О ВНУТРЕННИХ ГЕОМЕТРИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

(*Окончание*) *)

А. П. Норден

§ 23. Поверхность 2-го порядка

Если пара внутренних геометрий геодезическая, то асимптотические линии геодезические, т. е. прямые линии. Таким образом, в этом случае нормализованная поверхность допускает существование двух систем прямолинейных образующих и есть поверхность 2-го порядка. Обратно, всякая нормализация этой поверхности сопровождается появлением геодезической пары внутренних геометрий.

Итак: *нормализованная поверхность 2-го порядка характеризуется тем, что на ней определяется геодезическая пара внутренних геометрий.*

Самосопряжённая пара геометрий, являясь частным случаем геодезической пары, может быть осуществлена тоже только на поверхности 2-го порядка. С другой стороны, самосопряжённая пара будет чебышевской, вследствие чего соответствующие нормали 1-го и 2-го рода сопряжены относительно поверхности Ли, которая совпадает в случае поверхности 2-го порядка с ней самой.

Итак: *если самосопряжённая пара является парой внутренних геометрий, то нормализованная поверхность есть поверхность 2-го порядка, нормализованная прямыми, сопряжёнными полярно относительно этой поверхности.* Действительно, прямолинейная образующая есть линия изотропного направления внутренних метрик. Точку её пересечения с нормалью 2-го рода и следует считать точкой абсолютной поверхности. Предположим теперь, что некоторая нормализация определяет на нашей поверхности самосопряжённую квазиевклидову пару. Но всякая такая пара — минимальная (см. § 4) и, значит, нормали совпадают с прямыми Грина некоторой сопряжённой сети. Обратно, если на поверхности 2-го порядка осуществлена лапласова нормализация, то соответствующая минимальная пара, будучи геодезической, будет и самосопряжённой.

---

*) Начало настоящей статьи помещено в VI томе «Трудов семинара по векторному и тензорному анализу». М. — Л., 1948 г., стр. 125—224.

Итак: *для того чтобы пара внутренних геометрий была самосопряжённой и квазиевклидовой, необходимо и достаточно, чтобы нормализованная поверхность была поверхностью 2-го порядка, а нормали совпадали с прямыми Грина некоторой её сопряжённой сети.*

Полученные результаты позволяют отметить следующие факты, не зависящие от нормализации.

1. *Ось и ребро Грина всякой сопряжённой сети на поверхности 2-го порядка сопряжены относительно неё полярно.*

2. *Если ось и ребро Грина некоторой сопряжённой сети сопряжены относительно поверхности Ли, то эта сеть лежит на поверхности 2-го порядка.* Действительно, приняв их за нормали, получим минимальную чебышевскую пару, которая является самосопряжённой.

3. *Все сети поверхности 2-го порядка, принадлежащие одному пучку сопряжённых сетей, имеют общие прямые Грина.* Действительно, вследствие их полярной сопряжённости они совпадают со средними прямыми Грина, которые будут общими у всех сетей пучка.

4. *Существование пучка сопряжённых сетей с общими прямыми Грина характеризует поверхность 2-го порядка.* Действительно, приняв их за нормали, мы получим ∞^2 декартовых сетей, общих обеим метрикам, вследствие чего геометрия будет самосопряжённой.

5. *Любая сопряжённая сеть поверхности 2-го порядка будет расслояющей,* так как минимальная пара соответствующей нормализации будет квазиевклидовой.

Если конгруенция сопряжена (или гармонична) поверхности 2-го порядка, то полярная ей конгруенция гармонична (или сопряжена) этой же поверхности в силу самого полярного их соответствия (см. § 13). Приняв такие две конгруенции за нормализующие, получим аналитическую нормализацию, определяющую на поверхности самосопряжённую и эквиаффинную геометрию, которая, следовательно, будет римановой.

Итак: *самосопряжённая риманова пара есть внутренняя геометрия поверхности 2-го порядка, нормализованной двумя взаимно полярными конгруенциями, из которых одна сопряжена (или гармонична) поверхности.*

Самосопряжённая евклидова пара получается в результате лапласовой нормализации поверхности 2-го порядка. Средняя геометрия, совпадая с обеими геометриями 1-го и 2-го рода, будет тоже евклидовой, а это возможно тогда и только тогда, если сеть изотермически сопряжённая.

Итак: *евклидова самосопряжённая пара может быть парой внутренних геометрий тогда и только тогда, если она получена на поверхности 2-го порядка, нормализованной прямыми Грина изотермически сопряжённой сети этой поверхности.*

Вследствие этого *изотермически сопряжённая сеть поверхности 2-го порядка характеризуется тем, что её прямые Грина обра-*

зуют конгруенции, одна из которых сопряжена, а другая гармонична поверхности.

Всякая изотермически сопряжённая сеть поверхности 2-го порядка будет сетью R, так как она расслояющая, как и всякая другая, сопряжённая сеть.

Нормализуем некоторую область S_1 поверхности 2-го порядка парой взаимно полярных конгруенций. Если M_1 есть точка этой области, то нормаль 1-го рода, проходящая через точку M_1, встречает поверхность ещё в другой точке M_2, принадлежащей области S_2, которую тоже можно считать нормализованной, так как касательные плоскости в M_1 и M_2 пересекаются по нормали 2-го рода. Отсюда следует, что *всякую полярную нормализацию поверхности 2-го порядка можно считать нормализацией, определяемой парой поверхностей S_1 и S_2.*

Так как обе геометрии, определяемые полярной нормализацией, совпадают со средней метрикой, а эквиаффинность последней характеризует в случае пары поверхностей расслояемость 1-го рода, то: *для того чтобы полярная нормализация поверхности 2-го порядка была расслояема в направлении нормали 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы она была аналитической.*

Так как обе области S_1 и S_2 входят в число расслояющих поверхностей, то риманова самосопряжённая геометрия должна определиться в обеих сразу, если она определилась в одной.

Таким же образом, если в одной из них определилась квазиевклидова геометрия, то она определится и в другой, так как факт расслояемости 2-го рода не зависит от вида нормализованной поверхности.

В силу обоих последних результатов и евклидовы геометрии должны возникать одновременно в обеих нормализованных областях.

Всякой области S_1 поверхности 2-го порядка, нормализованной полярно, соответствуют ещё две области S' и S'', образованные точками M' и M'', в которых она встречается с нормалью 2-го рода. Рассмотрим одну из них, например, S', и примем нормаль 2-го рода $M'M''$ за нормаль 1-го рода, а нормаль 1-го рода M_1M_2 — за новую нормаль 2-го рода, что возможно, так как она лежит в касательной плоскости точки M'.

В связи с этой возможностью будем говорить о двух дополнительных нормализациях поверхности 2-го порядка. Предположим, что данная нормализация аналитическая. Тогда пара нормализующих конгруенций будет расслояема в направлении нормали 1-го рода, вследствие чего дополнительная нормализация будет тоже расслояема в направлении нормали 2-го рода и, следовательно, определит на поверхности квазиевклидову геометрию. Очевидно, что обратная зависимость тоже существует.

Итак: *для того чтобы некоторая нормализация определяла на поверхности 2-го порядка риманову самосопряжённую геомет-*

рию, необходимо и достаточно, чтобы дополнительная нормализация определяла на ней самосопряжённую квазиевклидову геометрию.

Отсюда сейчас же следует, что *если нормализация определяет самосопряжённую евклидову геометрию, то и дополнительная нормализация определяет самосопряжённую евклидову геометрию.*

Те же факты могут быть сформулированы и независимо от нормализации.

1. *Для того чтобы конгруенция была сопряжена поверхности 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы полярная ей конгруенция была образована осями Грина некоторой сопряжённой сети.*

2. Так как ось и ребро Грина сопряжённой сети на поверхности 2-го порядка сопряжены полярно, то, следовательно: *для того чтобы луч конгруенции мог служить ребром Грина некоторой сопряжённой сети поверхности 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы конгруенция была сопряжена этой поверхности.*

3. *Ребро Грина изотермически сопряжённой сети поверхности 2-го порядка служит осью Грина другой тоже изотермически сопряжённой сети.*

§ 24. Полярная нормализация

Будем называть нормализацию каждой из двух поверхностей S и Σ, полученных друг из друга полярным преобразованием относительно некоторой поверхности 2-го порядка Q,— *полярной*, если нормаль 1-го рода соединяет их соответственные точки, а нормаль 2-го рода лежит на пересечении их соответственных касательных плоскостей.

Нормали 1-го и 2-го рода полярной нормализации могут служить нормализующими прямыми и для поверхности Q, так как они, очевидно, сопряжены относительно неё полярно. Вследствие этого мы имеем три поверхности, находящиеся в одной и той же нормализации, вследствие чего (§ 11) мы имеем и ∞^1 таких поверхностей. Итак: *полярная нормализация расслояема в направлении нормали 1-го рода.*

Но этот факт может иметь место только в том случае, если конгруенции нормалей сопряжены и гармоничны Q (§ 23), а в таком случае они сопряжены и гармоничны и любой поверхности, находящейся с нею в паре (§ 12). Таким образом: *полярная нормализация есть аналитическая нормализация.*

Как и для всякой аналитической нормализации, расслояемой в направлении нормали 1-го рода, *мы имеем совпадение линий кривизны 1-го и 2-го рода на всякой поверхности, находящейся в полярной нормализации.*

Рассмотрим конгруенции прямых, касающихся одновременно поверхности S, находящейся в полярной нормализации, и поверхности Q. Через каждую точку M первой из них проходят лучи двух таких конгруенций MM_1 и MM_2, касающихся Q в точках M_1 и M_2 кривой 2-го порядка, пересечения Q и касательной плоскости. При этом прямая M_1M_2, очевидно, будет нормалью 2-го рода. Касательные плоскости Q в точках M_1 и M_2 будут фокальными плоскостями рассматриваемых конгруенций и пересекутся по прямой, полярной прямой M_1M_2, т. е. по нормали 2-го рода. Отсюда следует, что *полярная нормализация есть нормализация Грина*, причём нормали 1-го и 2-го рода совпадают с прямыми Грина той сети нормализованной поверхности, касательные к линиям которой касаются и поверхности 2-го порядка.

Сопоставив то, что полярная нормализация является одновременно и аналитической и нормализацией Грина, вследствие чего пара внутренних геометрий должна быть и эквиаффинной и вейлевой, приходим к заключению: *пара внутренних геометрий, соответствующая полярной нормализации, риманова*. При этом прямые, касающиеся изотропных линий геометрии 1-го рода, касаются и поверхности Q.

Вследствие линейности основных уравнений (21.6) они переходят друг в друга при коррелятивном преобразовании поверхности. Поэтому: *геометрия 2-го рода поверхности S, нормализованной полярно, совпадает с геометрией 1-го рода поверхности Σ, полученной из S полярным преобразованием относительно поверхности Q, с помощью которой установлена нормализация.*

Предположим теперь, что в проективном пространстве установлена неевклидова метрика с помощью абсолютной поверхности 2-го порядка Q_A. Неевклидова нормаль некоторой поверхности S, заданной в этом пространстве, должна проходить через её точку и быть перпендикулярной касательной плоскости. Но это будет иметь место в том и только в том случае, если она проходит через полюс этой касательной плоскости, полученной относительно абсолюта. Отсюда сейчас же вытекает, что *неевклидова нормаль поверхности S совпадает с её нормалью 1-го рода в полярной нормализации, полученной с помощью абсолюта.*

Метрика внешнего пространства определяет на поверхности S риманову геометрию, основная квадратичная форма которой даёт квадрат неевклидова расстояния между двумя бесконечно близкими точками поверхности.

Легко видеть, что геодезические линии этой метрики характеризуются тем, что их соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль, а прямые, касающиеся её изотропных линий, должны касаться абсолюта, так как только на таких прямых неевклидово расстояние между различными точками обращается в нуль.

Сравним эту геометрию с геометрией 1-го рода поверхности S, определяемой полярной нормализацией поверхности S относительно абсолюта. Вследствие совпадения неевклидовой нормали с нормалью 1-го рода обе геометрии имеют общие геодезические линии; с другой стороны, очевидно, что и изотропные их сети совпадают.

Таким образом, обе эти геометрии находятся одновременно и в геодезическом и в конформном соответствии и поэтому *) определяют одно и то же параллельное перенесение. Иначе говоря, *мы всегда можем ввести такой основной тензор в геометрии 1-го рода, определяемой полярной нормализацией поверхности S относительно абсолюта, что он совпадет с основным тензором метрики, индуцируемой на поверхности метрикой внешнего пространства.*

В силу полной двойственности, таким же образом убеждаемся и в том, что *метрика 2-го рода полярной нормализации поверхности S относительно абсолюта совпадает с «угловой метрикой», определяемой Бианки* **) *для поверхности неевклидова пространства.*

Полученные результаты позволяют утверждать, что геометрия поверхностей неевклидова пространства совпадает с геометрией поверхностей, находящихся в полярной нормализации. Чтобы использовать этот факт, приведём сравнение основных уравнений нашей теории (21.6) и уравнений (E) § 481 и (E′) § 482 у Бианки ***). Приходим к следующим сопоставлениям в случае пространства трёх измерений (слева наши обозначения, справа обозначения Бианки):

$$g_{11}=aE;\quad g_{12}=aF;\quad g_{22}=aG,$$
$$b_{11}=bD;\quad b_{12}=bD';\quad b_{22}=bD'',$$

где g_{ij} — основной тензор метрики 1-го рода, b_{ij} — основной тензор сопряжённой пары обеих внутренних геометрий, а a, b — постоянные, зависящие от нормирования величин левой части.

Бианки показывает, что задание величин E, F, G и D, D', D'' определяет поверхность, если выполнены условия интегрируемости (VII) и (VIII) § 484. Первое из них есть уравнение Кодацци, которому должен удовлетворять тензор D, D', D'', а второе, аналогичное условию Гаусса классической теории поверхностей, имеет вид:

$$\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}=k-k_0, \tag{*}$$

где k есть кривизна формы E, F, G, а k_0 — кривизна пространства. Первое из этих условий выполнено и для нашего тензора b_{ij} вследствие того, что он является основным тензором кодацциевой пары сопряжённых перенесений, второе же преобразуем, приняв во внимание, что пара внутренних геометрий — риманова.

---

*) J. A. Schouten, Der Ricci-Calcul, Berlin, 1924 г. (в дальнейшем, как и в первой части настоящей работы, эта книга цитируется как R. C.), гл. V, § 1.

**) Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale, т. II, Bologna, 1924 г. (в дальнейшем эта книга цитируется просто как *Bianchi*), § 484.

***) Bianchi, т. II, §§ 481—482.

Вследствие того что в силу формулы (8.4) кривизны двух сопряжённых римановых перенесений обратно пропорциональны соответствующим бесконечно малым площадям, будем иметь:

$$\frac{k}{\varkappa}=c_1\sqrt{\frac{\gamma}{g}},$$

где g и γ есть дискриминанты основных тензоров 1-го и 2-го рода. С другой стороны, формула (6.4), справедливая для всякой эквиаффинной пары, даёт нам

$$\sqrt{g\gamma}=c_2 b,$$

где b — дискриминант тензора b_{ij}. Отсюда

$$\frac{k}{\varkappa}=c_3\frac{b}{g},$$

и формула (*) приобретает вид:

$$\frac{k}{\varkappa}=c_3(k-k_0),$$

откуда

$$\frac{A}{k}+\frac{B}{\varkappa}=1, \tag{1.24}$$

где A и B — постоянные.

Так как постоянным A и B могут быть приданы любые значения путём соответствующего нормирования тензоров g_{ij}, γ_{ij} и b_{ij}, то (1) равносильно условию (*), и мы приходим к следующему результату.

Для того чтобы две сопряжённые римановы геометрии могли служить внутренними геометриями поверхности, нормализованной полярно, необходимо и достаточно, чтобы кривизны этих геометрий были связаны соотношением (1).

Продолжая рассмотрение неевклидовых пространств, приведём несколько положений, относящихся к теории прямолинейных конгруенций и поверхностей. Всякую прямолинейную конгруенцию мы можем преобразовать полярно относительно абсолюта, получив таким образом новую конгруенцию, которую назовём просто *полярной* данной. Приняв луч данной конгруенции за нормаль 1-го рода, а луч полярной, конгруенции за нормаль 2-го рода, нормализуем абсолют в двух областях встречи с ним лучей конгруенции. Нормализация эта будет полярной, вследствие чего *всякой прямолинейной конгруенции неевклидова пространства соответствуют две геометрии Вейля, каждая из которых связана с одной из возможных ориентаций на лучах конгруенции*. Будем говорить, что эти геометрии *отображают конгруенцию на абсолют*.

Предположим, что отображающие геометрии римановы. В таком случае соответствующая конгруенции нормализация абсолюта — аналитическая и расслояема в направлении луча конгруенции. Касательная плоскость каждой из ∞^1 расслояющих поверхностей проходит через нормаль 2-го рода и вследствие этого полюс этой плоскости лежит на луче конгруенции, так что луч этот совпадает с неевклидовой нормалью каждой из расслояющих поверхностей. Обратно, если мы рассмотрим конгруенцию нормалей некоторой поверхности неевклидова пространства, то, как мы это уже видели, она вместе со своей полярной конгруенцией нормализует абсолют аналитически и определяет на нём пару римановых геометрий. Итак, *нормальная конгруенция неевклидова пространства характеризуется тем, что отображающие её на абсолют геометрии римановы.*

Если отображающие геометрии квазиевклидовы, то геометрии, отображающие конгруенцию, полярную данной, должны быть римановы, как мы это видели в предыдущем параграфе.

Таким образом: *конгруенция, полярная нормальной, характеризуется тем, что геометрии, отображающие её на абсолют, квазиевклидовы.* Наконец, если отображающие геометрии евклидовы, то конгруенция — нормальная и, кроме того, образует со своей полярной конгруенцией пару, расслояемую в двух направлениях. Так как этот факт не зависит от самой нормализованной поверхности, то на всякой поверхности, для которой данная конгруенция будет нормальной, она определит евклидову внутреннюю геометрию. Отсюда следует, что *нормальная конгруенция поверхности нулевой кривизны характеризуется тем, что отображающие её на абсолют геометрии* — евклидовы.

Из самого построения конгруенций последнего типа следует известная теорема Бианки: *поверхность, «параллельная» поверхности нулевой кривизны, есть снова поверхность нулевой кривизны* *). Из того, что конгруенция, полярная рассматриваемой, тоже будет нормальной конгруенцией для ∞^1 поверхностей нулевой кривизны, следует другой результат, тоже принадлежащий Бианки **). Если мы будем строить конгруенции лучей, касающихся семейств абсолютно параллельных геодезических линий 1-го рода, то вторые фокальные поверхности будут поверхностями, расслояющими конгруенцию нормалей 2-го рода, которая будет нормальной в отношении этих поверхностей. Отсюда следует, что фокальные поверхности всех этих конгруенций будут поверхностями нулевой кривизны.

§ 25. Нормализованная плоскость

Плоскость может быть нормализована, как и всякая другая поверхность. Однако вследствие того, что нормаль 2-го рода всегда будет лежать в этой плоскости, производные координат нормальных точек y_i^{α} будут выражаться линейно через y_i^{α} и x^{α}, а координаты

---

*) Bianchi, т. II, § 490.

**) Bianchi, т. II, § 490.

вершины нормали 1-го рода x^α не будут участвовать в соответствующих разложениях.

Вследствие этого система основных уравнений нормализованной плоскости сведётся к уравнениям (22.6), в которых следует положить

$$b_{ij} = 0, \tag{1.25}$$

$$\nabla_k y_i^\alpha = l_k y_i^\alpha + p_{ij} x^\alpha. \tag{2.25}$$

Что же касается второй системы основных уравнений, то её нужно считать выполненной тождественно, так как $\xi_\alpha = \text{const}$. Поэтому на нормализованной плоскости можно считать осуществлённой только геометрию 1-го рода, геометрия же второго рода теряет смысл.

В дальнейшем будем считать плоскость нормализованной, если каждой её точке поставлена в соответствие прямая той же плоскости, не проходящая через соответствующую точку. Будем называть эту прямую *нормализующей*, а точки, расположенные на ней, *нормальными точками* относительно точки, для которой построена эта нормализующая прямая.

Внутренняя геометрия нормализованной плоскости определяется системой (2), и соответствующее ей перенесение направлений имеет следующую интерпретацию, получающуюся из интерпретации перенесения 1-го рода, данной в § 6.

Для того чтобы направление, заданное в некоторой точке M нормализованной плоскости, переносилось параллельно в бесконечно близкую точку, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему нормальная точка смещалась по прямой, соединяющей её с точкой M.

Рассмотрим последовательность направлений, заданных вдоль кривой g плоскости.

Ассоциированной точкой этой последовательности будем называть характеристическую точку семейства прямых, проходящих через точки кривой g и имеющих в ней направление последовательности.

Для тангенциальной последовательности ассоциированная точка или совпадает с точкой кривой g, или будет неопределённой. Последнее может иметь место тогда и только тогда, если g — прямая. *Ассоциированные точки последовательности параллельных направлений нормализованной плоскости будут нормальными.* Действительно, если направление переносится параллельно вдоль кривой g, то нормальная точка этого направления описывает кривую g', причём всякое её перемещение происходит по прямой, направленной в соответствующую точку кривой g. Прямая эта, следовательно, касается g', и нормальная точка будет ассоциированной.

Так как геодезическая линия определяет тангенциальную последовательность параллельных направлений, ассоциированная точка которой, будучи нормальной, должна быть отлична от точки кривой, то: *для того чтобы линия была геодезической линией внутренней геометрии нормализованной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была прямой.*

Отсюда сейчас же следует, что *внутренняя геометрия нормализованной плоскости проективно-евклидова.*

Линии *геодезического поля* нормализованной плоскости образуют, таким образом, семейство прямых, зависящее от одного параметра, и имеют огибающую, которая может, в частности, выродиться в точку. В последнем случае будем говорить, что поле является *центральным.* Ассоциированные точки любой последовательности направлений геодезического поля принадлежат одной огибающей или совпадают с центром поля. Если геометрия допускает существование поля абсолютно параллельных направлений, то оно необходимо геодезическое. Нормализующая прямая должна проходить через точку огибающей его линий и вращается вокруг этой точки при движении соответствующей ей точки плоскости по прямой поля. Если поле абсолютно параллельных направлений центральное, то все нормализующие прямые принадлежат одному пучку.

Ассоциированная прямая сети соединяет характеристические точки огибающих прямых, которые касаются последовательности направлений сети, взятой вдоль линии другого семейства, или иначе *совпадает с прямой Лапласа этой сети.* Если сеть чебышевская, то её ассоциированная прямая совпадает с нормализующей прямой. Рассуждениями, вполне аналогичными приведённым в § 13, убедимся, что лапласова прямая сети определится двумя точками

$$z_i^\alpha = y_i^\alpha + t_i x^\alpha,$$

где t_i — чебышевский тензор сети.

Если сеть геодезическая, т. е. образована двумя семействами прямых, то её ассоциированная прямая соединяет соответствующие характеристические точки их огибающих.

Если сеть определена двумя центральными полями, то её ассоциированная прямая соединяет их центры и будет одна и та же для всех точек плоскости.

Чтобы дать истолкование тензору p_{ij}, будем разыскивать развёртывающиеся поверхности, образованные нормализующими прямыми плоскости, поступая так же, как в § 9. При этом мы придём только к одному условию, что соответствует неопределённости задачи,

$$p_{rs} v^r du^s = 0,$$

где du^s даёт направление сдвига данной точки плоскости, а v^r — направление, в котором лежит точка пересечения нормализующей прямой с ей бесконечно близкой. Таким образом: *тензор p_{rs} определяет соответствие между направлением сдвига точки и направлением из этой точки на точку пересечения двух бесконечно близких* *нормализующих прямых, отвечающих последовательным положениям данной точки.*

Условия интегрируемости системы (2) получим из условий (1) § 10, положив в них $b_{ij}=0$:

$$\nabla^k l_k = p^{\cdot k}_{\cdot k}, \tag{3.25}$$

$$R_{ik} + p_{ik} - 2p_{ki} = 0, \tag{4.25}$$

$$\nabla^k p_{ik} = 0. \tag{5.25}$$

Из условия (4) сейчас же найдём, переместив индексы, удвоив второе и сложив

$$3p_{ik} = R_{ik} + 2R_{ki}. \tag{6.25}$$

Подставляя в (5), получаем единственное условие, которое накладывается на внутреннюю геометрию:

$$\nabla^k R_{ik} + 2\nabla^k R_{ki} = 0. \tag{7.25}$$

Но это есть просто необходимый и достаточный признак того, что внутренняя геометрия проективно-евклидова *). Отсюда мы приходим к следующей важной теореме: *для того чтобы геометрия могла служить внутренней геометрией нормализованной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была проективно-евклидовой.*

Кроме того, следует заметить, что все коэффициенты основных уравнений определяются, как только задана внутренняя геометрия: p_{ij} однозначно, а l_i с точностью до градиентного слагаемого, как это и следует ожидать для нормализатора. Отсюда следует, что *всякая проективно-евклидова геометрия может быть осуществлена на нормализованной проективной плоскости и притом единственным образом.*

Перейдём теперь к рассмотрению специальных нормализаций. Если соответствие направлений, определяемое тензором p_{ij}, будет инволюторным, то соответствие между точками плоскости и нормализующими прямыми обычно называется «полярным» **). Так как для этого случая характерна симметрия p_{ij}

$$p^{\cdot k}_{\cdot k} = 0, \tag{8.25}$$

то вследствие (3) нормализатор l_i будет градиентен и может быть обращён в нуль соответственным нормированием координат точки x^α. Принимая во внимание существование этого канонического нормирования, при котором

$$l_i = 0, \tag{9.25}$$

---

*) R. C., гл. IV § 2, стр. 131.

**) Fubini-Čech, Introduction à la géométrie differentielle des surfaces, Paris, 1931 (в дальнейшем эта книга, как и в первой части работы, цитируется как F.-C. J.), § 53.

будем называть рассматриваемую нормализацию плоскости *аналитической*. Условие (4) показывает, что *аналитическая нормализация плоскости характеризуется тем, что соответствующая ей внутренняя геометрия эквиаффинная.*

Рассмотрим другое предположение, допустив, что некоторая нормализация определяет внутреннюю геометрию Вейля. В таком случае существует декартова сеть. Так как она геодезическая, то её линии прямые. Так как, с другой стороны, она чебышевская, то её лапласова прямая совпадает с нормализующей.

Итак: *геометрия Вейля определяется на нормализованной плоскости тогда и только тогда, если нормализующая прямая совпадает с лапласовой прямой сети, образованной двумя семействами прямых линий.*

Соответствующую этому случаю нормализацию будем называть *вейлевой.*

Построение вейлевой нормализации может быть описано ещё и таким образом. Рассмотрим в плоскости две кривые g_1 и g_2 и область плоскости S, из каждой точки M которой можно провести по одной и только по одной касательной к каждой из этих кривых. Приняв прямую, соединяющую две точки прикосновения касательных к g_1, g_2, выходящих из точки M, за нормализующую, очевидно, получим вейлеву нормализацию, причём сеть, образованная обоими семействами касательных, будет декартовой. Кривые g_1 и g_2 будем называть *абсолютными кривыми* геометрии Вейля, осуществлённой на нормализованной плоскости.

Если абсолютные кривые вейлевой нормализации совпадают с двумя различными областями точек одной и той же кривой 2-го класса, то мы будем говорить, что имеем дело с *нормализацией Клейна.*

Если точка M плоскости сдвигается по направлению некоторой прямой MM_1, соответствующая ей нормализующая прямая вращается вокруг точки M_2 — полюса прямой MM_1 относительно абсолютной кривой нормализации Клейна. Вследствие этого соответствие между направлениями сдвига точки и направлением на точку пересечения двух бесконечно близких нормализующих прямых есть инволюция, а вследствие этого *нормализация Клейна — аналитическая.*

С другой стороны, она будет вейлевой, а определяемая ей внутренняя геометрия — эквиаффинной, вейлевой и проективно-евклидовой одновременно. Отсюда следует, что *внутренняя геометрия, определяемая нормализацией Клейна, есть риманова геометрия постоянной кривизны.*

Рассмотрим теперь неевклидову плоскость, и пусть её абсолютом будет кривая 2-го класса g_A. Если кривизна её геометрии положительна, то абсолют является мнимым, если кривизна отрицательна, то абсолют действительный. Наконец, если кривизна равна нулю, то абсолют распадается на пару точек на соединяющей их несобственной прямой. Установим в каждом из этих случаев нормализацию Клейна так, чтобы абсолютные кривые совпадали с двумя областями абсолюта, а в случае распавшегося абсолюта потребуем, чтобы нормализующая прямая была одна и та же для всех точек плоскости и совпадала с несобственной. Сравнивая внутреннюю геометрию, соответствующую этой нормализации, с неевклидовой метрикой плоскости, приходим к заключению, что у них общие геодезические и общая изотропная сеть, вследствие чего обе эти геометрии совпадают. Отсюда следует, что всякая геометрия постоянной кривизны может быть осуществлена на нормализованной плоскости с помощью нормализации Клейна. Но всякое осуществление проективно-евклидовой геометрии может происходить только единственным способом. Отсюда следует: *для того чтобы нормализация плоскости была нормализацией Клейна, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей внутренняя геометрия была геометрией постоянной кривизны.*

Поставим теперь вопрос о возможности осуществления на плоскости квазиевклидовой геометрии, равносильный вопросу о существовании квазиевклидовой проективно-евклидовой геометрии. Если она осуществлена на плоскости, то всякая её прямая может быть включена в семейство прямых, абсолютно ей параллельных. Нормализующая прямая, соответствующая всякой точке, расположенной на прямой l такого семейства, должна проходить через точку прикосновения прямой l с огибающей семейства. Иными словами, если точка M движется по прямой l, то соответствующая ей нормализующая прямая m вращается вокруг точки M_l, расположенной на этой же прямой l. Так как указанное положение должно иметь место для всякой прямой плоскости, то, приняв естественное требование непрерывности соответствия между точками плоскости и нормализующими прямыми, приходим к выводу, что это соответствие будет коррелятивным. Однако корреляция эта вырождается, так как всякой прямой l в ней соответствует точка M_l, расположенная на этой же прямой, что, как известно из проективной геометрии, может иметь место только в том случае, если корреляция относит всякой прямой плоскости точку её пересечения с некоторой постоянной прямой. Эта прямая, являясь местом всех нормальных точек, будет общей нормализующей прямой для всех точек плоскости, и геометрия, как мы это уже видели выше, будет просто евклидово-аффинной. Итак, *если квазиевклидова геометрия проективно-евклидова, то она есть евклидова геометрия.*

Или иначе: *из геометрий с абсолютным параллелизмом направлений только евклидова геометрия может быть осуществлена на нормализованной плоскости.*

В заключение заметим, что все рассуждения этого параграфа могут быть обращены по принципу двойственности. Мы можем рассматривать, например, плоскость не как место точек, а как место прямых, а в качестве нормализующего элемента употребить не прямую, а точку. Всякому направлению аналитического многообразия будем относить теперь, с помощью уравнений двойственных уравнениям (2), прямую, проходящую через нормализующую точку. Внутренняя геометрия этого нормализованного плоского поля прямых будет определять в аналитическом многообразии перенесение направлений, при котором прямая, проходящая через нормализующую точку, будет испытывать бесконечно малое вращение вокруг точки своего пересечения с прямой, соответствующей начальной точке аналитического многообразия, в которой было задано направление. Геодезические линии этого перенесения будут соответствовать пучкам прямых, или же просто точкам плоскости, рассматриваемым как выражение огибающей семейства касательных.

Та же геометрическая схема, наконец, будучи обращена по большому принципу двойственности, может быть осуществлена в многообразии, основным элементом которого служит прямая некоторой связки, а за нормализующий элемент принята плоскость той же связки. Однако в этом случае мы можем облегчить себе представление получающихся зависимостей, спроектировав эту связку на любую плоскость, не проходящую через её центр. Плоскость окажется нормализованной прямыми её пересечения с нормализующими плоскостями связки, а определённая на ней геометрия совпадёт с геометрией нормализованной связки.

§ 26. Квазисферические нормализации

Будем называть нормализацию *квазисферической нормализацией*

1-го рода, если все нормали 1-го рода проходят через одну точку — *центр* этой нормализации	2-го рода, если все нормали лежат в одной плоскости — *основании* этой нормализации.

Из результатов, отмеченных в § 9, следует, что

для квазисферической нормализации 1-го рода характерна неопределённость линий кривизны 1-го рода	*для квазисферической нормализации 2-го рода характерна неопределённость линий кривизны 2-го рода.*

Чтобы выяснить характер внутренних геометрий, рассмотрим, например, квазисферическую нормализацию 1-го рода. Нормализуем для этого связку нормалей 1-го рода, приняв за нормализующую плоскость — плоскость, проходящую через центр связки O и через нормаль 2-го рода. Для большей наглядности пересечём связку плоскостью P, не проходящей через O, и определим, таким образом, на этой плоскости нормализацию, «перспективную» нормализации связки. Внутренняя геометрия нормализованной плоскости P совпадает с внутренней геометрией связки.

Рассмотрим теперь некоторую точку M нормализованной поверхности и зададим в ней направление l, которому будет соответствовать нормальная точка L.

Если M' и L' будут проекциями точек M и L на плоскость P из точки O, то L' будет нормальной точкой нормализованной плоскости P на нормализующей прямой точки M' и будет соответствовать некоторому направлению l' плоскости. Предположим, что направление l переносится параллельно в геометрии 1-го рода поверхности. При этом точка L испытывает смещение в нормальной плоскости OML, а точка L' смещается по прямой $M'L'$. Отсюда следует, что направления l и l' оба сразу переносятся параллельно — первое в геометрии 1-го рода поверхности, а второе в геометрии нормализованной плоскости, и так как обе эти геометрии могут считаться заданными в одном аналитическом многообразии, то они совпадают между собою.

Обратив полученный результат по принципу двойственности для квазисферической нормализации 2-го рода, получим две теоремы.

Внутренняя геометрия 1*-го рода, определяемая квазисферической нормализацией* 1*-го рода, совпадает со внутренней геометрией связки её нормалей* 1*-го рода, нормализованной с помощью плоскостей связки, проходящих через соответствующую нормаль* 2*-го рода.*

Внутренняя геометрия 2*-го рода, определяемая квазисферической нормализацией* 2*-го рода, совпадает со внутренней геометрией плоского поля её нормалей* 2*-го рода, нормализованного с помощью точек пересечения этой плоскости с соответствующими нормалями* 1*-го рода.*

Из приведённого построения сейчас же следует, что

геодезические линии 1*-го рода квазисферической нормализации* 1*-го рода есть плоские кривые, плоскость которых проходит через центр нормализации.*

геодезические линии 2*-го рода, квазисферической нормализации* 2*-го рода есть линии прикосновения к поверхности конусов, вершины которых лежат на основании нормализации.*

Так как между геодезическими и прямыми (или точками) плоскости в том и в другом случае устанавливается однозначное соответствие, то

внутренняя геометрия 1*-го рода квазисферической нормализации* 1*-го рода проективно-евклидова.*

внутренняя геометрия 2*-го рода квазисферической нормализации* 2*-го рода проективно-евклидова.*

Будем называть квазисферическую нормализацию *полной*, если она является одновременно квазисферической и 1-го и 2-го рода и *несобственной* — такую полную квазисферическую нормализацию, центр которой лежит на основании.

Полная квазисферическая нормализация будет аналитической потому, что нормализующую конгруенцию 1-го рода следует считать сопряжённой, а нормализующую конгруенцию 2-го рода гармоничной поверхности.

Вследствие этого: *пара внутренних геометрий полной квазисферической нормализации будет эквиаффинной парой, состоящей из двух проективно-евклидовых геометрий.*

Если квазисферическая нормализация — несобственная, то её геометрия 2-го рода будет совпадать с геометрией плоского поля нормалей 2-го рода, нормализованного единой для всех этих нормалей точкой O. Но такая геометрия, как мы это видели в предыдущем параграфе, будет евклидово-афинной. Отсюда вследствие эквиаффинности пары внутренних геометрий имеем: *внутренние геометрии несобственной квазисферической нормализации образуют евклидову пару.*

Обращаясь к условиям интегрируемости для общего случая квазисферической нормализации, проведём его для такой нормализации 2-го рода.

Плоскость Ξ_α выберем так, чтобы она совпадала с основанием нормализации, а вершину нормали 1-го рода поместим в этой же плоскости.

В таком случае

$$\Xi_\alpha = \text{const.}, \tag{1.26}$$

откуда в уравнениях (2.10)

$$\mu_i^j = 0; \quad \mu_i = 0; \quad \nu_k = l_k = 0. \tag{2.26}$$

Кроме того, так как

$$x^\alpha \Xi_\alpha = \Omega = 0, \tag{3.26}$$

то из (11.10) получаем:

$$p_{ij} = 0. \tag{4.26}$$

Рассматривая поверхность как огибающую касательных плоскостей, будем определять её правой системой основных уравнений (1.10), благодаря чему сразу будем иметь тождественное выполнение условий группы (II), (7.10), (8.10) и (9.10).

Оставшиеся уравнения группы (I) будут иметь вид:

$$\nabla^k \lambda_k = \pi^k_{\cdot k}, \tag{5.26}$$

$$b^k_i \lambda_k + \nabla^k b_{(i)k} = 0, \tag{6.26}$$

$$\rho_{li} + \pi_{li} - 2\pi_{il} = 0, \tag{7.26}$$

$$\nabla^k \pi_{(i)\,k} = 0. \tag{8.26}$$

Из (7) так же, как и при переходе от (25.4) к (25.5), получим:

$$3\pi_{li} = \rho_{li} + 2\rho_{il}, \tag{9.26}$$

и тогда условие (8)

$$\nabla^k \rho_{ik} + 2\nabla^k \rho_{ki} = 0 \tag{10.26}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы геометрия 2-го рода была проективно-евклидова.

Условие (6) вследствие $l_i = 0$, как это было показано в § 10 (формула 12), равносильно равенству

$$\lambda_k = \omega_k,$$

где ω_k вместе с тензором b_{ij} определяет среднюю метрику Вейля пары внутренних геометрий.

Вследствие этого условие (5) принимает вид:

$$\nabla^k \omega_k = -\frac{1}{3} \rho^{k}_{\cdot k}$$

или, если мы заметим, что

$$\nabla^k \omega_k = -k^{k}_{\cdot k} = -\frac{1}{2} (\rho^{k}_{\cdot k} + R^{k}_{\cdot k}),$$

то окончательно оно представится в виде:

$$3R^{k}_{\cdot k} + \rho^{k}_{\cdot k} = 0. \qquad (11.26)$$

Последняя форма этого условия показывает после сравнения с (18.10), что оно равносильно требованию гармоничности поверхности и конгруенции нормалей 2-го рода.

Так как все условия интегрируемости сводятся к (10) и (11), а смысл (10) известен, то мы можем утверждать:

для того чтобы пара сопряжённых перенесений могла служить парой внутренних геометрий для квазисферической нормализации 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы геометрия 1-го рода была проективно-евклидовой, и было выполнено условие

$$3\rho^{k}_{\cdot k} + R^{k}_{\cdot k} = 0.$$

для того чтобы пара сопряжённых перенесений могла служить парой внутренних геометрий квазисферической нормализации 2-го рода, необходимо и достаточно, чтобы геометрия 2-го рода была проективно-евклидовой и было выполнено условие

$$3R^{k}_{\cdot k} + \rho^{k}_{\cdot k} = 0.$$

В частности, так как для аналитической нормализации условия (11) выполнены вследствие симметрии тензоров R_{ij} и ρ_{ij}, то: *для того чтобы эквиаффинная пара сопряжённых перенесений могла быть осуществлена в квазисферической нормализации 1-го (2-го) рода, необходимо и достаточно, чтобы геометрия 1-го (2-го) рода была проективно-евклидовой.*

В частности, рассмотрим способ получения полной квазисферической нормализации по заданной внутренней геометрии какого-либо рода. Для того чтобы задача была возможна, предположим, что заданная геометрия (например, 2-го рода) эквиаффинная и проективно-евклидова. В таком случае её можно осуществить на некоторой нормализованной плоскости Ω. Вследствие эквиаффинного характера внутренней геометрии нормализация плоскости будет аналитической, и её нормализатор можно считать равным нулю, и если точка x^α будет точка плоскости, то точки $\partial_i x^\alpha$ будут лежать на нормализующей прямой. Рассмотрим теперь поверхность S, точка которой

$$z^\alpha = x_0^\alpha + cx^\alpha,$$

где x_0^α — постоянная точка, а $c = \text{const}$. В таком случае $\partial_i z^\alpha = c\partial_i x^\alpha$.

Принимая точку x_0^α за центр квазисферической нормализации 1-го рода, а нормализующую прямую плоскости Ω — за нормаль 2-го рода поверхности S, получим решение поставленной задачи. Так как c — произвольная постоянная, то: *если на плоскости Ω задана произвольная аналитическая нормализация, то каждую точку пространства можно принять за центр полной квазисферической нормализации для ∞^1 поверхностей, нормали 2-го рода которых совпадают с нормализующими прямыми плоскости Ω.*

§ 27. Аффинная нормализация

Рассмотрим некоторую поверхность трёхмерного аффинного пространства. Мы будем говорить, что для этой поверхности задана *аффинная нормализация*, если нормаль 1-го рода задана произвольно, а нормаль 2-го рода совпадает с несобственной прямой, соответствующей касательной плоскости. С проективной точки зрения, аффинная нормализация есть квазисферическая нормализация 2-го рода, так как все нормали 2-го рода лежат в несобственной плоскости, которая и будет основанием нормализации.

Установим для рассматриваемого случая специализацию характеристики параллельного перенесения 1-го рода.

Всякому направлению в точке M поверхности соответствует бесконечно удалённая нормальная точка, которую можно также задать вектором l, расположенным в касательной плоскости и направленным в эту нормальную точку. Пусть данное направление перенесено параллельно в бесконечно близкую точку поверхности M', и там ему соответствует вектор l' в соответствующей касательной плоскости. Нормальные точки обоих направлений должны лежать на прямой пересечения нормальной плоскости, содержащей вектор l с несобственной плоскостью или, иными словами, вектор l' параллелен этой плоскости.

Итак: *чтобы получить в точке M' поверхности вектор l', соответствующий направлению, перенесённому в неё параллельно, перенесением 1-го рода из бесконечно близкой точки M, где ему соответствовал вектор l, нужно спроектировать вектор l' на касательную плоскость точки M' параллельно нормали 1-го рода.*

Полученный результат показывает, что в нашем случае параллельное перенесение 1-го рода определяется так же, как и для геометрии аффинной связности, которая индуцируется на гиперповерхности аффинного пространства заданием в каждой её точке «псевдонормального вектора»*), и мы можем сказать, что *геометрия* 1*-го рода поверхности, подвергнутой аффинной нормализации, совпадает с геометрией, индуцируемой на данной поверхности заданием псевдонормального направления, совпадающего с направлением нормали* 1*-го рода.*

Не останавливаясь на специализации характеристики перенесения 2-го рода, отметим только, что *геодезические* 2*-го рода в случае аффинной нормализации являются цилиндрическими линиями тени поверхности*, и геометрия 2-го рода, как и в случае всякой квазисферической нормализации, совпадёт с геометрией несобственного плоского поля нормалей 2-го рода, нормализованного несобственными точками нормалей 1-го рода, и будет *проективно-евклидовой.*

Если аффинная нормализация является одновременной нормализацией Грина, то рёбра Грина изотропной сети внутренних геометрий находятся в бесконечности, и сеть эта будет геодезической по отношению к геометрии 2-го рода. Отсюда следует, что *для получения аффинной нормализации Грина следует принять ось Грина некоторой сети цилиндрических линий тени нормализованной поверхности за нормаль* 1*-го рода.* Легко видеть, что эти же результаты можно сформулировать ещё следующим образом: *для того чтобы получить аффинную нормализацию Грина, следует выбрать в несобственной плоскости две кривые* g_1 *и* g_2 *и, найдя точки их пересечения* M_1 *и* M_2 *с нормалью* 2*-го рода, взять за вершину соответствующей нормали* 1*-го рода точку* N *пересечения касательных к* g_1 *и* g_2 *в точках* M_1 *и* M_2 *соответственно.*

Заметим, что геометрия 2-го рода совпадёт в этом случае с геометрией нормализованного поля несобственных прямых, причём точка N будет нормализующей точкой для прямой M_1M_2, а сами кривые g_1 и g_2 будут соответствовать абсолютным кривым этой геометрии Вейля.

В частности, если нормализация будет лапласовой, то нормаль 1-го рода совпадёт с осью Грина сопряжённой сети цилиндрических линий тени, т. е. *сети переноса.* Отсюда следует, что *для того чтобы аффинная нормализация определяла на поверхности минимальную пару внутренних геометрий, необходимо и достаточно, чтобы нормаль* 1*-го рода совпадала с осью Грина некоторой сети переноса.*

Для того *чтобы аффинная нормализация была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы конгруенция нормалей* 1*-го рода была сопряжена поверхности*, так как требование гармоничности уже выполнено для всякой аффинной нормализации.

---

*) R. C. гл. IV, § 36.

В таком случае обе внутренние геометрии, в том числе и геометрия 2-го рода, будут эквиаффинными.

Вследствие этого аналитическая аффинная нормализация определяет в несобственной плоскости аналитическую нормализацию, поля нормалей 2-го рода которой являются вершинами нормалей 1-го рода. Так как понятие обобщённого «полярного»*) соответствия между точками и прямыми само по себе двойственно, то если принять за основной элемент вершину нормали 1-го рода, а за нормализующий элемент—нормаль 2-го рода, то снова получим аналитическую нормализацию. Рассмотрим теперь наряду с нормализованной поверхностью S поверхность S_0, находящуюся в полной квазисферической нормализации так, что нормали 2-го рода поверхностей S и S_0 совпадают, а их нормали 1-го рода в соответствующих точках параллельны. Такую поверхность всегда можно разыскать так, как это было показано в конце § 26, поместив центр её нормализации в произвольную точку C_0, так как её нормали 1-го и 2-го рода определяют в несобственной плоскости полярную нормализацию.

Из построения следует, что *геометрия 2-го рода поверхности S_0 совпадает с геометрией 2-го рода поверхности S.*

Поверхность S_0 можно задать произвольно и с её помощью получить аналитическую нормализацию данной поверхности S, поступая следующим образом. Рассмотрим связку прямых, выходящих из некоторой точки C_0, и пусть какой-либо луч этой связки пересечёт S_0 в точке M'. Найдём теперь на поверхности S такую точку M, касательная плоскость в которой параллельна касательной плоскости в точке M' к поверхности S_0, и примем за нормаль 1-го рода в точке M поверхности S прямую, параллельную прямой C_0M'. В таком случае нормали 2-го рода поверхностей S и S_0 совпадут, а их нормали 1-го рода будут параллельны между собой, а значит, обе нормализации определят одну и ту же нормализацию несобственной плоскости и, следовательно, геометрии 2-го рода поверхностей S и S_0 будут совпадать. Но поверхность S_0 находится в полной квазисферической нормализации и, следовательно, эта геометрия 2-го рода будет эквиаффинной. Но и для поверхности S' нормали 2-го рода образуют гармоничную ей конгруенцию. Поэтому для нормализации поверхности S выполнены условия 2) и 5) § 12 и, значит, нормализация эта аналитическая.

Указанным методом нормализации пользуется Мюллер при построении своей релятивной геометрии поверхностей**).

Если аффинная нормализация является одновременно нормализацией Ли, *то она будет аналитической*, так как для неё выполнены условия гармоничности и тензор $S_{ı}=0$, т. е. выполнены условия 5) и 6) § 12.

---

*) F.-Č. J., § 53.

**) Müller, Monatshefte f. Math. u. Phys., т. XXXI, 1921.

Так как нормаль 2-го рода лежит в бесконечности и нормаль 1-го рода сопряжена ей полярно, то последняя проходит через центр поверхности Ли. Но прямая, соединяющая точку поверхности с центром соответствующей ей поверхности Ли, есть аффинная нормаль этой поверхности *). Итак: *для того чтобы аффинная нормализация была нормализацией Ли, необходимо и достаточно, чтобы нормаль 1-го рода совпадала с аффинной нормалью поверхности.*

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда аффинная нормализация является *аналитической нормализацией Грина.* В таком случае она определяет пару римановых внутренних геометрий. Однако геометрия 2-го рода должна быть проективно-евклидовой, что возможно тогда и только тогда, если она есть геометрия постоянной кривизны. Обратно, если последнее имеет место, то нормализация будет нормализацией Грина, так как и геометрия 1-го рода, сопряжённая римановой геометрии, будет геометрией Вейля, и кроме того, нормализация будет аналитической, так как для неё выполнены условия 2) и 5) § 12. Итак: *для того чтобы аффинная нормализация была аналитической нормализацией Грина, необходимо и достаточно, чтобы определяемая ею геометрия 2-го рода была геометрией постоянной кривизны.* Отсюда следует, что рассматриваемая нормализация определяет на несобственной плоскости нормализацию Клейна. Оставив в стороне тривиальный случай несобственно сферической аналитической нормализации, для которой характерна евклидова пара внутренних геометрий, мы можем сказать, что бесконечно удалённые вершины нормалей 1-го рода и нормали 2-го рода находятся в полярном соответствии относительно некоторой бесконечно удалённой кривой g 2-го порядка — абсолютной кривой пары римановых геометрий, определённых на поверхности.

Если мы будем теперь искать поверхность S_0, с помощью которой можно установить по методу Мюллера нормализацию рассматриваемого типа данной поверхности S, то мы прежде всего примем во внимание, что геометрии 2-го рода совпадают на обеих поверхностях. Поверхность S_0 находится в полной квазисферической нормализации, вследствие чего её геодезические 1-го рода суть плоские кривые, расположенные в плоскостях, проходящих через центр нормализации. Поэтому если точка движется по такой геодезической линии, то вершина нормали 1-го рода описывает прямую в бесконечно удалённой плоскости, а соответствующая нормаль 2-го рода вращается вокруг полюса этой прямой относительно абсолютной кривой 2-го порядка. Однако такое вращение может иметь место в том и только в том случае, если рассматриваемая геодезическая 1-го рода есть

---

*) Fubini-Čech, Geometria proectiva-differenziale, Bologna, 1926/27 г., т. II, § 81 (впоследствии эта книга, как и в первой части работы, цитируется как F.-Č. G.).

цилиндрическая линия тени поверхности S_0, т. е. является одновременно и геодезической линией 2-го рода.

Так как геодезические линии 1-го и 2-го рода поверхности S_0 совпадают, то, следовательно, совпадают и внутренние геометрии 1-го и 2-го рода, образуя самосопряжённую пару, а значит, *поверхность S_0 есть поверхность 2-го порядка, находящаяся в полярной нормализации*, так что все нормали 1-го рода проходят через её центр. Кроме того, вершины нормалей 1-го рода находятся с одной стороны на полярах нормалей 2-го рода относительно поверхности S_0, а с другой стороны, совпадают с их полюсами относительно кривой, так что последняя есть *бесконечно удалённое плоское сечение поверхности S_0*.

Рассмотрим, наконец, некоторую поверхность S обыкновенного евклидова пространства и нормализуем её по Мюллеру, приняв за поверхность S_0 обыкновенную сферу с центром в любой точке с её нормалями. Тогда нормаль 1-го рода поверхности S, будучи перпендикулярна к касательной плоскости, совпадёт с обыкновенной нормалью этой поверхности. С другой стороны, изотропные линии 1-го рода поверхности S совпадут с линиями нулевой длины метрики внешнего пространства, так как их касательные пересекут абсолютную кривую, которая будет мнимым кругом на бесконечности. Поэтому, сравнивая геометрию 1-го рода поверхности S с её внутренней геометрией в обычном смысле этого слова, мы находим, что они имеют общие геодезические и общие изотропные сети и вследствие этого совпадают между собою.

Итак: *внутренняя геометрия поверхности обыкновенного евклидова пространства совпадает с её внутренней геометрией 1-го рода, если нормаль 1-го рода совпадает с обыкновенной нормалью, а нормаль 2-го рода лежит на бесконечности.*

Применив этот результат к сфере евклидова пространства и приняв во внимание, с одной стороны, что её геометрии 1-го и 2-го рода совпадают, а с другой стороны, что, приняв её за поверхность S_0, мы добьёмся совпадения геометрий 2-го рода поверхностей S и S_0, приходим к заключению: *если для поверхности обыкновенного евклидова пространства нормаль 1-го рода совпадает с обыкновенной нормалью, а нормаль 2-го рода лежит на бесконечности, то геометрия 2-го рода совпадает с геометрией сферического отображения.*

Отсюда следует: *внутренняя геометрия поверхности и геометрия её сферического отображения образуют риманову сопряжённую пару*. Условия Гаусса и Кодацци будут простыми следствиями этого результата. Так как пара риманова, то она кодацциева, откуда b_{ij} можно пронормировать (с точностью до постоянного множителя), так что

$$\nabla_{[l}b_{i]k} = 0.$$

С другой стороны, как и для всякой аффинной нормализации, геометрия 2-го рода проективно-евклидова, т. е. имеет постоянную кривизну. Поэтому вследствие формул (8.4) и (6.4) кривизна внутренней геометрии

$$k = c\frac{b}{g},$$

где c можно сделать равным единице за счёт умножения всех величин на соответствующие постоянные множители.

§ 28. Римановы нормализации

Будем называть нормализацию *римановой*, если она определяет на нормализованной поверхности риманову пару сопряжённых перенесений.

Так как эта нормализация принадлежит к числу нормализаций Грина, то нормализующие прямые римановой нормализации должны совпадать с прямыми Грина некоторой сети. С другой стороны, риманова пара есть пара эквиаффинная и, следовательно, нормализация должна быть аналитической.

Итак: *изотропная сеть 1-го рода римановой нормализации есть сеть, прямые Грина которой образуют конгруенцию, сопряжённую и гармоничную нормализованной поверхности.*

Мы уже рассматривали две возможности установления римановой нормализации, которые совпадали с нормализациями, принятыми в метрической геометрии пространств постоянной кривизны и евклидова пространства. Будем говорить, что риманова нормализация *особая*, если её нельзя получить обоими рассмотренными способами.

Рассмотрим примеры особых римановых нормализаций.

А. Поверхность Jonas'a. Для сопряжённой сети Jonas'a характерно то, что её прямые Грина образуют конгруенции, сопряжённые и гармоничные поверхности. Вследствие этого лапласова нормализация, соответствующая сети Jonas'a, будет римановой, а пара геометрий, определяемых ею, будет минимальной римановой парой. Обратно, если на поверхности определяется риманова минимальная пара внутренних геометрий, то её изотропная сеть есть сеть Jonas'a.

Сопряжённая сеть, направления которой гармонически разделяются направлениями сети Jonas'a, будет иметь своими прямыми Грина поляры прямых Грина данной сети относительно поверхности Ли. Но в таком случае условия гармоничности и сопряжённости конгруенций Грина будут иметь место и для новой сети, так что она тоже будет сетью Jonas'a. Итак: *сопряжённая сеть, гармонически разделяющая сеть Jonas'a, есть снова сеть Jonas'a.* Поэтому на всякой поверхности Jonas'a риманова нормализация может быть установлена по крайней мере двумя различными способами.

Минимальные поверхности пространств постоянной кривизны и евклидова пространства будут поверхностями Jonas'a, так как в естественной их нормализации на них определяется пара римановых геометрий, по отношению к которым базис пары, т. е. асимптотическая сеть, будет ортогональной, что характеризует минимальную пару внутренних геометрий. Однако, кроме изотропной, на них должна существовать ещё другая сеть Jonas'a, гармонически её разделяющая. Будучи сопряжённой и ортогональной, эта сеть, очевидно, совпадает с сетью линий кривизны. Итак: *сеть линий кривизны минимальных поверхностей (евклидовых и неевклидовых) есть сеть Jonas'a. Особую риманову нормализацию минимальных поверхностей мы получим, приняв за нормализующие прямые Грина сети линий кривизны этих поверхностей.*

В частности, для минимальных поверхностей евклидова пространства ось Грина сети линий кривизны минимальной поверхности будет полярой Ли нормали 2-го рода. Так как последняя лежит в бесконечности, то первая проходит через центр поверхности Ли, т. е. *совпадает с аффинной нормалью поверхности.*

Итак: *если принять за нормаль 1-го рода минимальной поверхности её аффинную нормаль, а за нормаль 2-го рода — поляру Ли обычной нормали, то нормализация будет особой римановой и определит на поверхности минимальную пару римановых геометрий, изотропные сети которых совпадут с сетью обыкновенных линий кривизны.*

В. Поверхности 2-го порядка. Полярная нормализация поверхности 2-го порядка парой конгруенций, из которых одна сопряжена, а другая (вследствие этого) гармонична поверхности, есть риманова нормализация и притом, вообще говоря, особая, так как поверхность является абсолютом по отношению к самой себе и занимает совершенно исключительное положение среди поверхностей неевклидова пространства.

С. Поверхности вращения. Рассмотрим некоторую линию g на поверхности вращения евклидова пространства. Вращая эту линию вокруг оси вращения, мы получим семейство линий, а отразив все эти линии в некоторой меридианальной плоскости зеркально, образуем сеть, которую будем называть просто *сетью вращения*, а кривую g — её образующей кривой. Очевидно, что сеть вращения переходит в себя при любом повороте вокруг оси вращения поверхности и при любом отражении в меридианальной плоскости.

Примем за нормаль 1-го рода ось Грина сети вращения, а за нормаль 2-го рода её ребро Грина. Все нормали 1-го рода, в силу симметрии, должны пересекать ось вращения, и точка этого пересечения будет одна и та же для всех нормалей 1-го рода, выходящих из точек одной параллели. Поэтому при движении по меридиану и при движении по параллели поверхности, описанные нормалью 1-го рода, будут развёртывающимися, вследствие чего развёртывающиеся поверхности конгруенции нормалей 1-го рода будут соответствовать сопряжённой сети (линий кривизны). Итак: *конгруенция нормалей*

1-*го рода сопряжена поверхности*. Каждая из нормалей 2-го рода, опять-таки вследствие симметрии, будет перпендикулярна к оси вращения. Поэтому при движении по меридиану она перемещается параллельно и описывает цилиндрическую поверхность; при движении же по параллели она остаётся постоянно в одной и той же плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Таким образом развёртывающиеся поверхности конгруенции нормалей 2-го рода тоже соответствуют сети линий кривизны, и эта конгруенция гармонична поверхности.

Итак: *рассматриваемая нормализация есть аналитическая нормализация Грина, т. е. риманова нормализация.*

Абсолютные поверхности этой нормализации будут две симметрично расположенные области некоторой новой поверхности вращения, ось которой совпадает с осью вращения нормализованной поверхности и которая будет геометрическим местом фокусов обеих конгруенций, касательных к линиям сети вращения.

D. Поверхности Лиувилля. Рассмотрим некоторую поверхность Лиувилля пространства постоянной кривизны (евклидова или неевклидова). На всякой такой поверхности существует по крайней мере ∞^1 сетей Риччи, т. е. геодезических сетей, чебышевский тензор которых градиентен. Но чебышевский тензор сети определяет ассоциированную прямую, а ассоциированная прямая геодезической сети совпадает с её ребром Грина. Так как естественная нормализация поверхности метрического пространства будет аналитической, то всякая конгруенция прямых в касательной плоскости, определяемая градиентным тензором, будет гармонична поверхности: *рёбра Грина сети Риччи образуют конгруенцию, гармоничную поверхности*. С другой стороны, ось Грина геодезической сети совпадает с нормалью поверхности, и поэтому ось Грина сети Риччи образует конгруенцию, сопряжённую поверхности..

Итак: *нормализация поверхности Лиувилля обыкновенной нормалью и ребром Грина сети Риччи есть особая риманова нормализация, если сеть не совпадает с сетью линий нулевой кривизны.*

Так как нормаль 1-го рода совпадает с обычной нормалью, то геометрия 1-го рода в особой нормализации появляется в результате проективного преобразования обычной внутренней геометрии и будет снова метрикой Лиувилля.

Итак: *всякая поверхность Лиувилля допускает по крайней мере ∞^1 особых римановых нормализаций, причём внутренние геометрии 1-го рода для всех этих нормализаций находятся в геодезическом соответствии и являются метриками Лиувилля.*

Рассмотрим важнейшие частные случаи особых нормализаций поверхностей Лиувилля.

1) Поверхности 2-го порядка. Внутренняя метрика поверхности 2-го порядка заданной в пространстве постоянной кривизны будет метрикой Лиувилля, так как, сохраняя нормаль 1-го рода и

приняв за нормаль 2-го рода её поляру, мы получим на поверхности самосопряжённую риманову пару, и соответствующая ей риманова геометрия находится в геодезическом соответствии с внутренней геометрией. Обе эти геометрии не совпадают, так как изотропная сеть второй геометрии есть асимптотическая, и, по теореме Дини, обе геометрии будут геометриями Лиувилля. Для того чтобы исследовать сети Риччи на поверхности 2-го порядка Q евклидова пространства, которую мы теперь предположим центральной, включим её в семейство конфокальных ей поверхностей. Как известно, рёбра возврата развёртывающихся поверхностей конгруенций общих касательных к двум конфокальным поверхностям Q и Q' будут геодезическими на обеих поверхностях*). Но через каждую точку поверхности пройдут две такие касательные, и все указанные рёбра возврата определят на ней геодезическую сеть.

Примем теперь Q' за абсолют неевклидовой геометрии. Новая нормаль поверхности Q совпадает при этом с её старой, так как сеть Σ станет изотропной сетью новой внутренней геометрии, и соприкасающиеся плоскости её линий снова пересекаются по нормали. Таким образом, внутренняя геометрия поверхности подвергается проективному преобразованию, оставаясь римановой, и после этого преобразования сеть Σ станет изотропной сетью. Вследствие этого до преобразования *она была сетью Риччи в метрике Лиувилля на поверхности 2-го порядка.*

Следует заметить, что общий метод нахождения особых римановых нормализаций поверхности Лиувилля в данном случае не приводит нас к цели, так как получаемая нормализация, как мы это видим, может быть определена введением геометрии постоянной кривизны.

2) Поверхности вращения. Рассмотрим сеть вращения, образующая линия которой — геодезическая. Так как по построению и вся сеть будет геодезической, то её ось Грина совпадает с обычной нормалью поверхности. Взяв её за нормаль 1-го рода и приняв за нормаль 2-го рода ребро Грина рассматриваемой сети, мы получим, как это было показано выше, риманову нормализацию, а сеть будет в ней изотропной сетью 1-го рода. Но так как нормаль 1-го рода и обычная нормаль совпадают, то обычная внутренняя геометрия и новая геометрия 1-го рода находятся в геодезическом соответствии. Таким образом, получаем синтетический вывод того факта, что обычная внутренняя геометрия поверхности вращения есть геометрия Лиувилля и что сеть вращения с геодезической образующей есть сеть Риччи.

3) Поверхности постоянной гауссовой кривизны. На поверхности постоянной гауссовой кривизны (евклидова или

---

*) Chasles, Liuvilles Journal, т. II, 1846.

неевклидова пространства) существует ∞^5 сетей Риччи. Это — те сети, которые при геодезическом отображении внутренней геометрии на плоскость перейдут в сети прямых, касающихся произвольной кривой 2-го класса. По предыдущему, для каждой из таких сетей ребро Грина образует конгруенцию, гармоничную поверхности. Приняв её за конгруенцию нормалей 2-го рода и сохранив нормаль 1-го рода, получим на поверхности внутреннюю геометрию 1-го рода, которая будет геометрией постоянной кривизны, вследствие того, что находится в геодезическом соответствии с данной внутренней геометрией. В частности, мы можем рассмотреть одну из тех сетей Риччи, линии которых отображаются на прямые двух плоских пучков. Так как эта сеть особенная, то существует ∞^2 сетей с тем же чебышевским тензором. Если принять общее ребро Грина всех таких сетей за нормаль 2-го рода, то внутренняя геометрия будет квазиевклидовой и эквиаффинной одновременно, т. е. просто евклидовой. Таким образом, для всякой поверхности постоянной кривизны можно с сохранением нормали 1-го рода ∞^2 способами (по числу прямых плоскости) установить такую особую риманову нормализацию, при которой на поверхности определится пара евклидовых геометрий.

§ 29. Евклидовы нормализации

Среди римановых нормализаций особое место занимают нормализации *евклидовы*, т. е. такие нормализации, которые определяют на поверхности евклидову пару сопряжённых геометрий.

Так как эта пара принадлежит к числу квазиевклидовых, то пара нормализующих конгруенций евклидовой нормализации расслояема в направлении нормали 2-го рода. С другой стороны, эта нормализация аналитическая и из равенства (15.10), вследствие симметрии тензоров p_{ij} и π_{ij} и вследствие

$$R_{ij} = \rho_{ij} = 0, \tag{1.29}$$

получаем

$$\pi_{ij} - p_{ij} = A b_{ij}. \tag{2.29}$$

Поэтому линии кривизны 1-го и 2-го рода совпадают, а значит, пара нормализующих конгруенций расслояема и в направлении нормали 1-го рода.

Итак: *пара нормализующих конгруенций евклидовой нормализации расслояема в обоих направлениях* *).

Произведя перемещение вершины нормали 1-го рода и основания нормали 2-го рода, получим согласно (20.6):

$$'p_{ij} = p_{ij} + l b_{ij}; \quad '\pi_{ij} = \pi_{ij} + \lambda b_{ij}$$

---

*) Вполне расслояемая пара конгруенций, сопряжённых и гармоничных каждой из расслояющих поверхностей, носит название пары Фубини. См. С. П. Фиников, Rendiconti di Palermo, т. 53, 1929, стр. 714.

и воспользуемся произволом в выборе l и λ так, чтобы после перемещения иметь:

$$b^{kl}p_{kl} = 0; \quad b^{kl}\pi_{kl} = 0; \tag{3.29}$$

тогда вместо (2) получим:

$$p_{ij} = \pi_{ij}. \tag{4.29}$$

Если ввести теперь тензор

$$e_{ij} = b_i^k p_{kj} = b_i^k \pi_{kj},$$

то вследствие (3) он будет симметричен, а так как

$$b^{kl}e_{kl} = 0, \tag{5.29}$$

$$p^{kl}e_{kl} = \pi^{kl}e_{kl} = 0, \tag{6.29}$$

то нулевые линии формы

$$e_{kl}du^k du^l = 0$$

совпадают с линиями кривизны, определяемыми нормализацией.

Обращаясь к условиям интегрируемости, заметим, что $l_k = \lambda_k = 0$; $p_{ij} = \pi_{ij}$ симметричны, а

$$R_{ij} = \rho_{ij} = 0.$$

Поэтому (3.10) выполнено, а из (4.10) получаем:

$$b_i^k m_k^l = -p_i^l; \quad b_i^k \mu_k^l = -p_i^l,$$

откуда

$$m_{ij} = \mu_{ij} = -b_{il}p_j^l = p_{il}b_j^l$$

или

$$m_{ij} = \mu_{ij} = e_{ij}, \tag{7.29}$$

а вместо остальных условий интегрируемости будем иметь:

$$\begin{array}{r|l}
b_i^k m_k = \nabla^k p_{ik}, & b_i^k \mu_k = \nabla^k p_{(i)k}, \qquad (8.29)\\
\nabla^k b_{ik} = 0, & \nabla^k b_{(i)k} = 0, \qquad (9.29)\\
\nabla^k e_k^l = m^l, & \nabla^k e_k^{(l)} = \mu^l, \qquad (10.29)\\
\nabla^k m_k = 0, & \nabla^k \mu_k = 0. \qquad (11.29)
\end{array}$$

Что же касается условия (9.10), то оно выполнено вследствие (6). Чтобы получить систему условий, равносильных каждым из четырёх последних, найдём сумму и разность m^l и μ^l из (10). При этом введём символ $\overset{0}{\nabla}$ дифференцирования в средней метрике и примем во внимание формулу (11.3). Тогда

$$m^l + \mu^l = \overset{0}{\nabla}{}^k e_k^l, \tag{12.29}$$

$$\mu^l - m^l = S^{lk}_{\cdot\cdot r} e_k^r. \tag{13.29}$$

Складывая теперь (8) и принимая во внимание, что тензор b_{ij} есть основной тензор средней метрики и его ковариантная производная так же, как и производная основного альтернатора, которым мы пользуемся, поднимая и опуская индексы, равна нулю, получим:

$$b_i^l \overset{0}{\nabla}{}^k e_{kl} = \overset{0}{\nabla}{}^k b_i^l e_{kl} = \overset{0}{\nabla}{}^k p_{ik} = -\overset{0}{\nabla}{}^k p_{ik},$$

откуда $\overset{0}{\nabla}{}^k e_k^l = 0$ и вследствие этого и

$$m^l + \mu^l = 0.$$

Поэтому

$$m^l + \mu^l = 0 \quad \text{и} \quad 2\mu^l = -2m^l = S^{lk}_{\cdot\cdot r} e_k^r,$$

вследствие чего оба условия (11) равносильны одному условию

$$\nabla^k m_k = 0.$$

Так как условия (9) выполняются вследствие сопряжённости внутренних геометрий и кодацциевого характера пары, то: *для того чтобы пара сопряжённых евклидовых геометрий могла быть осуществлена на нормализованной поверхности, необходимо и достаточно, чтобы она допускала существование некоторого симметричного тензора e_{ij}, удовлетворяющего уравнениям*

$$b^{kl} e_{kl} = 0, \tag{I.29}$$

$$\overset{0}{\nabla}{}^k e_{ki} = 0, \tag{II.29}$$

$$\nabla_k (S^k_{rl} e^{rl}) = 0, \tag{III.29}$$

где b_{ij} есть основной тензор средней метрики, $\overset{0}{\nabla}$ — символ дифференцирования в той же метрике, индексы подняты с помощью её основного альтернатора, а

$$S^k_{rl} = \Gamma^k_{rl} - G^k_{rl}.$$

Анализируя систему (I), (II), (III), мы прежде всего замечаем, что она удовлетворится, если в ней положить

$$e_{ij} = 0, \tag{14.29}$$

вследствие чего *всякая евклидова пара может быть получена на нормализованной поверхности.*

Чтобы выяснить характер нормализации, вспомним, что тензор e_{ij} определит своими нулевыми линиями линии кривизны 1-го и 2-го рода, и при наличии (14) все эти линии будут неопределёнными, так что *нормализация будет полной квазисферической.* Так как геометрия 2-го рода совпадает в этом случае с геометрией плоского поля нормалей 2-го рода, нормализованного вершинами нормалей 1-го рода, и будет евклидовой, то *все нормали 1-го рода проходят через один и тот же центр нормализации, который* *лежит на её основании.* Итак: *всякая евклидова пара сопряжённых геометрий может быть осуществлена на поверхности, находящейся в полной несобственной квазисферической нормализации.*

Но такая нормализация, очевидно, может быть осуществлена на любой поверхности. Поэтому, если некоторая произвольная пара сопряжённых геометрий может быть получена как пара внутренних геометрий нормализованной поверхности, то для неё должен существовать переход к евклидовой паре в виде некоторого составного преобразования. Обратно, если для некоторой пары геометрий существует такой переход, то, осуществив полученную после него геометрию на поверхности, мы можем, меняя нормализацию, вернуться к данной паре внутренних геометрий. Таким образом, мы приходим к теореме, которая в известной мере даёт законченность всей нашей теории, связывающей учение о сопряжённых парах геометрий и о нормализованных поверхностях. Вот эта теорема: *для того чтобы пара сопряжённых геометрий могла быть осуществлена на нормализованной поверхности, необходимо и достаточно, чтобы существовало составное преобразование, переводящее её в евклидову пару.*

Обратимся к рассмотрению тех случаев, когда система (I), (II), (III) допускает нетривиальные решения $e_{ij} \neq 0$. Соответствующая этой возможности нормализация уже не будет полной квазисферической, и мы будем называть её *особой евклидовой нормализацией.* Результаты, к которым мы придём, будут существенно различаться в зависимости от того, вырождается или нет сеть линий кривизны в одну систему линий. В зависимости от этого предположим сначала, что

1) Существует сеть линий кривизны. В таком случае тензор e_{ij} есть тензор сопряжённой сети, и так как он удовлетворяет уравнению (II), то сеть эта будет кодацциевой ортогональной сетью средней метрики, т. е. *изотермически сопряжённой.*

Преобразуем теперь условие (III), вводя тензор $\tilde{e}^{ij}$, взаимный тензору e_{ij}, и принимая во внимание, что он отличается от e^{ij} только множителем. Поэтому

$$\nabla_k (S^k_{rl} e^{rl}) = \nabla_k (\tilde{e}^{km} e_{mn} S^n_{rl} e^{rl}) = \nabla_k (e^{km} e_{mn} S^n_{rl} \tilde{e}^{rl}) =$$

$$= (\overset{0}{\nabla}_k e^{km})\, e_{mn} S^n_{rl} \tilde{e}^{rl} + e^{km} \overset{0}{\nabla}_k (\tilde{e}^{rl} S^n_{rl} e_{mn}) = 0,$$

но $\overset{0}{\nabla}_k e^{km} = 0$ вследствие (II), а

$$\tilde{e}^{rl} S^n_{rl} e_{nm} = -2\sigma_m,$$

где σ_m есть определённая формулой (7.5) разность между чебышевскими тензорами 1-го и 2-го рода сети линий кривизны. Вследствие этого условие (III) принимает вид

$$\tilde{e}^{km} \overset{0}{\nabla}_k \sigma_m = 0, \tag{15.29}$$

что при сравнении с (22в, 22) указывает на то, что сеть линий кривизны расслояющая. Будучи расслояющей и изотермически сопряжённой, эта сеть *необходимо будет сетью* R. Обратно, если на поверхности существует сеть R, то её тензор всегда можно пронормировать так, чтобы он удовлетворял системе (I), (II), (III). Таким образом, возможность рассмотренной особой евклидовой нормализации характеризует поверхность R *).

2) Пусть теперь линии кривизны совпадают и форма $e_{kl}du^k du^l$ представляет полный квадрат. Для исследования этого случая перейдём к асимптотической системе координат, положив как в (1.18)

$$\varphi = \partial_1 \lg \theta; \quad \psi = \partial_2 \lg \theta, \quad b_{12} = 0,$$

что возможно, так как средняя метрика риманова.

Из условия (I) следует в таком случае

$$e_{12} = 0$$

и вследствие вырождения $e_{11} e_{12} = 0$. Предположим, что

$$e_{22} = 0; \quad e_{11} \neq 0,$$

и тогда вследствие (42.3) из (II) получаем:

$$\partial_2 e_{11} = 0$$

или в соответствующей параметризации:

$$e_{11} = 1; \quad e^{22} = \frac{1}{\theta^2}.$$

Наконец, условие (III)

$$\overset{0}{\nabla}_k (S^k_{rl} e^{rl}) = \partial_1 \left(S^1_{21} \frac{1}{\theta^2} \right) + z^1_{11} S^1_{22} \frac{1}{\theta^2} + \partial_2 \left(S^2_{22} \frac{1}{\theta^2} \right) + z^2_{12} S^2_{22} \frac{1}{\theta^2} = 0$$

после простых преобразований примет вид

$$\partial_1 \gamma - \partial_2 T_2 - \partial_1 \lg \theta \cdot \gamma + \partial_2 \lg \theta \cdot T_2 = 0.$$

С другой стороны, $R_{22} = 0$, откуда вследствие (45.3)

$$-\partial_1 \gamma - \partial_2 T_2 - \partial_1 \lg \theta \cdot \gamma + \partial_2 \lg \theta \, T_2 = 0,$$

откуда окончательно

$$\partial_1 \gamma = 0.$$

Но это условие не зависит от нормализации, так как от неё не зависит сама величина γ и, как известно, характеризует так называе-

---

*) На полученный результат можно смотреть как на доказательство теоремы, полученной С. П. Финиковым, согласно которой расслояющие поверхности пары Фубини будут поверхностями R. См. С. П. Фиников, loc. cit.

мые поверхности R_0 или в частном случае $\gamma = 0$, линейчатые поверхности. Таким образом, евклидова нормализация с параболическими нормализующими конгруенциями характеризует поверхности R_0 *) и, в частности, при $\gamma = 0$ линейчатые поверхности. Таким образом: *для того чтобы поверхность допускала особую евклидову нормализацию, необходимо и достаточно, чтобы она была или поверхностью R, или поверхностью R_0, или линейчатой поверхностью.* При этом поверхности R и только они допускают евклидову нормализацию с непараболическими нормализующими конгруенциями. Последние же два класса характеризуют возможность особой евклидовой нормализации конгруенциями параболического типа.

В заключение напомним, что в конце § 28 мы показали возможность особой евклидовой нормализации поверхностей постоянной гауссовой кривизны евклидова или неевклидова пространства, что, в частности, очевидно, относится и к поверхностям нулевой кривизны. Теперь без всяких вычислений мы можем прийти к заключению, что поверхности постоянной кривизны есть поверхности R, причём сетью R на них будет сеть линий кривизны.

§ 30. О проективном изгибании

Предположим, что на каждой из двух различных поверхностей S и $\overset{*}{S}$ возможны такие нормализации, которые определяют на них тождественные пары внутренних геометрий. В таком случае можно установить между точками S и $\overset{*}{S}$ соответствие так, что в соответствующих системах координат будет иметь место:

$$G^k_{ij} = \overset{*}{G}{}^k_{ij}; \quad \Gamma^k_{ij} = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}; \quad b_{ij} = \lambda \overset{*}{b}_{ij}. \tag{1.30}$$

Для совпадения пар внутренних геометрий необходимо и достаточно, собственно, чтобы из трёх приведённых групп условий выполнялась одна из первых и последнее, потому что третье будет выполнено тогда в силу условия сопряжённости геометрий. Нужно заметить, однако, что первые две группы равенств не влекут ещё за собой третьей, так как в случае минимальной пары геометрий основная сеть остаётся неопределённой. Поэтому, говоря о совпадении пар внутренних геометрий, будем подразумевать, что и базисные сети совпадают.

В качестве необходимого условия этого совпадения будем иметь в асимптотической системе координат и в соответствующих параметрах не зависящее от нормализации равенство (32.5)

$$\beta = \overset{*}{\beta}; \quad \gamma = \overset{*}{\gamma}, \tag{2.30}$$

---

*) F.-Č. J., стр. 86.

Но это равенство является необходимым и достаточным условием *проективной наложимости* поверхностей S и $\overset{*}{S}$ *), отнесённым к соответствующим при наложении координатам. Обратно, если поверхности S и $\overset{*}{S}$ наложимы проективно, то существует такая система координат, в которой (2) имеет место.

Однако, как это было показано в конце § 5, оно же является необходимым и достаточным условием существования такого составного преобразования, которое переводит пару геометрий на поверхности S в пару геометрий на поверхности $\overset{*}{S}$; отсюда следует, что если поверхности S и $\overset{*}{S}$ наложимы, то на каждой из них можно установить нормализации, определяющие одинаковые пары внутренних геометрий.

Итак: *для того чтобы две поверхности были проективно наложимыми, необходимо и достаточно, чтобы для каждой из них можно было установить такие нормализации, чтобы определяемые ими пары внутренних геометрий совпадали.*

Называя такие нормализации *равносильными*, предположим, что равносильные нормализации установлены на поверхностях S и $\overset{*}{S}$. Изменим нормализацию одной из них, и пусть этому изменению соответствует составное преобразование внутренних геометрий (p_i, π_i). На второй поверхности всегда можно провести изменение нормализации, которое соответствует тому же составному преобразованию и после обоих этих преобразований пары внутренних геометрий останутся совпавшими.

Отсюда следует, *что всякой нормализации данной поверхности S соответствует равносильная нормализация поверхности $\overset{*}{S}$, наложимой на данную проективно.*

Предположим теперь что на поверхности S установлена полная квазисферическая евклидова нормализация; ей будет соответствовать равносильная и, следовательно, тоже евклидова нормализация поверхности $\overset{*}{S}$. Если эта последняя не будет особой, то мы имеем одновременное равенство нулю тензоров $p_{ij}=0$; $\overset{*}{p}_{ij}=0$, например, и вследствие этого поверхности S и $\overset{*}{S}$ совпадают с точностью до проективного преобразования пространства. Таким образом, если возможно проективное изгибание, т. е. проективная наложимость *различных* поверхностей, то поверхности эти должны допускать особую евклидову нормализацию. Отсюда следует, что *проективное изгибание возможно только для поверхностей R, R_0 и линейчатых поверхностей* **).

---

*) F.-Č. G., § 27, стр. 81.

**) F.-Č. J., стр. 86.

Докажем также, что каждая поверхность S, принадлежащая к одному из этих трёх классов, действительно изгибаема. Установив на S квазисферическую евклидову нормализацию, рассмотрим нормализованную поверхность $\overset{*}{S}$ с той же парой внутренних геометрий, как и у данной, но в остальном определяющуюся тензором $e_{ij} \neq 0$, который, однако, удовлетворяет системе (I), (II), (III) § 29. Покажем, что $\overset{*}{S}$ отлична от S. Предположим противное и совместим обе поверхности с помощью соответственного проективного преобразования. Тогда вследствие предположенного совпадения геометрий совместятся и все геодезические линии 1-го рода обеих поверхностей и, следовательно, совместятся и их нормализующие прямые. Последнее же невозможно, так как на первой поверхности нормали 1-го рода образуют связку, а на второй поверхности они входят в конгруенцию с определёнными развёртывающимися поверхностями.