 1-го рода.

Геодезическая линия есть тангенциальная последовательность параллельных направлений.

Поэтому:

для того чтобы линия была геодезической 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы её соприкасающаяся плоскость проходила через нормаль 1-го рода.

для того чтобы линия была геодезической 2-го рода, необходимо и достаточно, чтобы её характеристическая точка лежала на нормали 2-го рода.

Будем говорить о *поле направлений*, если в каждой точке некоторой области поверхности задано направление. На всякой линии, g поле направлений определяет последовательность направлений L_g, про которую мы будем говорить, что она принадлежит полю.

Линии, вдоль которых поле определяет сопряжённую последовательность, назовем *сопряжёнными траекториями поля*, а линии, вдоль которых определится тангенциальная последовательность, будем называть просто *линиями поля*. Семейство линий поля и семейство его сопряжённых траекторий образуют, вообще говоря, сопряжённую сеть. Для поля асимптотических направлений и только для него линии поля совпадают с его сопряжёнными траекториями. Совокупность прямых, соединяющих точки поля с нормальными точками его направлений, будем называть *конгруенцией поля*, а вторую фокальную поверхность этой конгруенции просто *фокальной поверхностью поля*.

Каждая из линий поля служит ребром возврата для одной из развёртывающихся поверхностей конгруенции поля, которые образуют семейство. Другое семейство состоит из развёртывающихся поверхностей, имеющих ребро возврата на фокальной поверхности, и каждая поверхность этого семейства есть R_1 для сопряжённой последовательности поля. Иными словами, *ассоциированная точка сопряжённой последовательности поля лежит на его фокальной поверхности*.

Называя *геодезическим 1-го рода* поле, линии которого есть геодезические линии 1-го рода, нормализованной поверхности, рассмотрим произвольную последовательность L_g, ему принадлежащую. Пусть F — фокус луча конгруенции поля направления L_g, проведённого в точке M кривой g. При бесконечно малом перемещении точки M точка F тоже перемещается в фокальной плоскости конгруенции поля. Но эта плоскость будет соприкасающейся плоскостью линии поля, которой касается луч конгруенции, и так как эта линия есть геодезическая, то *фокальная плоскость конгруенции поля будет нормальной*. Так как точка F смещается в нормальной плоскости и вместе с тем, очевидно, принадлежит поверхности R_1, то она совпадает с ассоциированной точкой последовательности L_g.

Итак: *ассоциированная точка любой последовательности направлений геодезического поля 1-го рода совпадает с фокусом конгруенции поля*.

Рассмотрим, наконец, поле направлений абсолютно параллельных по отношению к геометрии 1-го рода и выясним, в каком случае такое поле может существовать. С одной стороны, поле это будет геодезическим, а, с другой стороны, ассоциированные точки всякой его последовательности будут нормальными. Сопоставляя оба этих положения, приходим к следующему выводу: *геометрия 1-го рода нормализованной поверхности допускает существование поля абсолютно параллельных направлений, если существует конгруенция, касающаяся поверхности так, что нормаль 1-го рода лежит в её фокальной плоскости, а нормаль 2-го рода проходит через её фокус*.

Поле направлений абсолютно параллельных в геометрии 2-го рода не заслуживает особого рассмотрения. В силу сопряжённости перенесений оно совпадает просто с полем направлений сопряжённых абсолютно параллельным в геометрии 1-го рода.

Задание сети равносильно заданию двух полей независимых направлений. На каждой линии сети определяется последовательность направлений линии другого семейства. Через каждую точку поверхности, на которой задана сеть, проходят таким образом две последовательности направлений сети.

Будем называть *ассоциированной прямой 1-го рода сети, заданной на нормализованной поверхности*, прямую, соединяющую ассоциированные точки обеих последовательностей направлений сети, проходящих через данную точку поверхности *).

Ассоциированная прямая 1-го рода лежит в касательной плоскости и не проходит через точку поверхности.

Будем называть *ассоциированной прямой 2-го рода сети, заданной на нормализованной поверхности*, прямую пересечения ассоциированных плоскостей обеих последовательностей сети, проходящих через данную точку поверхности.

Ассоциированная прямая 2-го рода проходит через точку поверхности, но не лежит в касательной плоскости.

Так как каждая линия сопряжённой сети служит сопряжённой траекторией по отношению к полю направления другого семейства,

*) Конгруенция ассоциированных прямых 1-го рода, вполне определяемая заданием сети и конгруенций нормалей 1-го рода. Таким образом всякая сеть определяет преобразование последней в конгруенции ассоциированных прямых. Преобразование такого характера рассматривалось и получило название Relation R; см., например, книгу Lane, Projektive Differential Geometry of curves and surfaces, Chicago, 1932, § 19 (в дальнейшем эта книга цитируется просто как Lane).

то ассоциированные точки последовательностей сети совпадают с фокусами конгруенций, касательных к линиям сети. Обратив этот результат двойственно, будем иметь:

Называя *ребром Грина* сети прямую, соединяющую фокусы конгруенций касательных к линиям сети, имеем: ассоциированная прямая 1-го рода сопряжённой сети совпадает с её ребром Грина.	Называя *осью Грина* сети прямую пересечения соприкасающихся плоскостей к линиям сети *), имеем: ассоциированная прямая 2-го рода сопряжённой сети совпадает с её осью Грина.

Переходя к рассмотрению *асимптотической* сети, напомним понятие соприкасающейся поверхности 2-го порядка, в частности, поверхности Ли **).

Рассмотрим одну из асимптотических линий g_1. Возьмём вдоль неё последовательность L_{g_1} асимптотических направлений другого семейства. Взяв соответствующую этой последовательности R_l, приведём поверхность 2-го порядка через три бесконечно близкие её прямолинейные образующие. Предельное положение этой поверхности будет поверхностью Ли. Известно, что если сделать такое же построение для другой асимптотической линии, то поверхности Ли, полученные в обоих случаях, будут совпадать между собою.

Коротко говоря: *поверхность Ли есть поверхность 2-го порядка, содержащая по три прямолинейных образующих, касающихся трёх бесконечно близких асимптотических линий одного и другого семейства на данной поверхности.*

Для нас существенно только то, что поверхность Ли содержит в системе своих образующих обе асимптотические касательные данной точки и по две асимптотических касательных, бесконечно близких к ним, так как отсюда вытекает способ построения ассоциированных прямых асимптотической сети.

Действительно, для определения ассоциированных точек нам придётся взять нормальную плоскость асимптотического направления и найти точку, в которой она касается R_l. Но по определению поверхности Ли она касается R_l вдоль всей прямолинейной образующей и, следовательно, касаясь R_l, плоскость в той же точке будет касаться и поверхности Ли.

Отсюда следует, что нормаль 1-го рода будет прямой пересечения двух плоскостей, касающихся поверхности Ли в точках её

---

*) Легко видеть, что определение ребра и оси Грина двойственны для сопряжённых сетей, но и только для них.

**) Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. II, § 81, Berlin, 1923 г.

пересечения с искомой ассоциированной прямой. Отсюда вытекают два взаимно двойственных результата:

Ассоциированная прямая 1-го рода асимптотической сети есть поляра нормали 1-го рода относительно поверхности Ли.

Ассоциированная прямая 2-го рода асимптотической сети есть поляра нормали 2-го рода относительно поверхности Ли.

Геодезическая сеть 1-го рода есть сеть линий двух геодезических полей, которые, как это было показано, имеют ассоциированные точки всех своих последовательностей в фокусах конгруенций, касающихся линий поля. Отсюда следует, что ассоциированная прямая 1-го рода геодезической сети 1-го рода совпадает с её ребром Грина.

Тут же будет уместным добавить, что для того чтобы сеть была геодезической 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы её ось Грина совпадала с нормалью 1-го рода.

Если сеть *чебышевская* по отношению к геометрии 1-го рода, то всякая последовательность сети параллельная, и, следовательно, её ассоциированные точки лежат на нормали 2-го рода. Итак, *для того чтобы сеть была чебышевской 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы её ассоциированная прямая совпадала с нормалью 2-го рода.*

§ 8. Конгруенции, связанные с нормализованной поверхностью

Рассмотрим прямую, расположенную в касательной плоскости нормализованной поверхности и соединяющую 2 точки:

$$z_i^\alpha = y_i^\alpha + h_i x^\alpha.$$

Рассмотрим прямую, проходящую через точку на нормализованной поверхности и расположенную на пересечении 2-х плоскостей:

$$\zeta_{\alpha i} = \eta_{\alpha i} + \chi_i \xi_\alpha. \qquad (1.8)$$

Если h_i и χ_i будут ковариантными векторами, то прямые (1.8) инвариантны при преобразовании криволинейных координат и при перенормировании точки χ^α и плоскости ξ_α. Итак:

формулы (1.8) относят всякому полю ковариантных векторов аналитического многообразия конгруенцию прямых, расположенных в касательной плоскости нормализованной поверхности и не проходящих через её точку. В частности, если $h_i = 0$, то луч этой конгруенции совпадает с нормалью 2-го рода.

формулы (1.8) относят всякому полю ковариантных векторов аналитического многообразия конгруенцию прямых, проходящих через точку нормализованной поверхности, но не лежащих в её касательной плоскости. В частности, если $\chi_i = 0$, то луч этой конгруенции совпадает с нормалью 1-го рода.

Зафиксировав точку поверхности и давая величинам h_i всевозможные значения, мы будем получать всевозможные прямые касательной плоскости. Найдём условие, которое надо наложить на h_i, чтобы h_i определяло пучок прямых с центром в точке

$$v^k y_k^\alpha + \lambda x^\alpha.$$

В таком случае

$$w^k (y_k^\alpha + h_k x^\alpha) = v^k y_k^\alpha + \lambda x^\alpha$$

и в результате сравнения коэффициентов $w^k = v^k$

$$v^k h_k = c, \tag{2.8}$$

где v^k и c — постоянные числа, определённые до множителя, а v^k соответствует нормальной точке на прямой, соединяющей центр пучка с точкой поверхности.

Для большей наглядности полезно отобразить все прямые касательной плоскости на точки аффинной плоскости P, так, чтобы прямой h_i соответствовала точка с теми же декартовыми координатами. Соответствие это будет коррелятивным, так как всякому пучку прямых будет соответствовать прямолинейный ряд, определяемый уравнением (2.8). Два пучка $v^k h_k = c_1$ и $v^k h_k = c_2$ с центрами, коллинеарными с точкой поверхности, отобразятся на две параллельные прямые плоскости P, откуда следует, что сама точка поверхности отобразится на несобственную прямую плоскости P. Наконец, нормали 2-го рода, для которой $h_i = 0$, будет соответствовать начало координат.

Подобным же образом проведя отображение связки прямых, проходящих через точку поверхности на точки аффинной плоскости П, заметим, что нормаль 1-го рода перейдёт в точку, совпадающую с началом координат, касательная плоскость — в несобственную прямую, а прямолинейный пучок, плоскость которого пересекается с касательной плоскостью и нормальной плоскостью по одной прямой, перейдёт в прямую

$$w^k \chi_k = \gamma. \tag{3.8}$$

Предположим теперь, что мы хотим сделать замену нормализации, приняв за новую нормаль 2-го рода прямую

$$'y_i^\alpha = y_i^\alpha + h_i x^\alpha \tag{4.8}$$

и оставив нормаль 1-го рода неизменной.

Новый нормализатор $'l_i$ определится из соотношения

$$'y_i^\alpha = \partial_i x^\alpha - l_i x^\alpha + h_i x^\alpha = \partial_i x^\alpha - (l_i - h_i)\, x^\alpha,$$

откуда

$$'l_i = l_i - h_i. \tag{5.8}$$

Внутренние геометрии нормализованной поверхности должны при этом преобразоваться, причём, очевидно, что преобразование геометрии 1-го рода будет *проективным*, так как вследствие неизменности нормали 1-го рода её геодезические сохраняются. Отсюда:

$$'G_{ij}^k = G_{ij}^k + \delta_{(i}^k p_{j)},$$

так что

$$'\nabla_j{}' y_i^\alpha = \nabla_j{}' y_i^\alpha - \delta_{(i}^k p_{j)}{}' y_k^\alpha,$$

но

$$\nabla_j y_i^\alpha = l_j y_i^\alpha + p_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha; \quad '\nabla_j{}' y_i^\alpha = {}' l_j{}' y_i^\alpha + {}' p_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha,$$

причём последнее слагаемое можно считать одинаковым в обоих случаях.

С другой стороны, из (4.8) следует, что

$$\nabla_j{}' y_i^\alpha = \nabla_j y_i^\alpha + h_i (y_j^\alpha + l_j x^\alpha) + \nabla_j h_i x^\alpha,$$

откуда

$$l_j y_i^\alpha + p_{ij} x^\alpha + h_i (y_j^\alpha + l_j x^\alpha) + \nabla_j h_i x^\alpha - \delta_i^k p_j (y_k^\alpha + h_k x^\alpha) =$$
$$= (l_j - h_j)(y_i^\alpha + h_i x^\alpha) + {}' p_{ij} x^\alpha$$

или, сравнив коэффициенты при y_i^α, получим:

$$p_i = h_i$$

и вследствие этого

$$'p_{ij} = p_{ij} + \nabla_j h_i - h_i h_j. \tag{6.8}$$

Итак:

при замене нормали 2-го рода и сохранении нормали 1-го рода внутренняя геометрия 1-го рода преобразуется проективно, причём вектор этого проективного преобразования равен вектору, определявшему положение новой нормали 2-го рода в старой нормализации.

при замене нормали 1-го рода и сохранении нормали 2-го рода внутренняя геометрия 2-го рода преобразуется проективно, причём вектор этого проективного преобразования равен вектору, определявшему положение новой нормали 1-го рода в старой нормализации.

Замену обеих нормалей мы можем провести в два приёма, заменяя сначала только одну, а потом только другую нормаль. Так как при этом условие сопряжённости внутренних геометрий по отношению к асимптотической сети сохранится, то пара внутренних геометрий испытывает составное преобразование. Приняв во внимание уже полученные результаты, заключаем: *если происходит одновременная замена обеих нормалей, причём новая нормаль 1-го рода определяется тензором h_i, а новая нормаль 2-го рода — тен-*

зором χ_i, *то пара внутренних геометрий испытывает составное преобразование*

$$(h_i, \chi_i). \tag{7.8}$$

Рассмотрим теперь некоторую сеть на поверхности и предположим, что её чебышевский тензор 1-го рода — t_i, а тензор h_i определяет её ассоциированную прямую. Приняв во внимание, что ассоциированная прямая определяется независимо от положения нормали 2-го рода, примем первую из них за новую нормаль 2-го рода, в таком случае в новой геометрии согласно (11.5)

$$'t_i = t_i - h_i.$$

Но если ассоциированная прямая сети совпадает с нормалью 2-го рода, то сеть чебышевская, откуда

$$h_i = t_i, \tag{8.8}$$

так что

чебышевский тензор 1-*го рода сети определяет положение её ассоциированной прямой* 1-*го рода.*	*чебышевский тензор* 2-*го рода сети определяет положение её ассоциированной прямой* 2-*го рода.*

Введём понятие о *средней прямой* двух данных прямых.

Будем называть *средней* прямой двух данных прямых, расположенных в касательной плоскости, но не проходящих через точку поверхности, третью прямую определяемого ими пучка, которая гармонически разделяет их вместе с прямой, соединяющей центр пучка с точкой поверхности.	Будем называть *средней* прямой двух данных прямых, проходящих через точку поверхности, но не лежащих в касательной плоскости, третью прямую определяемого ими пучка, которая гармонически разделяет их вместе с прямой пересечения плоскости пучка и касательной плоскости.

Пусть две данные прямые лежат (например) в касательной плоскости и определяются тензорами $\underset{1}{h_i}$ и $\underset{2}{h_i}$. Отобразив их на две точки $\underset{1}{H}$ и $\underset{2}{H}$ аффинной плоскости, заметим, что прямая MC, которая соединяет центр пучка с точкой поверхности, отобразится в несобственную точку прямой $\underset{1}{H}\underset{2}{H}$. Поэтому средняя прямая будет иметь своё отображение в середине отрезка $\underset{1}{H}\underset{2}{H}$. Отсюда следует, что средняя прямая двух прямых $\underset{1}{h_i}$ и $\underset{2}{h_i}$, расположенных в касательной плоскости, будет определяться тензором

$$h_i = \frac{\underset{1}{h_i} + \underset{2}{h_i}}{2}$$

средняя прямая двух прямых $\underset{1}{\chi_i}$ и $\underset{2}{\chi_i}$, проходящих через точку поверхности, будет определяться тензором

$$\chi_i = \frac{\underset{1}{\chi_i} + \underset{2}{\chi_i}}{2} \qquad (9.8)$$

§ 9. Развёртывающиеся поверхности нормализующих конгруенций

По аналогии с классической теорией поверхностей, будем называть *линией кривизны* 1-*го* (2-*го*) *рода такую линию поверхности, при движении вдоль которой соответствующая нормаль* 1-*го* (2-*го*) *рода описывает развёртывающуюся поверхность*. В силу основных результатов теории конгруенций для линии кривизны каждого рода возможны три случая.

1) Существует одна и только одна сеть линий кривизны.
2) Существует одна и только одна система линий кривизны.
3) Всякая линия поверхности есть линия кривизны.

Последний случай неопределённости наступает для

линий кривизны 1-го рода неразвёртывающейся поверхности тогда и только тогда, если все нормали 1-го рода проходят через одну точку.

линий кривизны 2-го рода неразвёртывающейся поверхности тогда и только тогда, если все нормали 2-го рода лежат в одной плоскости.

Мы будем говорить, что

нормализующая конгруенция 1-го рода *сопряжена* поверхности, если на поверхности существует сопряжённая сеть линий кривизны 1-го рода.

нормализующая конгруенция 2-го рода *гармонична* поверхности, если на поверхности существует сопряжённая сеть линий кривизны 2-го рода.

В силу этого определения следует считать, что в случае неопределённости линий кривизны

1-го рода, нормализующая конгруенция 1-го рода сопряжена поверхности.

2-го рода, нормализующая конгруенция 2-го рода гармонична поверхности.

Наконец, мы будем говорить о совпадении линий кривизны 1-го и 2-го рода, если существует хотя бы одна сеть, которая является одновременно сетью линий кривизны и 1-го и 2-го рода. В силу этого определения, в случае неопределённости линий кривизны какого-либо рода уже имеет место это совпадение.

Для отыскания линий кривизны 2-го рода, например, предположим, что

$$z^{\alpha} = v^k y_k^{\alpha}$$

есть фокальная точка нормали 2-го рода. Тогда при движении по линии кривизны 2-го рода z^{α} смещается по лучу конгруенции так, что

$$dz^{\alpha} = \varepsilon^k y_k^{\alpha}$$

или в развёрнутом виде

$$\nabla v^k y_k^{\alpha} + v^k (l_s du^s y_k^{\alpha} + p_{ks} du^s \chi^{\alpha} + b_{ks} du^s X^{\alpha}) = \varepsilon^k y_k^{\alpha},$$

откуда, сравнив коэффициенты, получим:

$$p_{ks} v^k du^s = 0; \quad b_{ks} v^k du^s = 0$$

или, в силу коллинеарности векторов $p_{ks} du^s$ и $b_{ks} du^s$, получим систему уравнений:

$$(p_{ks} - \lambda b_{ks}) du^s = 0, \tag{α}$$

из условия совместности которой

$$\mathrm{Det}\, |p_{ks} - \lambda b_{ks}| = 0 \tag{β}$$

определяем λ, а затем и отношение $du^1 : du^2$.

Отметим прежде всего условие неопределённости линий кривизны, непосредственно вытекающее из уравнения (α), и распространим его на случай линий кривизны 1-го рода.

Для того чтобы линии кривизны 1-го рода были неопределённы, необходимо и достаточно, чтобы

$$\pi_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

Для того чтобы линии кривизны 2-го рода были неопределённы, необходимо и достаточно, чтобы

$$p_{ij} = \lambda b_{ij}. \tag{1.9}$$

Исключая случай неопределенности, предположим, что существует сеть линий кривизны.

В таком случае система (α) имеет два различных решения

$$(p_{ks} - \underset{1}{\lambda} b_{ks}) \underset{1}{du^s} = 0,$$
$$(p_{ks} - \underset{2}{\lambda} b_{ks}) \underset{2}{du^s} = 0,$$

где $\underset{1}{\lambda}$ и $\underset{2}{\lambda}$ — два различных корня уравнения (β). Но из приведённых тождеств сейчас же следует

$$p_{[ks]} \underset{2}{du^k} \underset{1}{du^s} = (\underset{1}{\lambda} - \underset{2}{\lambda}) b_{ks} \underset{2}{du^k} \underset{1}{du^s}.$$

Приняв во внимание, что $\underset{1}{\lambda} \neq \underset{2}{\lambda}$, будем иметь таким образом:

для того чтобы конгруенция нормалей 1-го рода была сопряжена поверхности, необходимо и достаточно, чтобы тензор π_{ij} *был симметричен или*

$$\pi^k_{\cdot k} = 0 .$$

для того чтобы конгруенция нормалей 2-го рода была гармонична поверхности, необходимо и достаточно, чтобы тензор p_{ij} *был симметричен или*

$$p^k_{\cdot k} = 0 . \qquad (2.9)$$

Очевидно, что и аналитически случай (1.9) является частным по отношению к (2.9).

Легко видеть, что условием совпадения линий кривизны 1-го и 2-го рода будет линейная зависимость

$$\lambda p_{ij} + \mu \pi_{ij} + \nu b_{ij} = 0. \qquad (3.9)$$

§ 10. Условия интегрируемости основных уравнений

К системе основных уравнений

$$\nabla_j y^\alpha_i = l_j y^\alpha_i + p_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha \mid \nabla_j \eta_{\alpha(i)} = \lambda_j \eta_{\alpha i} + \pi_{ij} \xi_\alpha + b_{ij} \Xi_\alpha \qquad (1.10)$$

присоединим систему

$$\partial_i X^\alpha = m^k_i y^\alpha_k + m_i x^\alpha + n_i X^\alpha \mid \partial_i \Xi_\alpha = \mu^k_i \eta_{\alpha k} + \mu_i \xi_\alpha + \nu_i \Xi_\alpha \qquad (2.10)$$

и будем искать условия интегрируемости обеих систем:

$$\begin{aligned} \nabla^k \nabla_k y^\alpha_i = -R^k_{\cdot i} y^\alpha_k = \nabla^k l_k y^\alpha_i + l_k \nabla^k y^\alpha_i + \nabla^k p_{ik} x^\alpha + p_{ik} \nabla^k x^\alpha + \\ + \nabla^k b_{ik} X^\alpha + b_{ik} \nabla^k X^\alpha = \nabla^k l_k y^\alpha_i - l^k [l_k y^\alpha_i + p_{ik} x^\alpha + b_{ik} X^\alpha] + \\ + \nabla^k p_{ik} x^\alpha - p_{i\cdot}^{\ k} [y^\alpha_k + l_k x^\alpha] + \nabla^k b_{ik} X^\alpha - b^k_i [m^l_k y^\alpha_l + m_k x^\alpha + n_k X^\alpha]. \end{aligned}$$

Сравнив коэфициенты при одинаковых координатах, мы получим три условия, к которым мы присоединим ещё условие (15.6)

$$\left.\begin{array}{rl|rl} \nabla^k l_k = p^k_{\cdot k} & & \nabla^k \lambda_k = \pi^k_{\cdot k}; & (3.10) \\ b^k_i m^l_k = R^l_{\cdot i} + p^k_{\cdot k} \delta^l_i - p_{i\cdot}^{\ l} & & b^k_i \mu^l_k = \rho^l_{\cdot i} + \pi^k_{\cdot k} \delta^l_i - \pi_{i\cdot}^{\ l}; & (4.10) \\ b^k_i m_k = \nabla^k p_{ik} & & b^k_i \mu_k = \nabla^k \pi_{(i)k}; & (5.10) \\ b^k_i (n_k - l_k) = \nabla^k b_{ik} & & b^k_i (\nu_k - \lambda_k) = \nabla^k b'_{ik} & (6.10) \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Получим теперь условия интегрируемости системы (2.10)

$$\nabla^k x_k^\alpha = \nabla^k m_k^l y_l^\alpha + m_k^l [l^k y_l^\alpha + p_l^{.k} x^\alpha + b_l^k x^\alpha] + \nabla^k m_k x^\alpha -$$
$$- m^k [y_k^\alpha + l_k x^\alpha] + \nabla^k n_k x^\alpha - n^k [m_k^l y_l^\alpha + m_k x^\alpha + n_k x^\alpha].$$

$$\left.\begin{array}{l|ll} \nabla^k m_k^l + (l^k - n^k)\, m_k^l = m^l & \nabla^k \mu_k^{(l)} + (\lambda^k - \nu^k)\, \mu_k^l = \mu^l; & (7.10) \\ \nabla^k m_k + (l^k - n^k)\, m_k = -m_k^l p_{l.}^{k} & \nabla^k \mu_k + (\lambda^k - \nu^k)\, \mu_k = -\mu_k^l \pi_{l.}^{k}; & (8.10) \\ m_k^l b_l^k + \nabla^k n_k = 0 & \mu_k^l b_l^k + \nabla^k \nu_k = 0. & (9.10) \end{array}\right\} (II)$$

Предположим, что заданы величины G_{ij}^k, b_{ij} и p_{ij}. Тогда величина l_i определится с точностью до несущественного градиентного слагаемого и величины m_k^i, m_i и n_i определятся из уравнений (4.10), (5.10) и (6.10). Если определённые таким образом величины удовлетворяют уравнениям (7), (8), то система (I) вполне интегрируема и нормализованная поверхность будет определена, что следует из линейности всех уравнений.

Итак:

задание внутренней геометрии 1-го рода и тензоров p_{ij} и b_{ij} определяют нормализованную поверхность с точностью до проективного преобразования, если величины, определённые из уравнений (I), удовлетворяют уравнениям (II).

задание внутренней геометрии 2-го рода и тензоров π_{ij} и b_{ij} определяют нормализованную поверхность с точностью до проективного преобразования, если величины, определяемые из уравнений (I), удовлетворяют уравнениям (II).

Присоединим к уравнениям (1.10) и (2.10) условия (9.6), смысл которых состоит в том, что вообще произвольный выбор нормирования координат точки x^α и плоскости Ξ_α ставится с их помощью в зависимость от выбора нормирования тензора b_{ij}. В таком случае мы можем просто подсчитать коэффициенты уравнений (2.10).

Действительно, свёртывание с ξ_α даёт нам

$$\partial_i x^\alpha \xi_\alpha = n_i = -\partial_i \xi_\alpha x^\alpha = -(\eta_{|\alpha i} + \lambda_i \xi_\alpha) X^\alpha = -\lambda_i,$$
$$n_i = -\lambda_i \qquad \Big| \qquad \nu_i = -l_i, \qquad (10.10)$$

а свёртывая с $\eta_{|\alpha i}$ и применяя (12.6) и 11.6):

$$\partial_i X^\alpha \eta_{|\alpha j} = -m_i^k b_{kj} = -(\pi_{ji} + b_{ij}\Omega),$$

получим:

$$b_{sk} m_i^k = -(\pi_{si} + b_{si}\Omega) \qquad \Big| \qquad b_{sk}\mu_i^k = -(p_{si} + b_{si}\Omega). \qquad (11.10)$$

Приведя (6.10) с помощью (10.10) к виду:

$$\nabla^k b_{ik} = -b_i^k (l_k + \lambda_k),$$

сравним его с (16.3), что сейчас же приведёт нас к равенству

$$\omega_k = l_k + \lambda_k. \qquad (12.10)$$

Итак: *тензор b_{ij} всегда может быть пронормирован так, чтобы сумма нормализаторов 1-го и 2-го рода определяла вместе с ним среднюю метрику Вейля.*

То же самое условие можно получить и в виде, не зависящем от нормирования, записав его так:

$$\nabla^k l_k + \nabla^k \lambda_k = \nabla^k \omega_k,$$

откуда, вследствие (3.10) и (25.1):

$$p^k_{.k} + \pi^k_{.k} = -K^k_{.k}, \qquad (13.10)$$

где K_{ij} — тензор Риччи средней метрики. Сравним формулу (11.10) с (4.10), которую представим в виде:

$$b^k_j m_{ki} = R_{ij} + p^k_{.k} L_{ij} - p_{ji} = R_{ij} + p_{ij} - 2p_{ji}.$$

Но

$$m_{ik} = m_{ki} + m^s_s L_{ik},$$

откуда

$$R_{ij} + p_{ij} - 2p_{ji} + \pi_{ji} + ab_{ij} = 0 \quad | \quad \rho_{ij} + \pi_{ij} - 2\pi_{ji} + p_{ji} + ab_{ij} = 0. \qquad (14.10)$$

Вычтем друг из друга последние равенства, получаем:

$$\rho_{ij} - R_{ij} = 3(\pi_{ji} - p_{ji}) - (\pi_{ij} - p_{ij}) + \beta b_{ij}. \qquad (15.10)$$

Переставив индексы в последнем равенстве и сложив утроенное новое равенство с первоначальным, будем иметь:

$$8(\pi_{ij} - p_{ij}) = 3(\rho_{ji} - R_{ji}) + (\rho_{ij} - R_{ij}) + \gamma b_{ij}, \qquad (16.10)$$

откуда альтернацией получаем:

$$4(\pi^k_{.k} - p^k_{.k}) = -(\rho^k_{.k} - R^k_{.k}). \qquad (17.10)$$

Наконец, сравнивая (13.10), (17.10) и (32.3), получаем:

$$2p^k_{.k} + 2\pi^k_{.k} = -\rho^k_{.k} - R^k_{.k},$$

$$4p^k_{.k} - 4\pi^k_{.k} = \rho^k_{.k} - R^k_{.k},$$

откуда:

$$8p^k_{.k} = -(\rho^k_{.k} + 3R^k_{.k}) \quad | \quad 8\pi^k_{.k} = -(R^k_{.k} + 3\rho^k_{.k}). \qquad (18.10)$$

§ 11. Пара поверхностей

Мы будем говорить, что *нормализация определяется парой поверхностей*, если между их точками установлено соответствие и прямая, соединяющая соответственные точки, принята за нормаль 1-го рода, а прямая пересечения соответственных касательных плоскостей — за нормаль 2-го рода. Найдём условие того, что данная нормализация определяется парой поверхностей. Пусть x^α — точка одной поверхности, X^α — вершина нормали, а точки второй поверхности

$$y^\alpha = X^\alpha + \sigma x^\alpha. \tag{1.11}$$

Подставляя X^α в уравнение (2.10), получаем:

$$\partial_i y^\alpha + \lambda_i y^\alpha = (m_i^k + \sigma\delta_i^k)\, y_k^\alpha + [m_i + \partial_i\sigma + \sigma(l_i + \lambda_i)]\, x^\alpha.$$

В первой части этого равенства нам даны координаты точки, расположенной в касательной плоскости второй поверхности и в силу равенства эта же точка лежит в касательной плоскости первой поверхности. Чтобы обе эти плоскости пересекались по нормали 2-го рода, нужно потребовать

$$m_i + \partial_i\sigma + \sigma(l_i + \lambda_i) = 0$$

или, в силу (12.10)

$$m_i + \partial_i\sigma + \sigma\omega_i = 0. \tag{2.11}$$

Если это выполнено, то точки

$$z_i^\alpha = \partial_i y^\alpha + \lambda_i y^\alpha$$

расположены на нормали 2-го рода. (3.11)

Сравнив полученную формулу с формулой (4.6), определяющей понятие нормализатора 1-го рода, приходим к следующему результату. *Если две поверхности имеют общую нормализацию, то координаты точки и касательной плоскости одной из этих поверхностей можно пронормировать так, что нормализатор 1-го рода каждой из этих поверхностей будет только знаком отличаться от нормализатора 2-го рода другой поверхности*. Так что

$$L_i = -\lambda_i \mid \Delta_i = -l_i. \tag{4.11}$$

Найдём теперь условие, при наличии которого существует третья поверхность, допускающая ту же нормализацию, что и данная пара поверхностей.

Для простоты предположим, что вершина нормали 1-го рода совпадает с точкой второй поверхности пары и тогда в силу условия (1.11), получим:

$$m_i = 0. \tag{5.11}$$

Пусть формула (1.11) определит теперь третью поверхность, в таком случае для неё условие (2.11) примет вид

$$\partial_i \sigma + \sigma \omega_i = 0$$

или

$$\omega_i = -\partial \lg \sigma, \tag{6.11}$$

что равносильно требованию градиентности тензора ω_i и при его выполнении σ определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Таким образом: *если существуют три поверхности с общей нормализацией, то существует и* ∞^1 *таких поверхностей или, иными словами, пара нормализующих конгруенций расслояема в направлении нормали 1-го рода* *).

Будем в подобном случае говорить ещё короче, что *нормализация допускает расслоение 1-го рода.*

Примем теперь во внимание, что тензор ω_i определяет вместе с тензором b_{ij} среднюю метрику Вейля, и его градиентность характерна для её обращения в метрику Римана. Поэтому: *для того чтобы пара поверхностей определяла нормализацию, допускающую расслоение 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы средняя метрика, определяемая ею на одной (а следовательно, и на обеих) из поверхностей пары, была римановой.*

§ 12. Аналитическая нормализация

Условия (3.10)

$$\nabla^k l_k = p^k_{\cdot k}; \quad \nabla^k \lambda_k = \pi^k_{\cdot k}$$

показывают, что симметрия каждого из тензоров правой части характеризует градиентность соответствующего нормализатора. Геометрическое значение этой симметрии было нами установлено в § 9. Основываясь на полученном нами результате, можем заключить, что

для того чтобы нормализующая конгруенция 1-го рода была сопряжена поверхности, необходимо и достаточно, чтобы нормализатор 1-го рода был градиентен.

для того чтобы нормализующая конгруенция 2-го рода была гармонична поверхности, необходимо и достаточно, чтобы нормализатор 2-го рода был градиентен.

Примем теперь во внимание, что нормализаторы изменяются на градиентное слагаемое при соответствующем перенормировании координат точки или касательной плоскости, как это указано в формуле (6.6). Если нормализатор градиентен, то множитель перенормирования можно подобрать так, чтобы после него нормализатор обра-

*) См., например, С. П. Фиников, «Проективно-дифференциальная геометрия», М. — Л., 1937 г., стр. 184 и след.

тился в нуль. Множитель этот определяется существенно однозначно, так как неопределённый постоянный множитель можно не принимать в расчёт. Итак:

Если нормализующая конгруенция 1-го рода сопряжена поверхности, то существует такое *каноническое* нормирование координат касательной плоскости, при которой нормализатор 1-го рода равен нулю.

Если нормализующая конгруенция 2-го рода гармонична поверхности, то существует такое *каноническое* нормирование координат точки поверхности, при котором нормализатор 2-го рода равен нулю.

Отсюда следует самый общий способ получения такой нормализации, которая удовлетворяет и требованию сопряжённости, и требованию гармоничности одновременно. Для этого достаточно задать нормаль 1-го рода как прямую пересечения плоскостей $\partial_i\xi_\alpha$, а нормаль 2-го рода как прямую, соединяющую точки $\partial_i x^\alpha$. Так как всякая такая нормализация однозначно соответствует аналитическому заданию точки и касательной плоскости поверхности, то мы будем называть её *аналитической нормализацией.*

Итак: *нормализация называется аналитической, если нормализующая конгруенция 1-го рода сопряжена поверхности, а нормализующая конгруенция 2-го рода ей гармонична.*

Поставим теперь вопрос об отыскании такой нормализации, которая определяет на нормализованной поверхности эквиаффинную пару внутренних геометрий.

Вспомнив, что условие эквиаффинности есть симметрия тензора Риччи, и что это условие должно быть выполнено для обеих внутренних геометрий, сейчас же получим из формулы (8.10): *для того чтобы пара внутренних геометрий нормализованной поверхности была эквиаффинной, необходимо и достаточно, чтобы нормализация была аналитической.*

Для того чтобы получить резюме всех условий, определяющих эквиаффинную пару внутренних геометрий, запишем следующие шесть положений:

1. Внутренняя геометрия 1-го рода эквиаффинна $R^k_{\cdot k}=0$.
2. Внутренняя геометрия 2-го рода эквиаффинна $\rho^k_{\cdot k}=0$.
3. Средняя метрика риманова $R^k_{\cdot k}+\rho^k_{\cdot k}=0$.
4. Нормализующая конгруенция 1-го рода сопряжена поверхности

$$R^k_{\cdot k}+3\rho^k_{\cdot k}=0.$$

5. Нормализующая конгруенция 2-го рода гармонична поверхности

$$\rho^k_{\cdot k}+3R^k_{\cdot k}=0.$$

6. Чебышевский тензор асимптотической сети градиентен

$$\rho^{k}_{\cdot k} - R^{k}_{\cdot k} = 0.$$

Простое сравнение признаков даёт возможность сразу заключить, что *если два из приведённых шести условий выполнены, то выполнены и все шесть, а нормализация поверхности аналитическая.*

Возвратимся теперь к случаю пары поверхностей. Формула (4.11) показывает, что два разнородных нормализатора двух поверхностей пары вместе становятся градиентными, поэтому:

для того чтобы нормализующая конгруенция 1-го рода была сопряжена одной из поверхностей пары, необходимо и достаточно, чтобы нормализующая конгруенция 2-го рода была гармонична другой поверхности пары. В частности, *если нормализация будет аналитической в отношении одной поверхности пары, то она дудет аналитической и в отношении другой поверхности.*

Рассмотрим аналитическую нормализацию, определяемую парой поверхностей *). Она определяет на каждой из поверхностей пары эквиаффинную пару геометрий, средняя метрика которых — риманова.

Поэтому: *аналитическая нормализация, определяемая парой поверхностей, допускает расслоение 1-го рода, причём она будет аналитической для любой из расслояющих поверхностей.*

Так как для аналитической нормализации можно положить

$$l_i = \lambda_i = \omega_i = 0,$$

то, поместив вершину нормали в точку расслояющей поверхности и получив, как в (5.11)

$$m_i = 0,$$

мы вместо условия (9.10) будем иметь в этом случае условие

$$m^{l}_{k} p^{k}_{l\cdot} = 0,$$

которое с помощью (12.6) приведём к виду:

$$b^{s}_{r} \pi^{r}_{i} p^{t}_{s} = 0,$$

откуда $\lambda b_{ij} + \mu \pi_{ij} + \nu p_{ij} = 0$, так что линии кривизны 1-го и 2-го рода совпадают. Обратно, если это совпадение имеет место для аналитической нормализации, то из того же (9.10) имеем $\nabla^k m_k = 0$, а это позволяет нам найти σ из условия (2.11), вследствие чего нормализация определяется парой.

Итак: ***для того чтобы аналитическая нормализация определялась парой поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы линии кривизны 1-го и 2-го рода совпадали между собой.***

---

*) Поверхности пары находятся в соответствии F по терминологии Эйзенхарта.

§ 13. Нормализация Ли.

Будем говорить о *нормализации Ли*, если нормаль 1-го рода и нормаль 2-го рода сопряжены полярно относительно поверхности Ли нормализованной поверхности.

Так как ассоциированная прямая асимптотической сети сопряжена полярно нормали 1-го рода относительно поверхности Ли, то в случае нормализации Ли она должна совпасть с нормалью 2-го рода, вследствие чего асимптотическая сеть будет чебышевской. Но так как асимптотическая сеть будет базисом пары внутренних геометрий, то: *для того чтобы пара внутренних геометрий была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы определяющая её нормализация была нормализацией Ли.*

Таким образом, нормализация Ли вполне характеризуется обращением в нуль чебышевского тензора асимптотической сети

$$T_i = 0. \tag{1.13}$$

Приняв это во внимание, мы получаем способ построения произвольной нормализации Ли данной поверхности. Действительно, если T_i есть вектор чебышевской сети данной произвольной нормализации, то при переходе к новой нормализации, сопровождаемой составным преобразованием пары внутренних геометрий

$$(p_i, \pi_i),$$

он преобразуется, согласно (26.5), следующим образом:

$$'T_i = T_i + \pi_i - p_i \tag{1'.13}$$

и для того, чтобы новая нормализация была нормализацией Ли, необходимо и достаточно выбрать преобразование так, чтобы

$$p_i - \pi_i = T_i. \tag{2.13}$$

Таким образом, нужно взять за новую нормаль 2-го рода прямую, расположенную в касательной плоскости и определяемую тензором p_i, а за нормаль 1-го рода прямую, проходящую через точку поверхности и определяемую тензором π_i; причём оба эти тензора должны быть связаны (2.13).

Иными словами: *для того чтобы тензор h_i определял прямую, лежащую в касательной плоскости и сопряжённую в поляритете Ли прямой, определяемой тензором χ_i, необходимо и достаточно, чтобы*

$$h_i - \chi_i = T_i, \tag{3.13}$$

где T_i — чебышевский тензор 1-го рода асимптотической сети. В частности: *две прямые, сопряжённые в поляритете Ли и заданные по отношению нормализации Ли, определяются одинаковыми тензорами.*

Вследствие этого: *переход от одной нормализации Ли к другой нормализации Ли сопровождается симметричным и составным преобразованием пары внутренних геометрий. Обратная теорема тоже верна.*

Так как тензор S^i_{jk} является инвариантным по отношению к симметричному составному преобразованию, то, будучи определён для произвольной нормализации Ли, он должен быть инвариантом поверхности, а не нормализации. Для того чтобы выяснить его значение, введём определение *линии Сегре. Будем называть линией Сегре такую линию поверхности, соприкасающаяся плоскость которой полярно сопряжена её характеристической точке относительно поверхности Ли.* Если на данной поверхности существует линия Сегре, то мы всегда можем выбрать нормализацию так, чтобы нормаль 1-го рода в точках линии лежала в её соприкасающейся плоскости, а в таком случае и нормаль 2-го рода будет проходить через характеристическую точку. Но по отношению такой нормализации линия Сегре будет одновременно и геодезической 1-го и геодезической 2-го рода и совпадёт с линией S. Однако, вследствие инвариантности тензора S^i_{jk}, *линия Сегре будет совпадать с линией S в любой нормализации Ли.* Обратно, если дана некоторая линия S такой нормализации, то, переходя к новой нормализации Ли, нормали которой лежат в соприкасающихся плоскостях данной линии, мы сделаем её геодезической линией 1-го рода, которая, по свойству линий S, будет также и геодезической линией 2-го рода. Однако последние имеют свои характеристические точки на нормали 2-го рода. Если принять ещё во внимание сопряжённости направления касательной всякой кривой и направления на её характеристическую точку, то станет очевидным полярная сопряжённость соприкасающейся плоскости рассмотренной линии S и её характеристической точки. Таким образом, *в любой нормализации Ли все линии Сегре и все линии* S *совпадают.*

Линии семейств, сопряжённых семействам линий Сегре, называются линиями Дарбу. В нормализации Ли направления D, очевидно, касательны к линиям Дарбу (см. начало § 4). Так как вследствие условия аполярности, направление Дарбу вполне определяется заданием направлений Сегре, а все тройки направлений проективно эквивалентны, то и шестёрки направлений Сегре и Дарбу эквивалентны во всех точках некоторой области поверхности, окружающей данную точку. Вследствие этого *ангармоническое отношение двух пар направлений, каждая из которых образована направлением Сегре и соответствующим направлением Дарбу, не зависит от точки.* Вследствие этого *три сопряжённых сети, образованных каждая семейством линий Сегре и семейством линий Дарбу, принадлежат одному и тому же пучку сопряжённых сетей. Пучок этот называют пучком Дарбу — Сегре.*

Так как для нормализации Ли выполнено условие 6 § 12, то нормализация Ли будет аналитической, если для неё выполнено одно из первых пяти условий. В частности, отсюда следует, что для того чтобы конгруенция была сопряжена поверхности, необходимо и достаточно, чтобы конгруенция лучей, полярных лучам данной конгруенции относительно поверхности Ли, была гармонична поверхности.

§ 14. Линейчатые поверхности

Асимптотическая линия может быть охарактеризована как такая линия поверхности,

соприкасающая плоскость которой совпадает с касательной плоскостью поверхности.	характеристическая точка которой совпадает с точкой поверхности.

Сравнивая эти определения с характеристиками геодезической линии 1-го и 2-го рода, приходим к заключению, что: *для того чтобы геодезическая линия 1-го или 2-го рода была асимптотической, необходимо и достаточно*, чтобы её соприкасающаяся плоскость или её характеристическая точка была неопределённой, т. е. *чтобы она была прямой.*

Отсюда следует: *для того чтобы пара внутренних геометрий была полугеодезической, необходимо и достаточно, чтобы нормализованная поверхность была линейчатой.*

Если на линейчатой поверхности установлена нормализация Ли, то, согласно (4.3), форма $S^{i}_{lmn}\, du^l du^m du^n$ будет полным кубом, так что линии S будут совпадать между собою. Итак: *необходимым и достаточным признаком линейчатой поверхности, находящейся в нормализации Ли, будет, согласно* (4.4),

$$J = 0.$$

Результаты предыдущего параграфа позволяют заключить, что *на линейчатой поверхности и только на ней линии Сегре совпадают между собою*. В этом случае происходит также совпадение всех направлений Сегре со всеми направлениями Дарбу и с одним из асимптотических направлений.

§ 15. Средние нормали

Рассмотрим две прямые, определяемые тензорами $\underset{1}{h_i}$ и $\underset{2}{\chi_i}$, из которых первая лежит в касательной плоскости, а вторая проходит через точку поверхности.

Будем называть их средней прямой

1-го рода среднюю прямую (в смысле § 8) прямой $\underset{2}{\chi_i}$ и поляры прямой $\underset{1}{h_i}$ относительно поверхности Ли.	*2-го рода среднюю прямую, прямой $\underset{1}{h_i}$ и поляры прямой $\underset{2}{\chi_i}$ относительно поверхности Ли.*
Средняя прямая 1-го рода проходит через точку поверхности, но не лежит в касательной плоскости.	Средняя прямая 2-го рода лежит в касательной плоскости, но не проходит через точку поверхности.

Из определения следует, что средние прямые 1-го и 2-го рода двух данных прямых сопряжены полярно между собою.

Так как поляра прямой $\underset{1}{h_i}$ определится [согласно (3.13)] тензором

$$\underset{1}{\chi_i} = \underset{1}{h_i} - T_i,$$

то вследствие (9.8) будем иметь, что для прямых $\underset{1}{h_i}$ и $\underset{2}{\chi_i}$ средняя прямая

1-го рода определяется тензором $$\chi_i = \frac{\underset{1}{h_i} + \underset{2}{\chi_i}}{2} - \frac{T_i}{2}$$	2-го рода определяется тензором $$h_i = \frac{\underset{1}{h_i} + \underset{2}{\chi_i}}{2} + \frac{T_i}{2}. \quad (1.15)$$

В частности, для *средних нормалей*, т. е. для средних прямых нормалей 1-го и 2-го рода будем иметь:

$$\chi_i = -\frac{T_i}{2} \qquad \Bigg| \qquad h_i = \frac{T_i}{2}. \qquad (2.15)$$

Средние ассоциированные прямые некоторой сети, т. е. средние прямые её ассоциированных прямых 1-го и 2-го рода, определятся формулами

$$\chi_i = \theta_i - \frac{T_i}{2} \qquad \Bigg| \qquad h_i = \theta_i + \frac{T_i}{2}, \qquad (3.15)$$

где $\theta_i = \frac{t_i + \tau_i}{2}$ есть чебышевский тензор сети по отношению к средней метрике, а t_i и τ_i есть её чебышевские тензоры 1-го и 2-го рода, которые определяют, согласно § 8, положение её ассоциированных прямых.

Сравнив формулы (2.15) и (3.15), приходим к следующему истолкованию чебышевской сети средней метрики: ***для того чтобы сеть была чебышевской по отношению к средней метрике, необходимо и достаточно, чтобы её средние ассоциированные прямые совпадали со средними нормалями.***

При изменении нормализации, сопровождаемой составным преобразованием

$$(p_i, \ \pi_i)$$

тензор $-\frac{T_i}{2}$, определяющий среднюю нормаль, преобразуется согласно (1'.13) так:

$$-\frac{T_i}{2} = -\frac{'T_i}{2} - \frac{\pi_i - p_i}{2}.$$

Будем искать такое преобразование, при котором средняя нормаль остаётся инвариантной. В этом случае тензор $-\frac{T_i}{2}$ должен преобразовываться как тензор инвариантной прямой, проходящей через точку поверхности, т. е. по формуле

$$-\frac{'T_i}{2} = -\frac{T_i}{2} - \pi_i.$$

Сравнивая оба преобразования, получаем: $\frac{\pi_i - p_i}{2} = \pi_i$ или

$$\pi_i = -p_i.$$

Итак: *для того чтобы при изменении нормализации сохранялись средние нормали, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее составное преобразование было антисимметричным.* Перейдём к установлению связи между средней геометрией и характером соответствующей нормализации. Из только что полученного результата следует, что на среднюю геометрию может влиять только положение средних нормалей. Действительно, при изменении нормализации, сохраняющей средние нормали, и средняя метрика сохраняется. Предположим сначала, что средняя метрика эквиаффинная, т. е. риманова. Произведём изменение нормализации, сопровождающееся составным преобразованием

$$\left(\frac{T_i}{2}, \ -\frac{T_i}{2}\right).$$

Тогда после преобразования будем иметь для чебышевского тензора асимптотической сети

$$'T_i = T_i - T_i = 0,$$

а средняя метрика остаётся неизменной в силу антисимметрии преобразования.

Так как новая нормализация будет нормализацией Ли, а средняя метрика эквиаффинная, то будут выполнены условия 3) и 6) § 12, вследствие чего нормализация будет аналитической.

Таким образом: *для того чтобы средняя метрика была римановой, необходимо и достаточно, чтобы одна из конгруенций нормалей была сопряжена, а другая гармонична поверхности.*

Следует заметить, что достаточно потребовать или только сопряжённости или только гармоничности, так как второе условие явится следствием первого, вследствие полярной сопряжённости средних нормалей. Предположим, что средняя метрика квазиевклидова. В таком случае она допускает существование ∞^2 декартовых сетей, среди которых существует пучок ортогональных. Любая сеть этого пучка будет сопряжённой сетью поверхности и вместе с тем чебышевской сетью средней метрики. Вследствие этого её средняя ассоциированная прямая совпадёт со средней нормалью. Но ассоциированные прямые сопряжённой сети есть её прямые Грина, и их средние прямые естественно назвать *средними прямыми Грина сети* *).

Итак: *для того чтобы средняя метрика была квазиевклидовой, необходимо и достаточно, чтобы средние нормали совпадали со средними прямыми Грина некоторой сопряжённой сети.* Приняв во внимание, что всё сказанное относится в равной степени к любой сети пучка, приходим к факту, независимому от нормализации: *соответствующие средние прямые Грина совпадают для двух сопряжённых сетей, принадлежащих одному и тому же пучку.*

Предположим, наконец, что средняя метрика — евклидова, т. е. одновременно является и эквиаффинной, и квазиевклидовой. Сопряжённая сеть, средние прямые которой совпадают со средними нормалями, будет ортогональной декартовой сетью евклидовой геометрии. Приняв асимптотическую сеть за изотропную, а рассматриваемую сопряжённую сеть за координатную, получим в соответствующих параметрах

$$b_{kl}du^k du^l = du^2 + dv^2,$$

откуда следует, что сеть будет изотермически сопряжённой.

Обратно, изотермически ортогональная декартова сеть возможна только в евклидовой геометрии.

Итак: *для того чтобы средняя метрика была евклидовой, необходимо и достаточно, чтобы средние нормали совпадали со средними прямыми Грина некоторой изотермически сопряжённой сети.*

Из приведённых рассуждений сразу вытекает признак, геометрически характеризующий изотермически сопряжённую сеть, который равносилен признаку Вильчинского **): *для того чтобы сеть была изотермически сопряженной, необходимо и достаточно, чтобы одна из конгруенций её средних прямых Грина была гармонична (или сопряжена) поверхности.*

*) Прямые, которые мы назвали средними прямыми Грина, вводимые из других соображений, известны под названием cusp-axis и flex-zay, см. Lane § 21, стр. 100.

**) Lane, стр. 117, упр. 26.

В заключение вернёмся к нормализации, расслояемой в направлении нормали 1-го рода. Так как средняя метрика каждой из расслояющих поверхностей риманова, то, согласно полученным результатам, приходим к следующим теоремам:

1. Конгруенция средних прямых лучей пары конгруенций, расслояемой в одном направлении, полученных в отношении поверхности Ли одной из расслояющих поверхностей, сопряжена и гармонична этой поверхности.

2. Если средние прямые лучей пары конгруенций, расслояемой, в направлении одной из них, построенные в отношении некоторой расслояющей поверхности, совпадают со средними прямыми Грина некоторой сопряжённой сети, то эта сеть изотермически сопряжённая.

§ 16. Нормализация Чеха

Осями Чеха называются средние прямые пучка сопряжённых сетей Дарбу-Сегре *). Мы будем говорить о нормализации Чеха, если одна из осей Чеха принята за нормаль 1-го рода, а вторая — за нормаль 2-го рода. Нормализация Чеха есть частный случай нормализации Ли, так как средние нормали 1-го и 2-го рода всегда сопряжены относительно поверхности Ли.

Средняя геометрия, определяемая нормализацией Чеха, будет квазиевклидова, так как средние нормали, совпадая с нормалями 1-го и 2-го рода, будут средними прямыми Грина сопряжённой сети. В этой геометрии каждая из сопряженных сетей Дарбу-Сегре, будет квазиевклидовой ортогональной сетью, так как всякое семейство линий Дарбу и Сегре будет семейством абсолютно параллельных геодезических линий средней метрики.

Но линии Сегре в нормализации Ли будут линиями S и, будучи геодезическими средней метрики, должны быть двойными геодезическими. Отсюда следует, что *пара внутренних геометрий, определяемая на нелинейчатой поверхности нормализацией Чеха, допускает существование трёх различных семейств двойных геодезических.*

Отсюда же следует факт, не зависящий от нормализации.

Соприкасающиеся плоскости линий Сегре пересекаются по одной прямой — оси Чеха 1-го рода **)	*Характеристические точки линий Сегре лежат на одной прямой оси Чеха 2-го рода* **).

Будем искать величины, характеризующие внутренние геометрии нормализации Чеха в асимптотической системе координат, восполь-

*) Lane, § 21, стр. 100.

**) F.— Č. J., § 40, стр. 114.

зовавшись для этого (4.3), где следует положить $T_i = 0$, так как пара внутренних геометрий чебышевская.

Уравнение линий Сегре примет вид

$$S_{i.lm} du^k du^l du^m = L_{12} S^2_{.11} du^3 + L_{21} S^1_{.22} dv^3 = 0$$

или

$$\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0, \tag{1.16}$$

откуда

$$\frac{dv}{du} = \varepsilon^m \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} = \varepsilon^m Q, \tag{2.16}$$

где $m = 1, 2, 3$ — показатель степени, а $\varepsilon^3 = 1$.

Последнее соотношение должно давать три частных первых интеграла уравнения геодезических, которое имеет вид:

$$\frac{d^2v}{du^2} + \beta - \varphi \frac{dx}{du} + \psi \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \gamma \left(\frac{dv}{du}\right)^3 = 0. \tag{3.16}$$

Дифференцируя (2.16), получаем:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \varepsilon^m \left(\partial_u Q + \partial_v Q \frac{dv}{du}\right) = \varepsilon^m (Q_u + QQ_v \varepsilon^m) \tag{4.16}$$

или после подстановки в (3.16), учитывающей (1.16),

$$Q_u - \varphi Q + \varepsilon^m (Q_v + \psi Q) Q = 0.$$

Но равенство должно иметь место при всех трёх значениях m, что будет возможно только, если

$$Q_u - \varphi Q = 0; \quad Q_v + \psi Q = 0, \tag{5.16}$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{3} \partial_u \lg\left(\frac{\beta}{\gamma}\right); \quad \psi = \frac{1}{3} \partial_v \lg\left(\frac{\gamma}{\beta}\right). \tag{6.16}$$

Таким образом, геометрия 1-го рода, определяемая нормализацией Чеха, характеризуется в асимптотических координатах так:

$$\left.\begin{aligned} &G^1_{11} = \frac{1}{3} \partial_u \lg\left(\frac{\beta}{\gamma}\right); && G^2_{11} = \beta; \\ &G^1_{12} = 0; && G^2_{12} = 0; \\ &G^1_{22} = \gamma; && G^2_{22} = \frac{1}{3} \partial_v \lg\left(\frac{\gamma}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

§ 17. Нормализация Вильчинского

В случае нормализации Ли нелинейчатой поверхности всякий тензор вида

$$a_{ij} = a_k S^k_{\cdot ij} \tag{1.17}$$

будет тензором сопряжённой сети, так как тензор S_{ijk} симметричен и для него имеет место тождество

$$b^{ij}S^{k}{}_{ij}=0.$$

Обратно: если тензор a_{ij} характеризует сопряжённую сеть, то его всегда можно представить в виде (1.17). Для доказательства произведём свёртывание правой и левой части (1.17) с $S_{r\cdot\cdot}^{\cdot ij}$, считая a_k за неизвестное

$$S_{r\cdot\cdot}^{\cdot ij}\,a_{ij}=a_k S^{k}_{\cdot ij}S_{r\cdot\cdot}^{\cdot ij},$$

но правую часть можно преобразовать по формуле (35.3), положив в ней $S^{k}_{\cdot ki}=0$, откуда

$$S_{r\cdot\cdot}^{\cdot ij}a_{ij}=4Jb_k.$$

и так как для нелинейчатой поверхности $J\neq 0$, то a_k определяется.

В частности, рассмотрим тензор

$$C_{ij}=\rho_{ij}-R_{ij}=-\overset{0}{\nabla}_k S^{k}{}_{ij}; \tag{2.17}$$

он симметричен вследствие (38.3), где $S_k=0$, и определяет сопряжённую сеть вследствие (28.3). Итак,

$$C_{ij}=C_k S^{k}{}_{ij}.$$

Установим закон его преобразования при переходе к новой нормализации Ли, т. е. при симметричном преобразовании

$$(p_i,\,p_i).$$

При этом, тензор $S^{k}{}_{ij}$ остаётся инвариантным, а его производная преобразуется так:

$$'\overset{0}{\nabla}_r S^{r}{}_{jk}=\overset{0\,1}{\nabla}_r S^{r}{}_{jk}+\sigma^{r}_{rm}S^{m}{}_{jk}-\sigma^{m}_{rj}S^{r}{}_{mk}-\sigma^{m}_{rk}S^{r}{}_{jm},$$

где

$$\sigma^{i}_{jk}=\delta^{i}_{(j}p_{k)}-b_{kj}b^{il}p_l \quad \text{[см. формулу (21.5)]}.$$

Но

$$\sigma^{r}_{rm}=2p_m,$$

а

$$\sigma^{m}_{ri}S^{r}_{mj}=p_r S^{r}{}_{ij}-b_{ir}b^{ml}S^{r}{}_{mj}p_l.$$

Однако, вследствие условий аполярности, тензор

$$b_{ir}S^{r}{}_{mj}$$

симметричен относительно индексов i и m, откуда

$$b_{ir}b^{ml}S^{r}{}_{mj}=b_{mr}b^{ml}S^{r}{}_{ij}=S^{l}{}_{ij},$$

откуда

$$c_{ri}^{m} S^{r}{}_{mj} = 0. \tag{3.17}$$

Итак,

$$'C_{ij} = C_{ij} + 2p_l S^l{}_{ij} \tag{4.17}$$

или

$$'C_k = C_k + 2p_k.$$

Выбирая

$$p_k = -\frac{1}{2} C_k,$$

получим после преобразования

$$R_{ij} = \rho_{ij}. \tag{5.17}$$

Итак: *для всякой нелинейчатой поверхности единственным образом определяется такая нормализация Ли, которая определяет внутренние геометрии с совпадающими тензорами Риччи. Будем называть эту нормализацию нормализацией Вильчинского. Нормализация Вильчинского может быть охарактеризована и как нормализация, определяющая пару внутренних геометрий с совпадающими абсолютными линиями.* Действительно, если это совпадение имеет место, то

$$\rho_{(ij)} = \lambda R_{(ij)},$$

но из (28.3) следует, что $\lambda = 1$, а из (38.3), правая часть которого обращается в нуль, вытекает, что антисимметричные части тензоров Риччи также совпадают, и равенство (5) будет выполнено.

Вследствие (33.3) будем иметь:

$$2R_{(ij)} = 4Hb_{ij},$$

так что *при нормализации Вильчинского сети абсолютных линий 1-го и 2-го рода совпадают с асимптотической сетью.*

Чтобы выяснить ещё одно важное свойство этой нормализации, заметим, что формула (16.10) принимает вид

$$\pi_{ij} - p_{ij} + \mu b_{ij} = 0,$$

откуда следует, что *линии кривизны 1-го и 2-го рода нормализации Вильчинского совпадают между собою.*

Отсюда сразу вытекает, что если нормализация Вильчинского не аналитическая, то нормализующие прямые совпадают с директрисами Вильчинского *). Однако нетрудно видеть, что это совпадение будет иметь место и вообще.

Отметим ещё способ построения чебышевской пары сопряжённых перенесений, для которой выполнено условие (5.17). Рассмотрим такую геометрию, абсолютные линии которой образуют чебыщевскую,

*) F. — Č. G., т. I, § 25, B).

но не геодезическую сеть. Приняв эту сеть за базис пары, мы получим вторую геометрию, абсолютные линии которой вообще должны образовать семейства, сопряжённые относительно базиса семейством данных абсолютных линий, но так как они совпадают с линиями базиса, то у полученной пары абсолютные линии 1-го и 2-го рода совпадают, что и характеризует пару Вильчинского.

В асимптотической системе координат условие совпадения абсолютных линий сведётся к двум равенствам

$$\rho_{11} = R_{11} = 0; \quad \rho_{22} = R_{22} = 0,$$

так что из (45.3), приняв во внимание, что $T_i = 0$, получаем:

$$\varphi = -\partial_1 \lg \gamma; \quad \psi = -\partial_2 \lg \beta. \tag{6.17}$$

Итак, внутренняя геометрия 1-го рода нормализации Вильчинского характеризуется в асимптотической системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} G^1_{11} &= -\partial_1 \lg \gamma; \quad C^1_{12} = 0; \quad G^2_{11} = \beta; \\ G^2_{22} &= -\partial_2 \lg \beta; \quad G^2_{12} = 0; \quad G^1_{22} = \gamma. \end{aligned} \tag{7.17}$$

§ 18. Нормализация Фубини-Чеха

Нормализация, которую Фубини и Чех кладут в основу своей геометрии поверхностей, есть аналитическая нормализация Ли *). Самую общую нормализацию такого типа можно получить, взяв, например, произвольную конгруенцию, сопряжённую поверхности и преобразовав её лучи полярно относительно поверхности Ли.

При такой нормализации на поверхности определится *чебышевская эквиаффинная пара сопряжённых перенесений.*

В асимптотической системе координат её можно охарактеризовать, пронормировав тензор b_{ij} так, чтобы он удовлетворял уравнению Кодаццы, вследствие чего тензор ω_i будет равен нулю. Поэтому из (43.3) будем иметь:

$$\varphi = \partial_1 \lg \theta; \quad \psi = \partial_2 \lg \theta. \tag{1.18}$$

Для того чтобы устранить произвол в выборе нормали 1-го рода, Фубини рассматривает инвариант, несущественно отличающийся от инварианта J формулы (36.3).

Если сделать переход от одной аналитической нормализации Ли к другой такой же нормализации, то он будет сопровождаться симметричным преобразованием (p_i, p_i), где для сохранения эквиаффинного характера внутренних геометрий требуется, чтобы вектор p_i был градиентным. Средняя метрика Римана подвергается при этом конформ-

*) F. — Č. G., т. I.

ному преобразованию, причём её основной тензор преобразуется так:

$$'b_{ij} = p^2 b_{ij},$$

где p — функция, производная которой

$$\partial_i p = p_i.$$

Так как тензор $S^i{}_{jk}$ останется инвариантным, то

$$'J = \pm p^2 J$$

и p, определённую до постоянного множителя, можно подобрать так, чтобы $'J = 1$, если $J \neq 0$.

Соответствующая этому случаю нормализующая прямая и названа Фубини и Чехом *проективной нормалью*. Рассмотренная нормализация вследствие требований $J \neq 0$ имеет смысл только для нелинейчатых поверхностей. В асимптотической системе координат

$$J = \frac{1}{4\theta} S^m{}_{n1} S^n{}_{m2} = \frac{1}{4\theta} S^m{}_{11} S^1{}_{m2} = \frac{1}{4\theta} S^2{}_{11} S^1{}_{22} = \frac{\beta\gamma}{\theta},$$

откуда следует, что в случае нормализации Фубини-Чеха внутренняя геометрия определяется так:

$$\begin{gathered}
\varphi = \partial_1 \lg(\beta\gamma); \qquad \psi = \partial_2 \lg(\beta\gamma); \\
G^1_{11} = \partial_1 \lg(\beta\gamma); \quad G^2_{11} = \beta; \quad G^1_{12} = 0; \\
G^2_{22} = \partial_2 \lg(\beta\gamma); \quad G^1_{22} = \gamma; \quad G^2_{12} = 0.
\end{gathered} \tag{2.18}$$

В заключение рассмотрим некоторые случаи совпадения.

Аналитическая нормализация Чеха характеризуется, как это следует из сравнения (7.16) и (1.18), уравнением

$$\partial^2 \lg(\beta/\gamma) = 0 \tag{3.18}$$

или в соответствующих параметрах

$$\beta = \gamma, \tag{4.18}$$

что возможно только на изотермически асимптотической поверхности *).

Возможность аналитической нормализации Вальчинского тоже характеризуется (4.18), что следует из сравнения (1.18) и (6.17) и, следовательно, такая нормализация тоже возможна только на изотермически асимптотической поверхности *).

*) F. — Č. G., § 35.

Наконец, предположим, что директриса Вильчинского совпадает с осью Чеха, тогда

$$^1/_3\, \partial_1 \lg (^\beta/_\gamma) = -\partial_1 \lg \gamma; \quad ^1/_3\, \partial_2 \lg (^\gamma/_\beta) = -\partial_2 \lg \beta,$$

откуда

$$\partial_1 \lg (\beta\gamma^2) = 0; \quad \partial_2 \lg (\gamma\beta^2) = 0$$

или

$$\partial_1 \lg \beta = -\partial_1 \lg \gamma; \quad \partial_2 \lg \gamma = -\partial_2 \lg \beta$$

при сравнении с уравнениями (2a); если две из трёх прямых 1) оси Чеха, 2) директрисы Вильчинского, 3) проективной нормали совпадают, то они совпадают и с третьей. Поверхность, допускающая такое совпадение, называется поверхностью совпадения (surface de coïnsidense) *).

§ 19. Нормализация Грина

Предположим, что пара внутренних геометрий, определяющаяся на нормализованной поверхности, — вейлева. В таком случае геометрия 1-го рода, например, допускает существование декартовой сети. Так как эта сеть геодезическая, то её ось Грина совпадает с нормалью 1-го рода. Ребро Грина этой же сети должно совпасть с нормалью 2-го рода, так как эта сеть чебышевская. Говоря о *нормализации Грина* в том случае, если нормали совпадают с прямыми Грина некоторой сети, имеем таким образом: *для того чтобы на нормализованной поверхности определялась вейлева пара внутренних геометрий, необходимо и достаточно, чтобы поверхность находилась в нормализации Грина.* Сеть эта совпадает с изотропной сетью геометрии Вейля 1-го рода. Построение нормализации Грина можно провести ещё так. Рассмотрим наряду с поверхностью S, подлежащей нормализации, две другие поверхности S_1 и S_2 и выделим на поверхности S область точек так, чтобы через каждую из них можно было провести по одной и только по одной общей касательной S и S_1, S и S_2. С помощью этих касательных установится соответствие между точками M, M_1 и M_2, взятыми в допустимых областях S, S_1 и S_2. Будем теперь считать нормалью 2-го рода поверхности S прямую M_1M_2, а за нормаль 1-го рода возьмём прямую пересечения касательных плоскостей к S_1 в точке M_1 и к S_2 в точке M_2.

На поверхности S определится в таком случае пара вейлевых геометрий, причём линии изотропной сети геометрии 1-го рода будут

---

*) См. сноску на предыдущей стр.

иметь своими касательными прямые MM_1 и MM_2. В силу аналогии, которую мы установим ниже, будем называть фокальные поверхности конгруенции касательных изотропных линий геометрии 1-го рода *абсолютными поверхностями нормализации.*

§ 20. Нормализация, расслояемая в направлении 2-го рода

Если на нормализованной поверхности определяется квазиевклидова пара внутренних геометрий, то геометрия 1-го рода допускает существование ∞^1 полей абсолютно параллельных направлений. Фокусы лучей всех касающихся их конгруенций, проходящих через данную точку поверхности, лежат на нормали 2-го рода, а их фокальные плоскости проходят через нормаль 1-го рода. Отсюда следует, что пара нормализующих конгруенций расслояема в направлении нормали 2-го рода.

Итак: *для того чтобы пара внутренних геометрий была квазиевклидова, необходимо и достаточно, чтобы пара нормализующих конгруенций была расслояема в направлении нормали 2-го рода.* Если дана пара конгруенций, расслояемых в *двух направлениях*, то, нормализуя каждую из ∞^1 расслояющих поверхностей с помощью лучей этой пары, мы будем иметь нормализацию, расслояемую в направлениях нормали 1-го и 2-го рода. Сравнивая только что полученные результаты с результатами § 11, приходим к выводу: *пара конгруенций, расслояемая в двух направлениях, будучи принята за пару нормализующих конгруенций, определяет на каждой из расслояющих поверхностей квазиевклидову пару геометрий, средняя метрика которой — риманова* (или иначе *кодацциеву квазиевклидову пару*).

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда геометрия 1-го рода (например) допускает существование особенной геодезической сети. Так как она допускает в этом случае ∞^2 геодезических сетей с одинаковыми чебышевскими тензорами, то значит все эти геодезические сети имеют одну и ту же ассоциированную прямую. Однако ассоциированная прямая геодезической сети соединяет её фокусы и, следовательно, *конгруенция нормалей 1-го рода образует с конгруенцией рёбер Грина особенной геодезической сети пару, расслояемую в направлении этого ребра.* Если принять это ребро за нормаль 2-го рода, то каждая из особенных геодезических сетей обратится в декартову сеть, а геометрия 1-го рода, претерпев проективное преобразование, станет квазиевклидовой, что вполне согласуется с результатами § 5 А). Очевидно, и обратно, мы можем утверждать, что *геометрия 1-го рода, допускающая существование особенной геодезической сети* (*или иначе — отображающаяся проективно на квазиевклидову геометрию*), *характеризуется существованием конгруенции, лучи которой расположены в касатель-*

ных плоскостях поверхности и которые образуют пару, расслояемую в направлении этого луча с конгруенцией нормалей 1-го рода.

§ 21. Нормализация Лапласа

Предположим, что некоторая нормализация Грина сопровождается появлением минимальной пары сопряжённых внутренних геометрий.

В таком случае базис пары ортогонален в обеих внутренних метриках или, иными словами, изотропные их сети гармонически разделяются асимптотической сетью. Таким образом, сеть, прямые Грина которой приняты за нормали, — сопряжённая. Называя в этом случае нормализацию *лапласовой*, имеем: *пара внутренних геометрий будет минимальной для лапласовой нормализации и только для неё.*

Из основных свойств минимальной пары вспомним, что внутренние геометрии находятся в конформном соответствии, средняя метрика квазиевклидова, а за базис пары можно принять любую сеть некоторого пучка ортогональных сетей внутренних метрик. На поверхности, нормализованной прямыми Грина некоторой сопряжённой сети Σ, одним из базисов пары будет, очевидно, асимптотическая сеть, однако, в равной мере, за базис пары можно принять и всякую другую сеть, гармонически разделяющуюся с Σ и определяющую с асимптотической сетью постоянное ангармоническое отношение.

Воспользуемся теперь тем фактом, что все сети пучка ортогональных сетей имеют один и тот же чебышевский тензор. Отсюда следует, что все сети, могущие служить базисом пары внутренних геометрий лапласовой нормализации, имеют одни и те же ассоциированные прямые 1-го и 2-го рода, которые совпадают с ассоциированными прямыми асимптотической сети, т. е. полярами нормалей 1-го и 2-го рода.

На основании всего сказанного приходим к факту, не зависящему от нормализации.

Поляра Ли оси Грина некоторой сопряжённой сети Σ будет находиться в отношении R *) к этой оси	Ребро Грина некоторой сопряжённой сети Σ будет находиться в отношении R *) к своей поляре

относительно всякой сети из пучка сетей, гармонически разделяющих сеть Σ и образующих постоянное ангармоническое отношение с асимптотической сетью.

*) См. сноску на стр. 185.

В частности, среди сетей рассмотренного пучка существует единственная сеть, гармонически разделяющаяся с асимптотической сетью, т. е. сопряжённая сеть, гармонически разделяющаяся сопряжённой сетью. Отсюда: *разнородные прямые Грина двух сопряжённых сетей, разделяющихся гармонически, сопряжены относительно поверхности Ли.*

§ 22. Инварианты Лапласа

Предположим, что за нормаль 2-го рода принято ребро Грина сопряжённой сети Σ, а нормаль 1-го рода произвольна.

В таком случае по отношению к геометрии 1-го рода сеть будет чебышевской и если принять её за координатную, то будем иметь

$$G^1_{12} = G^2_{12} = 0.$$

Так как, вследствие сопряжённости координатных линий, кроме того,

$$b_{12} = 0,$$

то два из основных уравнений примут вид

$$\partial_2 y^\alpha_1 = l_2 y^\alpha_1 + p_{12} x^\alpha,$$

$$\partial_1 y^\alpha_2 = l_1 y^\alpha_2 + p_{21} x^\alpha.$$

Но

$$\partial_j y^\alpha_i = \partial^2_{ij} x^\alpha - l_i \partial_j x^\alpha - \partial_j l_i x^\alpha,$$

вследствие чего лапласово уравнение сети представляется в двух следующих видах:

$$\partial^2_{12} x^\alpha = l_2 \partial_1 x^\alpha + l_1 \partial_2 x^\alpha + (p_{12} + \partial_2 l_1 - l_1 l_2)\, x^\alpha,$$

$$\partial^2_{12} x^\alpha = l_2 \partial_1 x^\alpha + l_1 \partial_2 x^\alpha + (p_{21} + \partial_1 l_2 - l_1 l_2)\, x^\alpha.$$

Составим выражения инвариантов Лапласа-Дарбу для этого уравнения

$$k = \underset{1}{H} = p_{21} + \partial_1 l_2 - l_1 l_2 + l_1 l_2 - \partial_1 l_2 = p_{12};$$

$$h = \underset{2}{H} = p_{21}.$$

Рассмотрим теперь билинейную форму, заданную в произвольной системе координат, в которой данная сопряжённая сеть Σ определяется тензором a_{rs}:

$$H_{kl}\, du^k \delta u^l = \frac{1}{2}\left[\tilde{a}^{rs} p_{rs} a_{kl} + p_{[kl]}\right] du^k \delta u^l. \tag{1.22}$$

Возвратившись к системе координат, линии которой совпадают с линиями сети, будем иметь:

$$a_{11}=a_{22}=\tilde{a}^{11}=\tilde{a}^{22}=0;\quad \tilde{a}^{12}=\frac{1}{a_{12}},$$

откуда

$$H_{12}=\frac{1}{2}\left(p_{12}+p_{21}+p_{12}-p_{21}\right)=p_{12}=k=\underset{1}{H};$$

$$H_{11}=H_{22}=0;$$

$$H_{21}=\frac{1}{2}\left(\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\right)=p_{21}=h=\underset{2}{H}.$$

Итак, для введённой билинейной формы будем иметь:

$$H_{kl}du^k\,\delta u^l=k\,du\,\delta v+h\,dv\,\delta u,$$

где h и k — инварианты сети, а $k\,du\,\delta v$ и $h\,dv\,\delta u$ есть абсолютные инварианты перенормирования и замены параметров *).

Будем называть введённую билинейную форму *первой инвариантной формой сети*, заметив, что в приведённом виде *она не зависит от выбора нормали* 1*-го рода*.

Чтобы получить её в виде, не зависящем от выбора нормали 2-го рода, предположим, что нормализация 2-го рода тоже произвольна. Тогда ребро Грина сети определяется её чебышевским тензором 1-го рода t_i. Возвратимся к нормали 2-го рода, совпадающей с этим ребром Грина, что будет сопровождаться проективным преобразованием геометрии 1-го рода, причём тензор этого преобразования

$$p_i=t_i,$$

тензор p_{ij} заменится при этом по формуле (6.8) или для данного случая:

$$'p_{ij}=p_{ij}+\nabla_j t_i-t_i t_j,$$

где $'p_{ij}$ соответствует специальной нормали 2-го рода, а p_{ij} — общему случаю.

Отсюда:

$$H_{kl}=\frac{1}{2}\left\{\tilde{a}^{rs}\,'p_{rs}a_{kl}+{}'p_{[kl]}\right\}=\left\{\tilde{a}^{rs}(p_{rs}+\nabla_s t_r-t_r t_s)+p_{[kl]}+\nabla_{[l}t_{s]}\right\}.$$

---

*) F. — Č. J., § 51, стр. 149.

Таким образом: если a_{rs} — тензор сопряжённой сети, а

t_i — её чебышевский тензор 1-го рода, то билинейная форма с коэффициентами

$$H_{kl} = \frac{1}{2}\{\tilde{a}^{rs}(p_{rs} + \nabla_s t_r - t_r t_s) a_{kl} + p_{[kl]} + \nabla_{[l} t_{k]}\}$$

не зависит от нормализации; это есть инвариантная форма 1-го рода.

Если принять сеть a_{ij} за координатную, то

$$H_{12} = \underset{1}{H} = k; \quad H_{21} = \underset{2}{H} = h,$$

где $\underset{1}{H}$ и $\underset{2}{H}$ — точечные инварианты Лапласа данной сети.

τ_i — её чебышевский тензор 2-го рода, то билинейная форма с коэффициентами

$$\mathrm{X}_{kl} = \frac{1}{2}\{\tilde{a}^{rs}(\pi_{rs} + \nabla_s \tau_{(r)} - \tau_r \tau_s) a_{kl} + \pi_{[kl]} + \nabla_{[l} \tau_{k]}\} \quad (2.22)$$

не зависит от нормализации; это есть инвариантная форма 2-го рода.

Если принять сеть a_{ij} за координатную, то

$$\mathrm{X}_{12} = \underset{1}{\mathrm{X}}; \quad \mathrm{X}_{21} = \underset{2}{\mathrm{X}}, \quad (3.22)$$

где $\underset{1}{\mathrm{X}}$ и $\underset{2}{\mathrm{X}}$ — тангенциальные инварианты Лапласа данной сети.

Отметим некоторые комбинации инвариантов, которые выражаются через величины, зависящие только от внутренних геометрий, и которые поэтому будем называть *внутренними инвариантами* *).

Прежде всего, применяя формулу (18.10), согласно которой

$$-8p_{[kl]} = 3R_{[kl]} + \rho_{[kl]} \qquad \Bigg| \qquad -8\pi_{[kl]} = 3\rho_{[kl]} + R_{[kl]},$$

получим для антисимметрических частей тензоров H_{kl} и X_{kl}:

$$H_{[kl]} = \nabla_{[l} t_{k]} + \frac{1}{8}\{3R_{[kl]} + \rho_{[kl]}\} \qquad \Bigg| \qquad \mathrm{X}_{[kl]} = \nabla_{[l} \tau_{k]} + \frac{1}{8}\{3\rho_{[kl]} + R_{[kl]}\}. \quad (4.22)$$

Иными словами, *разности однородных инвариантов сети*

$$\underset{2}{H} - \underset{1}{H} = D \qquad \Bigg| \qquad \underset{2}{\mathrm{X}} - \underset{1}{\mathrm{X}} = \Delta \quad (5.22)$$

зависят только от внутренних геометрий.

Образуем ещё инвариантную форму

$$\Omega_{kl} = \mathrm{X}_{kl} - H_{kl}. \quad (6.22)$$

*) Ниже будет показано, что внутренние инварианты не изменяются при проективном изгибании поверхности.

Применив формулу (16.10), будем иметь:

$$\tilde{a}^{rs}(\pi_{rs} - p_{rs}) = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rs}(\rho_{rs} - R_{rs}).$$

С другой стороны, вводя обозначение

$$\sigma_i = \tau_i - t_i \tag{7.22}$$

и применяя (7.5), получаем:

$$\sigma_i = -\frac{1}{2}\tilde{a}^{rs}\ S^k_{rs}\, a_{ki}. \tag{8.22}$$

Кроме того,

$$\nabla_r \tau_{(s)} = \overset{0}{\nabla}_r \tau_{(s)} - \frac{1}{2} S^k_{rs}\tau_k,\ \nabla_s t_s = \overset{0}{\nabla}_r t_s + \frac{1}{2} S^k_{rs}\, t_k,$$

откуда

$$\tilde{a}^{rs}\ (\nabla_r \tau_{(s)} - \nabla_r t_s) = \tilde{a}^{rs}\overset{0}{\nabla}_r \sigma_s - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rs}\ S^k_{rs}(\tau_k + t_k) =$$

$$= \tilde{a}^{rs}\overset{0}{\nabla}_r \sigma_s + \tilde{a}^{rs}(\tau_r - t_r)\ (\tau_s + t_s) = \tilde{a}^{rs}(\overset{0}{\nabla}_r \sigma_s + \tau_r \tau_s - t_r t_s)$$

и, наконец,

$$\tilde{a}^{rs}(\nabla_r \tau_{(s)} - \nabla_r t_s - \tau_r \tau_s + t_r t_s) = \tilde{a}^{rs}\overset{0}{\nabla}_r \sigma_s,$$

откуда окончательно

$$\Omega_{kl} = \frac{1}{4}\left\{\tilde{a}^{rs}(\rho_{rs} - R_{rs} + 2\overset{0}{\nabla}_r \sigma_s)\, a_{kl} + R_{[kl]} - \rho_{[kl]} + 2\nabla_{[l}\sigma_{k]}\right\}. \tag{9.22}$$

Другими словами, *разности соответствующих разнородных инвариантов*

$$\underset{1}{X} - \underset{1}{H} = \underset{1}{\delta} \qquad \Big| \qquad \underset{2}{X} - \underset{2}{H} = \underset{2}{\delta} \tag{10.22}$$

зависят только от внутренних геометрий. Четыре введённые нами инварианта D, Δ, $\underset{1}{\delta}$ и $\underset{2}{\delta}$ будем называть *внутренними инвариантами сети.* Они не являются независимыми, так как

$$\Delta - D = \underset{2}{\delta} - \underset{1}{\delta}, \tag{11.22}$$

вследствие чего все инварианты $\underset{1}{H}$, $\underset{2}{H}$, $\underset{1}{X}$ и $\underset{2}{X}$ не могут быть выражены через них.

Найдём выражения для коэффициентов Ω_{kl} в асимптотической системе координат, причём для простоты вычислений предположим, что произведена нормализация Ли. Уравнение нашей сопряжённой сети мы можем, не нарушая общности, предположить заданным в форме

$$e^{\rho}du^2 + e^{-\rho}dv^2 = 0. \tag{12.22}$$

Тогда согласно (8.22), а также в силу равенства $T_i = 0$ получим, пользуясь (40.3),

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\tilde{a}^{22}\, S^{1}_{22}\, a_{11} = e^{2\rho}\gamma$$

или

$$\sigma_1 = e^{2\rho}\gamma; \quad \sigma_2 = e^{-2\rho}\beta. \tag{13.22}$$

Отсюда уже находится антисимметричная часть

$$\Omega_{[kl]} = \frac{1}{2}(R_{[kl]} - \rho_{[kl]}) + \nabla_{[l}\sigma_{k]}. \tag{14.22}$$

Так как вследствие (38.3) $R_{[kl]} - \rho_{[kl]} = 0$, то

$$\Omega_{[12]} = \partial_2(e^{2\rho}\gamma) - \partial_1(e^{-2\rho}\beta), \tag{15.22}$$

и это выражение справедливо для любой нормализации, так как β и γ не изменяются при составном преобразовании, сопровождающем перемену нормализации.

Симметричная часть Ω_{ij}

$$\Omega_{(ij)} = \frac{1}{2}Aa_{ij}, \tag{16.22}$$

где

$$A = \tilde{a}^{rs}(\rho_{rs} - R_{rs} + 2\overset{0}{\nabla}_r\sigma_s),$$

откуда

$$A = e^{-\rho}(\rho_{11} - R_{11} + 2\overset{0}{\nabla}_1\sigma_1) + e^{\rho}(\rho_{22} - R_{22} + 2\overset{0}{\nabla}_2\sigma_2).$$

Но

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\nabla}_1\sigma_1 &= \partial_1\sigma_1 - \varphi\sigma_1 = e^{2\rho}(\partial_1\gamma + 2\partial_1\rho\gamma - \varphi\gamma);\\
\overset{0}{\nabla}_2\sigma_2 &= \partial_2\sigma_2 - \psi\sigma_2 = e^{-2\rho}(\partial_2\beta - 2\partial_2\rho\beta - \psi\beta);\\
\rho_{11} - R_{11} &= -2R_{11} = 2(\partial_2\beta + \psi\beta);\\
\rho_{22} - R_{22} &= -2R_{22} = 2(\partial_1\gamma + \varphi\gamma),
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A = e^{-\rho}[\partial_2\beta + \psi\beta + e^{2\rho}(\partial_1\gamma + 2\partial_1\beta\gamma - \varphi\gamma)] +\\
+ e^{\rho}[\partial_1\gamma + \varphi\gamma + e^{-2\rho}(\partial_2\beta - 2\partial_2\rho\beta - \psi\beta)] =\\
= 2[e^{\rho}(\partial_1\gamma + \partial_1\rho\gamma) + e^{-\rho}(\partial_2\beta - \partial_2\rho\beta)]
\end{aligned}$$

или окончательно

$$A = 4[\partial_1(e^{\rho}\gamma) + \partial_2(e^{-\rho}\beta)]. \tag{17.22}$$

Перейдём теперь к рассмотрению специальных сопряжённых сетей.

А. Сети равных инвариантов. Предположим, что конгруенция рёбер Грина сопряжённой сети гармонична поверхности. Приняв её за нормаль 2-го рода, будем иметь:

$$t_k = 0; \quad p_{[ij]} = 0,$$

откуда

$$H_{kl} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rs} p_{rs} a_{kl},$$

так что тензор H_{kl} симметричен. Обратно, его симметрия влечёт за собой в той же нормализации симметрию p_{ij}, откуда следует требуемая гармоничность. Итак:

Для того чтобы конгруенция рёбер Грина сопряжённой сети была гармонична поверхности, необходимо и достаточно, чтобы это была сеть равных точечных инвариантов *).

Признак этой сети будет

$$H_{[kl]} = 0; \quad D = \underset{2}{H} - \underset{1}{H} = 0$$

или

$$\nabla_{[l} t_{k]} = p_{[lk]},$$

или

$$8\nabla_{[k} t_{l]} = 3R_{[kl]} + p_{[kl]}.$$

Для того чтобы конгруенция осей Грина сопряжённой сети была сопряжена поверхности, необходимо и достаточно, чтобы это была сеть равных тангенциальных инвариантов *).

Признак этой сети

$$X_{[kl]} = 0, \quad \Delta = \underset{2}{X} - \underset{1}{X} = 0,$$

или

$$\nabla_{[l} \tau_{k]} = \pi_{[kl]}, \qquad (18.22)$$

или

$$8\nabla_{[k} t_{l]} = 3p_{[kl]} + R_{[kl]}.$$

Равенство точечных и тангенциальных инвариантов зависит только от внутренних геометрий.

В. Изотермически сопряжённая сеть характеризуется тем, что конгруенция одной из её средних прямых Грина сопряжена, а другая гармонична поверхности. Приняв эти прямые за нормали, получим аналитическую нормализацию Ли, причём данная сеть будет декартовой сетью средней метрики. Отсюда в этой нормализации

$$p_{[ij]} = \pi_{[ij]} = 0; \quad 2\theta_i = t_i + \tau_i = 0.$$

Поэтому

$$H_{[kl]} + X_{[kl]} = p_{[kl]} + \pi_{[kl]} + \nabla_{[l} t_{k]} + \nabla_{[l} \tau_{k]} = 0.$$

Это условие является достаточным, так как в той же нормализации $t_i = \tau_i = 0$, откуда $p_{[ij]} + \pi_{[ij]} = 0$, однако в любой нормализации Ли имеем, вследствие (17.10) и (38.3), $p_{[ij]} - \pi_{[ij]} = 0$, откуда $p_{[ij]} = \pi_{[ij]} = 0$. Итак, *для того чтобы сеть была изотермически сопряжённой, необходимо и достаточно, чтобы сумма её инвариантных форм была симметрична*:

$$H_{[kl]} + X_{[kl]} = 0 \qquad (19a.22)$$

*) F.—Č. G., стр. 178, 179.

или чтобы разности её точечных и её тангенциальных инвариантов отличались только знаком

$$\underset{1}{X} - \underset{2}{X} = -(\underset{1}{H} - \underset{2}{H}) \tag{19b.22}$$

или

$$D + \Delta = 0. \tag{19c.22}$$

Тому же признаку можно придать другой вид, пользуясь (13.10),

$$\nabla_{[i}\theta_{j]} = K_{[ij]}. \tag{19d.22}$$

Таким образом, *факт изотермической сопряжённости зависит только от внутренней геометрии.*

Заметим, кстати, что, приняв прямые Грина сопряжённой сети за нормали, мы будем иметь совпадение средних нормалей с её средними прямыми. Поэтому, в силу основного свойста изотермических сетей, средняя метрика соответствующей минимальной пары будет римановой и одновременно квазиевклидовой, т. е. евклидовой.

Итак: *для того чтобы на поверхности определялась минимальная пара геометрий со средней евклидовой метрикой, необходимо и достаточно, чтобы нормали совпадали с прямыми Грина изотермически сопряжённой сети.*

C. Сеть Jonas'a. Для того чтобы конгруенция осей Грина сопряжённой сети была сопряжена поверхности, а конгруенция рёбер Грина этой же сети была ей гармонична, необходимо и достаточно, чтобы сеть имела одновременно равные точечные и тангенциальные инварианты. Такая сеть называется сетью Jonas'a *).

Приняв прямые Грина сети Jonas'a за нормали, мы получим аналитическую лапласову нормализацию. Вследствие очевидности обратного положения имеем: *для того чтобы на поверхности определялась минимальная пара римановых геометрий, необходимо и достаточно, чтобы нормали совпадали с прямыми Грина сети Jonas'a.*

Так как средняя метрика римановой пары сопряжённых геометрий тоже риманова, то, согласно разделу C этого параграфа, имеем: *сеть Jonas'a есть изотермически сопряжённая сеть* *).

Больше того, так как признаками сети Jonas'a являются:

a) равенство точечных инвариантов $D = 0$,

b) равенство тангенциальных инвариантов $\Delta = 0$,

c) изотермическая сопряжённость сети $D + \Delta = 0$,

то если два из этих трёх положений верны для сети, эта сеть есть сеть Jonas'a и для неё верно и третье.

---

*) F. — C. G., § 17, стр. 106.

Вычитая одно из другого условия (18.22), которые одновременно имеют место для сети Jonas'a, характеризуем её как *такую изотермически сопряжённую сеть, для которой тензор Ω_{ij} внутренней инвариантной формы симметричен*

$$\Omega_{[ij]} = 0. \tag{20.22}$$

Перейдя к асимптотической системе координат и приняв во внимание, что для изотермически сопряжённой сети можно положить

$$e^{\rho} = e^{-\rho} = 1,$$

получаем из (15.22)

$$\partial_2 \gamma = \partial_1 \beta. \tag{21.22}$$

Так как величины β и γ не зависят от нормализации, а характеризуют поверхность, *то сети Jonas'a существуют только на поверхностях особого класса, которые носят название поверхностей Jonas'a* *).

D. Расслояющие сети. Будем называть сопряжённую сеть *расслояющей*, если пара её конгруенций расслояема в направлении ребра. Если принять её прямые Грина за нормали, то в силу результатов § 20 имеем: *для того чтобы на поверхности определялась минимальная пара квазиевклидовых геометрий, необходимо и достаточно, чтобы нормали совпадали с прямыми Грина некоторой сопряжённой расслояющей сети.*

При такой нормализации будем иметь:

$$\rho_{[ij]} = R_{[ij]} = 0; \quad t_i = \tau_i = \sigma_i = 0,$$

откуда

$$4A = \tilde{a}^{rs}(\rho_{rs} - R_{rs} + 2\overset{0}{\nabla}_r \sigma_s) = 0.$$

Обратно, если это условие выполнено для лапласовой нормализации данной сети, то, в силу $\sigma_i = 0$, будем иметь:

$$\tilde{a}^{rs}(\rho_{rs} - R_{rs}) = 0,$$

но тензор a_{ij} есть тензор изотропной сети соответствующей минимальной пары, вследствие чего

$$\rho_{ij} = \lambda a_{ij}; \quad \rho_{(ij)} = \mu a_{ij}$$

и из приведённого условия следует, что $\lambda = \mu$. С другой стороны, из равенства (33.3)

$$\rho_{(ij)} + R_{(ij)} = 2Hb_{ij},$$

откуда

$$\lambda a_{ij} = Hb_{ij},$$

*) См. сноску на предыдущей стр.

что возможно только в случае $\lambda = 0$ в силу сопряжённости a_{ij}. Поэтому

$$R_{(ij)} = \rho_{(ij)} = 0.$$

Итак: *расслояющая сеть характеризуется в любой нормализации антисимметрией тензора внутренней билинейной формы*

$$\Omega_{(ij)} = 0 \tag{22a.22}$$

или

$$A = \tilde{a}^{rs}(\rho_{rs} - R_{rs} - 2\overset{0}{\nabla}_r\sigma_s) = 0. \tag{22b.22}$$

То же самое может быть выражено через внутренние инварианты в виде

$$\underset{1}{\delta} + \underset{2}{\delta} = 0 \tag{22c.22}$$

или через инварианты Лапласа

$$\underset{1}{X} + \underset{2}{X} = \underset{1}{H} + \underset{2}{H}. \tag{22d.22}$$

Итак: *расслояющая сеть характеризуется равенством суммы точечных и суммы тангенциальных инвариантов.* Свойство сети быть расслояющей зависит только от внутренней геометрии.

В асимптотической системе координат определяющая её функция ρ должна удовлетворять уравнению, которое мы получаем из (17.22)

$$\partial_1(e^{\rho}\gamma) + \partial_2(e^{-\rho}\beta) = 0. \tag{23.22}$$

Таким образом *на всякой поверхности существует бесконечное множество расслояющих сетей, совокупность которых зависит от одной произвольной функции одного аргумента.*

В частности, если поверхность линейчатая, то, например,

$$\gamma = 0.$$

В таком случае

$$e^{-\rho}\beta = U,$$

где U — произвольная функция. Итак: *параметры асимптотических линий линейчатой поверхности можно всегда подобрать так, чтобы уравнение любой расслояющей сети имело вид:*

$$\beta^2 du^2 + dv^2 = 0. \tag{24.22}$$

Е. Сеть R. *Сеть R* есть изотермическая и расслояющая одновременно. Её инвариантную характеристику получим, сравнив признаки

$$D + \Delta = 0; \quad \underset{1}{\delta} + \underset{2}{\delta} = 0, \tag{25a.22}$$

откуда

$$\underset{1}{H} = \underset{2}{X}; \quad \underset{2}{H} = \underset{1}{X} \ ^{*)}. \qquad (25b.22)$$

Итак: *для сети R характерно равенство не соответствующих точечных и тангенциальных инвариантов.*

Осуществление на поверхности минимальной квазиевклидовой пары с евклидовой средней метрикой возможно тогда и только тогда, если нормали совпадают с прямыми Грина сети R.

В асимптотической системе координат, приняв во внимание, что сеть изотермическая, получим из (23.22)

$$\partial_1 \gamma = \partial_2 \beta, \qquad (26.22)$$

так что *сети R существуют только на поверхностях особого класса, которые называются поверхностями R* **).

Окончание статьи будет помещено в следующем выпуске «Трудов семинара».

*) Lane, § 31, стр. 146.
**) Lane, § 43, стр. 210.