O przestrzeniach (L^M). — *Über Räume* (L^M).

Note

de M. ***W. ORLICZ***,

présentée le 6 Avril 1936, par M. S. Banach m. c.

1.1. Es sei $M[u]$ eine in $\langle 0, \infty)$ stetige, konvexe Funktion, die nur für $u = 0$ gleich Null ist und den folgenden Bedingungen genügt: a) $\lim\limits_{u \to 0} \frac{M[u]}{u} = 0$; b) $\lim\limits_{u \to \infty} \frac{M[u]}{u} = +\infty$. Mit $M'[v]$ bezeichnen wir die zu $M[u]$ *komplementäre Funktion*; für beliebige $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ gilt die Young'sche Ungleichung [1])

$$uv \leqslant M[u] + M'[v]. \tag{1}$$

Für jedes v gibt es ein u, so daß in (1) das Gleichheitszeichen besteht, und für jedes u gibt es ein v mit derselben Eigenschaft.

Versucht man, den Begriff des Raumes (L^α) zu verallgemeinern, so bietet sich natürlicherweise die Klasse der Funktionen $f(x)$ dar, für welche das Integral

$$\int_a^b M[k|f(x)|]\,dx \tag{2}$$

existiert, wenn $k > 0$ eine von $f(x)$ abhängige Zahl bedeutet [2]). Wird die Addition zweier Elemente und die Multiplikation eines Elementes mit einer reellen Zahl in üblicher Weise erklärt, so

[1]) W. H. Young, On Classes of Summable Functions and their Fourier Series, Proc. Royal Soc. (A) 87 (1912), S. 225—229. Vgl. auch: Z. W. Birnbaum u. W. Orlicz, Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Studia Math., 3 (1931), S. 1—67, insb. S. 15—16.

[2]) Siehe: A. Zygmund, Trigonometrical Series, Warszawa (1935), insb. S. 95—97.

erweist sich diese Funktionenklasse als ein linearer Raum. Da man jeden linearen Raum auf unendlich viele Weisen normieren kann, so muß man sich nun entscheiden, welche von den möglichen Normen zu wählen ist. Eine brauchbare Norm $\| \ \|_M$ erhalten wir, wenn wir für eine Funktion $f(x)$, für welche das Integral (2) endlich ist,

$$\|f(x)\|_M = \underset{g}{\text{Ob. Gr.}} \left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right|$$

setzen, wobei $g(x)$ der Nebenbedingung $\int_a^b M'[|g(x)|]\, dx \leqslant 1$ genügt [3]). Die angeführte Funktionenklasse ist bei dieser Normierung ein Raum vom Typus (B). Im folgenden werden wir ihn mit (L^M) bezeichnen. Für das zugrunde gelegte Definitionsintervall (a, b) kann hierbei auch ein unendliches Intervall zugelassen werden.

1.2. Zuerst mögen einige Eigenschaften der Räume (L^M) zusammengestellt werden [4]).

Nach (1) sehen wir, daß die Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant \int_a^b M[|f(x)|]\, dx + \int_a^b M'[|g(x)|]\, dx \tag{3}$$

besteht. Es sei $f(x) \in (L^M)$ und somit für ein gewisses k das Integral (2) endlich; es gilt die Ungleichung

$$\int_a^b M\left[\frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_M}\right] dx \leqslant 1; \tag{4}$$

aus (3) und aus der Definition der Norm ergibt sich

$$\|f(x)\|_M \leqslant \int_a^b M[k|f(x)|]\, dx k^{-1} + k^{-1}.$$

Für $\|f(x)\|_M \leqslant 1$ haben wir nach (4) die Ungleichung $\int_a^b M[|f(x)|]\, dx \leqslant \leqslant \|f(x)\|_M$; mithin folgt aus $\|f_n(x)\|_M \to 0$ die Existenz der Inte-

[3]) Siehe: W. Orlicz, Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, Bull. Ac. Pol. (1932), S. 207—220, und das unter [2]) zitierte Buch, S. 96.

[4]) Zu 1.2 vgl. die Untersuchungen von Z. W. Birnbaum — W. Orlicz, W. Orlicz und A. Zygmund, a. a. O.

grale $\int_a^b M[|f_n(x)|]\,dx$ für hinreichend große n und $\int_a^b M[|f_n(x)|]\,dx \to 0$. Dagegen kann man im allgemeinen nicht umgekehrt aus $\int_a^b M[|f_n(x)|]\,dx \to 0$ auf $\|f_n(x)\|_M \to 0$ schließen.

Existiert das Integral

$$F(f) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{5}$$

für eine beliebige Funktion aus (L^M), so gehört $g(x)$ dem Raume ($L^{M'}$) an. Ist $g(x) \epsilon (L^{M'})$, so stellt (5) ein in (L^M) lineares Funktional dar; seine Additivität ist evident, die Linearität folgt sogleich aus der Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \|f(x)\|_M \quad \text{für} \int_a^b M'[|g(x)|]\,dx \leqslant 1, \tag{6}$$

bezw.

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \|f(x)\|_M \int_a^b M'[|g(x)|]\,dx \quad \text{für} \int_a^b M'[|g(x)|]\,dx \geqslant 1. \tag{6'}$$

1.3. Wir beweisen zuerst den Satz:

Wenn für eine beliebige Funktion $f(x) \epsilon (L^M)$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,g_n(x)\,dx = F(f), \qquad g_n(x) \epsilon (L^{M'}), \tag{7}$$

existiert, so ist $F(f) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$, wobei $g(x) \epsilon (L^{M'})$.

Zum Beweise bemerken wir, daß $\|g_n(x)\|_{M'} \leqslant \frac{1}{k}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ und somit nach (4) $\int_a^b M'[k|g_n(x)|]\,dx \leqslant 1$ [5]). Nach einem Satz von W. H. Young [6]) gibt es eine Funktion $g(x)$, für welche

[5]) Siehe das Buch von A. Zygmund, S. 99.

[6]) W. H. Young, On Successions with Subsequences converging to an Integral, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 24 (1925), S. 1—20. Siehe auch die unter [1]) zit. Arbeit von Birnbaum—Orlicz, Kapitel III, § 1.

$\int\limits_a^b M'[k|g(x)|]\,dx \leqslant 1$ und eine Folge $\{n_i\}$ von Indizes, so daß für jede beschränkte Funktion $h(x)$ $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_a^b h(x)\, g_{n_i}(x)\, dx = \int\limits_a^b h(x)\, g(x)\, dx = F(h)$.

Es sei $\int\limits_a^b M[|f^*(x)|]dx < +\infty$, $|h(x)| \leqslant 1$; es ist offenbar auch $\int\limits_a^b M[|h(x)\, f^*(x)|]\,dx < +\infty$ und unserer Voraussetzung zufolge existiert der Grenzwert (7) für $f(x) = h(x)\, f^*(x)$. Nach einem bekannten Satze von Hahn-Steinhaus ist zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ vorhanden, so daß aus $|E| \leqslant \eta$ die Ungleichung $\int\limits_E |f^*(x)| \cdot |g_n(x)|\, dx \leqslant \varepsilon$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$ folgt. Es sei eine Menge E so gewählt, daß $|E| \leqslant \eta$, $\int\limits_E |f^*(x)| \cdot |g(x)|\, dx \leqslant \varepsilon$, $f^*(x)$ auf CE beschränkt ist; aus dem obigen folgern wir sofort $|\int\limits_{CE} f^*(x)\, g_{n_i}(x)\, dx - \int\limits_{CE} f^*(x)\, g(x)\, dx| < \varepsilon$, $i \geqslant i_0$, $|F(f^*) - \int\limits_a^b f^*(x)\, g(x)\, dx| \leqslant 3\,\varepsilon$.

1.4. Wir setzen jetzt voraus, daß $M[u]$ der folgenden Bedingung genügt

$$M[2u] \leqslant l M[u] \quad \text{für } u \geqslant u_0. \tag{8}$$

Dann besteht die Ungleichung (für ein endliches Intervall (a, b))

$$\int\limits_a^b M[|f(x)|]\,dx \leqslant C \int\limits_a^b M[k|f(x)|]\,dx + M[u_0 k^{-1}],$$

wo $C = 1$, wenn $k \geqslant 1$, $C = l^{[lg_2 1/k]+1}$, wenn $0 < k < 1$; jede Funktion aus (L^M) ist also *mit* $M[u]$ *integrierbar*, d. h. es existiert das Integral $\int\limits_a^b M[|f(x)|]\,dx$.

Es mögen noch einige Bemerkungen, im Zusammenhang mit der Bedingung (8), die eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der Räume (L^M) spielt, angegeben werden.

a) $M[u]$, $M'[v]$ können gleichzeitig (8) erfüllen; dies gilt z. B. für $M[u] = u^\alpha$ $(\alpha > 1)$, $M[u] = u^\alpha lg\,(1+u)$ $(\alpha > 1)$.

b) Es kann vorkommen, daß für $M[u]$ die Bedingung (8) erfüllt, dagegen für $M'[v]$ nicht erfüllt ist; dies findet z. B. für $M[u] = e^u - u - 1$, $M'[v] = (v+1)\,lg\,(v+1) - (v+1)$ statt.

c) Es sei $M[u] = \int\limits_0^u p(t)\,dt$, wo $p(t)$ eine wachsende Funktion bedeutet. Wenn für $t \geqslant t_0$ $p(2t) \leqslant l p(t)$, so erfüllt $M[u]$ offensichtlich die Bedingung (8). Ist

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{p(2t)}{p(t)} = +\infty$, so erfüllt $M[u]$ die Bedingung (8) nicht, dagegen ist sie für $M'[v]$ erfüllt. Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß $M[v] = \int\limits_0^v p^{-1}(t)\,dt$; würde nun für beliebig große t die Ungleichung $t'' > 2t'$, wo $t' = p^{-1}(t)$, $t'' = p^{-1}(2t)$, stattfinden, so wäre $2p(t') = p(t'') > p(2t')$, was unmöglich ist, da mit t auch t' gegen $+\infty$ konvergiert. Für $t \geqslant \bar{t}$ ist also $p^{-1}(2t) \leqslant 2p^{-1}(t)$ und $M'[v]$ muß (8) erfüllen.

d) Es gibt komplementäre Funktionen $M[u]$, $M'[v]$, welche beide die Bedingung (8) nicht erfüllen. Um zwei komplementäre Funktionen mit dieser Eigenschaft zu erhalten, gehen wir aus von einer Funktion $\overline{M}[u] = \int\limits_0^u r(t)\,dt$, wo $r(t)$ eine stetige, wachsende Funktion bedeutet, die (8) nicht erfüllt, und definieren sukzessive zwei gegen $+\infty$ wachsende Zahlenfolgen $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ sowie zwei Funktionen $M[u] = \int\limits_0^u p(t)\,dt$, $M[v] = \int\limits_0^v p^{-1}(t)\,dt$. Wir wählen zuerst $u_1 = v_1 = 0$, u_2 ganz beliebig und setzen $p(t) = r(t)$ für $0 \leqslant t \leqslant u_2$, $v_2 = p(u_2)$, $p^{-1}(t) = r^{-1}(t)$ für $0 \leqslant t \leqslant v_2$. Somit ist $M[u]$ in $\langle u_1, u_2\rangle$, $M'[v]$ in $\langle v_1, v_2\rangle$ erklärt worden. Angenommen, wir hätten bereits u_i, v_i für $1 \leqslant i < n$ $M[u]$ in $\langle 0, u_{n-1}\rangle$, $M'[v]$ in $\langle 0, v_{n-1}\rangle$ definiert. Es sei n eine gerade Zahl; wir setzen $p(t) = r(t) + a$, $a = p(u_{n-1}) - r(u_{n-1})$, im Intervall $(u_{n-1}, u_n\rangle$ wobei wir u_n so groß wählen, daß $u_n > 2u_{n-1}$ und, wenn wir $M[u]$ in $(u_{n-1}, u_n\rangle$ gleich $M[u_{n-1}] + \int\limits_{u_{n-1}}^u (r(t) + a)\,dt$ erklären, die Ungleichung $M[u_n] \geqslant 2^n M\left[\frac{u_n}{2}\right]$ erfüllt sei. Wir setzen weiter $v_n = p(u_n)$, $M'[v] = \int\limits_0^v p^{-1}(t)\,dt$ in $(v_{n-1}, v_n\rangle$. Für ein ungerades n wird zuerst $p^{-1}(t) = r(t) + b$, $b = p^{-1}(v_{n-1}) - r(v_{n-1})$ in $(v_{n-1}, v_n\rangle$ gesetzt, wo v_n so groß gewählt ist, daß $v_n > 2v_{n-1}$ und für die durch die Formel $M'[v_{n-1}] + \int\limits_{v_{n-1}}^v p^{-1}(t)\,dt$ in $(v_{n-1}, v_n\rangle$ erklärte Funktion $M'[v]$ die Ungleichung $M'[v_n] \geqslant 2^n M'\left[\frac{v_n}{2}\right]$ besteht. Dann definieren wir $p^{-1}(v_n) = u_n$, $M[u] = \int\limits_0^u p(t)\,dt$ in $(u_{n-1}, u_n\rangle$. Die auf diese Weise konstruierten Funktionen $M[u]$, $M[v]$ weisen die verlangte Eigenschaft auf.

Wenn für ein $M[u]$ (8) besteht, so erweist sich der entsprechende Raum (L^M) in vieler Hinsicht den Räumen (L^α), $\alpha > 1$ ähnlich; es bestehen insbesondere unter dieser Voraussetzung die folgenden Eigenschaften [7]): α) der Raum (L^M) ist separabel; β) ein

[7]) Siehe die unter [3]) zit. Arbeit des Verfassers.

beliebiges lineares Funktional $F(f)$ in (L^M) ist in der Gestalt $F(f)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, $g(x)\in(L^{M'})$ darstellbar, d. h. der zu (L^M) konjugierte Raum ist mit $(L^{M'})$ isomorph; $\gamma)$ ist $\|g_n(x)\|_{M'}\leqslant K$, so existiert eine Teilfolge $\{g_{n_i}(x)\}$ und eine Funktion $g(x)\in(L^{M'})$ derart, daß für ein beliebiges $f(x)\in(L^M)$

$$\lim_{i\to\infty}\int_a^b f(x)\,g_{n_i}(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Wenn der Raum (L^M) *eine von den Eigenschaften* $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ *besitzt, so ist die Bedingung* (8) *erfüllt.*

Aus $\beta)$ folgt (8).

Es sei

$$2uv_u=M[2u]+M'[v_u];$$

aus der Ungleichung (1) ergibt sich

$$M[2u]+M'[v_u]\leqslant 2M[u]+2M'[v_u], \tag{9}$$

$$M[u]\{M[2u](M[u])^{-1}-2\}\leqslant M'[v_u]. \tag{10}$$

Nehmen wir jetzt an, daß die Bedingung (8) nicht erfüllt sei; mit Anwendung von (9), (10) erhalten wir eine Zahlenfolge $u_n\to+\infty$ so daß, $v_{u_n}=v_n$ gesetzt,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{M'[v_n]}\leqslant b-a; \tag{11}$$

$$M[u_n]\leqslant 2^{-n}M'[v_n]; \tag{12}$$

$$u_n v_n=M[2u_n]2^{-1}+M'[v_n]2^{-1}\leqslant M[u_n]+M'[v_n] \tag{13}$$

gilt. Mit δ_n bezeichnen wir paarweise fremde Intervalle aus (a,b) von der Länge $(M'[v_n])^{-1}$. Des weiteren setzen wir $g_n(x)=v_n$, wenn $x\in\delta_n$, sonst $g_n(x)=0$ $(n=1,2,3\ldots)$, $f^*(x)=u_n$ wenn $x\in\delta_n$ $(n=1,2,3\ldots)$, $f^*(x)=0$ für alle übrigen x. Es ist nach (12)

$$\int_a^b M[|f^*(x)|]\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\delta_n}M[u_n]\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}M'[v_n]\,\delta_n=1,$$

also $\|f^*(x)\|_M\leqslant 2$; da $\int_a^b M'[|g_n(x)|]\,dx=1$ so ist auch $\|g_n(x)\|_{M'}\leqslant 2$ $(n=1,2,3\ldots)$. Da $\int_a^b f^*(x)\,g_n(x)\,dx=\delta_n u_n v_n$ so haben wir nach (13)

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_a^b f^*(x)\, g_n(x)\, dx \leqq 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_a^b f^*(x)\, g_n(x)\, dx \geqq \frac{1}{2}$. Somit können wir voraussetzen, indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f^*(x)\, g_n(x)\, dx = a \geqq \frac{1}{2} \tag{14}$$

existiert. Es bezeichne $h(x)$ eine beliebige beschränkte Funktion; aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M'[v_n]}{v_n} = \infty$ folgern wir gleich

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b h(x)\, g_n(x)\, dx = 0. \tag{15}$$

Jetzt betrachten wir in (L^M) die lineare Menge S aller Funktionen $f(x)$, für welche der Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\, g_{n_i}(x)\, dx = F(f)$ für eine feste Indizesfolge $\{n_i\}$ vorhanden ist. $F(f)$ stellt offenbar ein additives Funktional in S dar; ist $f(x) \in S$, so haben wir, wegen $\int\limits_a^b M'[|g_n(x)|]\, dx = 1$, $|F(f)| \leqq \|f(x)\|_M$; somit läßt sich das Funktional $F(f)$, nach dem bekannten Satz von Hahn-Banach, additiv und homogen auf ganz (L^M) unter Beibehaltung von $|F(f)| \leqq \|f(x)\|_M$ erweitern. Nun leuchtet aber sofort ein, daß die Beziehung $F(f) = \int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ nicht im ganzen Raum (L^M) bestehen kann. Wäre nämlich dies der Fall, so würde nach (15) mit $h(x) = \operatorname{sign} g(x)$, $g(x) = 0$ fast überall folgen und hieraus weiter $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_a^b f^*(x)\, g_{n_i}(x)\, dx = 0$, was einen Widerspruch mit (14) bedeutet.

Aus γ) folgt (8).

Wir haben zugleich mitbewiesen, daß man auf keine Weise aus der Folge $\{g_n(x)\}$ eine Teilfolge $\{g_{n_i}(x)\}$ so herausgreifen kann, daß der Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\, g_{n_i}(x)\, dx = F(f)$ für jedes $f(x) \in (L^M)$ existiert. Denn wenn eine Teilfolge mit dieser Eigenschaft existieren würde, so müßte nach 1.3 $F(f)$ in der Form $F(f) = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx$ darstellbar sein, was sicher nicht der Fall ist.

Aus α) folgt (8).

Wir setzen (L^M) separabel voraus und bezeichnen mit $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x) \ldots$ ein in (L^M) überalldicht liegendes Funktionensystem. Es sei D eine meßbare Menge aus (a, b) mit den folgenden Eigenschaften:

a) Jede Funktion $f_n(x)$ ist auf D stetig; b) Wenn δ ein Intervall aus (a, b) bezeichnet, für welches $D\delta$ eine nichtleere Menge ist, so ist $|D\delta| > 0$.

Wir stellen die Menge D als Summe $A_1^* + A_2^* + \ldots A_n^* + \ldots$ von punktfremden Mengen A_n^* dar, die noch diese Eigenschaft besitzen sollen, daß, wenn $|D\delta| > 0$, $\delta \epsilon (a, b)$, auch $|A_n^* \delta| > 0$ für alle n ist. Seien $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p \ldots$ alle Intervalle aus (a, b) mit rationalen Endpunkten, die mit D gemeinsame Punkte besitzen; wir definieren mit Hilfe von A_n^* eine Mengenfolge $\{A_p\}$, so daß:

a') $|A_p| > 0$ $(p = 1, 2, 3 \ldots)$; b') $A_p \subset \delta_p$ $(p = 1, 2, 3 \ldots)$; c') $A_p \cdot A_{p'} = 0$ für $p \neq p'$.

Nun nehmen wir an, (8) wäre nicht erfüllt; dann gibt es eine Zahlenfolge $\{u_p\}$, für welche $M[2u_p] \geqslant 2^p M[u_p]$, $(2^p M[u_p])^{-1} \leqslant |A_p|$. Wir bestimmen zuerst in jeder Menge A_p zwei punktfremde Mengen A'_p, A''_p, so daß $|A'_p| = |A''_p| = (2^{1+p} M[u_p])^{-1}$ und definieren dann eine Funktion $f(x)$, indem wir für $x \epsilon A'_p$ $(p = 1, 2, 3 \ldots)$ $f(x) = u_p$, für $x \epsilon A''_p$ $f(x) = -u_p$ $(p = 1, 2, 3 \ldots)$ und sonst $f(x) = 0$, setzen [8]). Es gilt

$$\int_a^b M[|f(x)|]\, dx = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{A'_p} M[|f(x)|]\, dx + \int_{A''_p} M[|f(x)|]\, dx = 1, \tag{16}$$

$$\int_{A'_p} M[2|f(x)|]\, dx = \int_{A''_p} M[2|f(x)|]\, dx \geqslant \frac{1}{2} \quad (p = 1, 2, 3 \ldots). \tag{17}$$

Betrachten wir irgendeine von den Funktionen $f_n(x)$. Da $f_n(x)$ auf D stetig ist, so existiert ein δ_{p_0}, so daß entweder $f_n(x) \leqslant 0$ oder $f_n(x) > 0$ für $x \epsilon D\delta_{p_0}$. Im ersten Fall besteht nach (17), wegen

[8]) Eine ähnliche Schlußweise wurde schon früher in der Arbeit: Z. W. Birnbaum, Über Approximation im Mittel, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, (1930) S. 338—343, angewandt.

$\int\limits_{A'_{p_0}} M[2|f(x)-f_n(x)|]\,dx \geqslant \int\limits_{A'_{p_0}} M[2|f(x)|]\,dx$, die Ungleichung

$$\int_a^b M[2|f(x)-f_n(x)|]\,dx \geqslant \frac{1}{2};$$

im zweiten ist diese Ungleichung offenbar auch richtig.

Wir greifen jetzt aus $\{f_n(x)\}$ eine Teilfolge $\{f_{n_i}(x)\}$ heraus mit $\|f_{n_i}(x)-f(x)\|_M \to 0$. Dann ist auch $\|2(f_{n_i}(x)-f(x))\|_M \to 0$, $\int\limits_a^b M[2|f_{n_i}(x)-f(x)|]\,dx \to 0$ und wir sind zu einem Widerspruch gelangt.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgern wir gleich:

Wenn der Raum (L^M) *die Bedingung* (8) *erfüllt, so ist dafür, daß* (L^M) *schwach kompakt sei, notwendig und hinreichend, daß auch für* $(L^{M'})$ *die Bedingung* (8) *erfüllt sei.*

1.5. *Die Funktion* $M[u]$ *genüge der Bedingung* $\lim\limits_{u\to\infty} M[2u](M[u])^{-1} = +\infty$. *Wenn der Grenzwert* (7) *mit* $g_n(x) \in (L^{M'})$ *für ein beliebiges* $f(x) \in (L^M)$ *existiert, so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\eta > 0$, *so daß aus* $|E| \leqslant \eta$ *die Ungleichung* $\int\limits_E M'[k|g_n(x)|]\,dx \leqslant \varepsilon$ $(n=1, 2, 3\ldots)$ *folgt, wo* $0<k<1$, *eine von E unabhängige Konstante bedeutet.*

Es bedeute u_v die kleinste positive Zahl, für welche

$$2u_v v = M[2u_v] + M'[v].$$

Dann ist nach (1) $M[u_v]\{M[2u_v](M[u_v])^{-1}-2\} \leqslant M'[v]$. Für ein gegebenes n bezeichnen wir mit u_n eine positive Zahl, so daß $M[2u](M[u])^{-1} \geqslant 2^{n+1}$ für $u \geqslant u_n$ und mit v_n eine Zahl für die aus $v \geqslant v_n$ die Ungleichung $u_v \geqslant u_n$ folgt. Die Folge $\{\|g_n(x)\|_{M'}\}$ ist beschränkt; es ist also $\int\limits_a^b M'[k|g_n(x)|]\,dx \leqslant 1$, $0<k<1$ $(n=1,2,3\ldots)$; ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir weiter annehmen, daß $\int\limits_a^b M'[|g_n(x)|]\,dx \leqslant 1$ $(n=1, 2, 3\ldots)$ und daß für jedes $f(x) \in (L^M)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,g_n(x)\,dx = 0. \tag{18}$$

Nun setzen wir voraus, daß $\{g_n(x)\}$ die Bedingung unseres Satzes (mit $k=1$) nicht erfüllt. Dann gibt es, wie man leicht zeigen kann, ein $\varepsilon_0 > 0$, eine Mengenfolge $\{E_n\}$, $E_n \subset (a, b)$ und eine Indizesfolge $p_n \to +\infty$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $E_n \cdot E_{n'} = 0$, wenn $n \neq n'$; b) $\int\limits_{E_n} M'[|g_{p_n}(x)|]\,dx \geqslant \varepsilon_0$; c) $|g_{p_n}(x)| \geqslant v_n$ wenn $x \in E_n$; d) $\int\limits_{E_i} M'[|g_{p_n}(x)|]\,dx < \frac{1}{2^i}$ für $i = n+1, n+2, \ldots$; e) es sei $f_i^*(x)$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ eine Funktion, die für $x \in E_i$ gleich $u_{|v(x)|} \operatorname{sign} v(x)$ ist mit $v(x) = g_{p_i}(x)$ und sonst gleich 0 ist. Es soll sein

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_a^b f_i^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Was das Erfülltsein von e) betrifft, so bemerken wir, daß die Ungleichungen

$$M[|f_n^*(x)|]\,2^n \leqslant M[|f_n^*(x)|]\{M[2|f_n^*(x)|](M[|f_n^*(x)|])^{-1} - 2\} \leqslant M'[|g_{p_n}(x)|],$$

$$\int_a^b M[|f_n^*(x)|]\,dx \leqslant \frac{1}{2^n}, \tag{19}$$

bestehen. Somit ist nach (18) bei festem i $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_i^*(x)\, g_n(x)\,dx = 0$.

Wir definieren jetzt eine Funktion $f^*(x)$, indem wir $f^*(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n^*(x)$ setzen; es ist nach (19)

$$\int_a^b M[|f^*(x)|]\,dx \leqslant 1.$$

Wir haben weiter

$$\int_{E_n} f^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx = \int_{E_n} f_n^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (n \text{ eine gerade Zahl}),$$

$$\int_{E_n} f^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx = -\int_{E_n} f_n^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx \leqslant -\frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (n \text{ eine ungerade Zahl}).$$

Hieraus und nach d), e), erhalten wir für ein gerades n

$$\int_a^b f^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \int_{E_i} f_i^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx + \int_{E_n} f_n^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i \int_{E_i} f_i^*(x)\, g_{p_n}(x)\,dx \geqslant -\frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{1}{2^{n-1}},$$

für ein ungerades n

$$\int_a^b f^*(x)\, g_{p_n}(x)\, dx < -\frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Es müßte also die Folge $\int_a^b f^*(x)\, g_{p_n}(x)\, dx$ divergieren, was einen Widerspruch mit unserer Voraussetzung bedeutet.

Aus dem vorangehenden Satz folgt ohne weiteres:

*Sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, und konvergiert außerdem die **Folge** $\{g_n(x)\}$ asymptotisch gegen $g(x)$, so gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b M[k|g_n(x) - g(x)|]\, dx = 0$, wo $0 < k < 1$.

2.1. Wir wollen jetzt eine Klasse der Räume von Folgen betrachten, die eine natürliche Verallgemeinerung der Klasse der Räume (l^α) ist. Wir betrachten wieder eine Funktion $M[u]$ mit denselben Eigenschaften wie früher und erklären als Raum (l^M) den Raum aller Folgen $\{a_i\}$, für welche ein $0 < k < 1$ existiert, so daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} M[k|a_i|] < +\infty.$$

Die Norm $\|a\|_M$ eines Elementes $a \equiv \{a_i\}$ aus (l^M) definieren wir durch

$$\|a\|_M = \text{Ob. Gr.} \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right| \quad \text{für} \quad \sum_{i=1}^{\infty} M'[|b_i|] \leqslant 1;$$

man beweist leicht, daß (l^M) bei dieser Normierung ein Raum vom Typus (B) ist. Die Bedingung (8) müssen wir im Falle der Räume (l^M) durch die ganz analoge Bedingung für kleine u

$$M[2u] \leqslant l M[u] \quad \text{für} \quad 0 \leqslant u \leqslant u_0, \tag{20}$$

ersetzen.

2.2. Es gelten hier ähnliche Sätze, wie für die Funktionenräume (L^M); die Beweise die nach dem Muster der entsprechenden Beweise für Funktionen zu führen sind, mögen dem Leser überlassen sein.

Erfüllt (l^M) die Bedingung (20), so gilt folgendes:

α') Der Raum (l^M) ist separabel; β') jedes lineare Funktional $A(a)$, $a \equiv \{a_i\}$ in (l^M) ist in der Form $A(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ darstellbar, wobei $\{b_i\} \in (l^{M'})$; γ') ist $\|b^{(n)}\|_{M'} \leqslant K$, $b^{(n)} \equiv \{b_i^{(n)}\}$, so existiert eine Teilfolge $b^{(n_p)}$ und ein Element $b \equiv \{b_i\} \in (l^M)$, so daß für jedes $\{a_i\} \in (l^M)$ $\lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^{(n_p)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.

Umgekehrt:

Wenn der Raum (l^M) *eine von den Eigenschaften* α'), β'), γ') *besitzt, so ist die Bedingung* (20) *erfüllt.*

Es gelten weiter die Sätze:

$M[u]$ *erfülle die Bedingung* (20); *damit* (l^M) *schwach kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß auch* $M'[v]$ *der Bedingung* (20) *genüge.*

Wenn für ein beliebiges $a \equiv \{a_i\}$ *aus* (l^M) *der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^{(n)} = A(a), \quad \{b_i^{(n)}\} \in (l^{M'}), \tag{21}$$

existiert, so ist $A(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *mit* $\{b_i\} \in (l^{M'})$.

Wenn für $M[u]$ *die Beziehung* $\lim_{u\to 0} M[2u](M[u])^{-1} = +\infty$ *besteht und für jedes* $a \equiv \{a_i\} \in (l^M)$ *der Grenzwert* (21) *vorhanden ist, so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $i(\varepsilon) = i_0$, *so daß*

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} M'[k|b_i^{(n)}|] \leqslant \varepsilon \qquad (n = 1, 2, 3\ldots),$$

und es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} M'[\tfrac{k}{2}|b_i^{(n)} - b_i|] = 0,$$

wobei

$$0 < k < 1, \; b_i = \lim_{n\to\infty} b_i^{(n)}, \; \{b_i\} \in (l^{M'}).$$

3.1. Die in dem Vorangehenden hervorgehobene weitgehende Analogie zwischen den Räumen (L^α) und (L^M) bezw. zwischen (l^α) und (l^M) läßt allgemein erwarten, daß viele, bei verschiedenen Gelegenheiten behandelte Probleme, in welchen man mit den

Räumen (L^α) bezw. (l^α) zu tun hat, eine sinngemäße Verallgemeinerung für den Fall der Räume (L^M), (l^M) gestatten. Manche dieser Probleme werden wir in einer späteren Arbeit behandeln; hier möge noch, bloß beispielweise, ein Problem aus der Theorie der Orthogonalentwicklungen behandelt werden.

Es sei $\{\varphi_i(x)\}$ ein Orthogonalsystem in (a, b); mit (L^M, L^N) bezeichnen wir die Menge aller Folgen $\{\lambda_i\}$, welche die folgende Eigenschaft aufweisen:

Wenn

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \varphi_i(x)$$

die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^M) ist, so ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i \varphi_i(x)$$

die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^N)[9].

Wenn das Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ in (C) abgeschlossen ist und aus beschränkten Funktionen besteht, so ist $(L^M, L^N) = (L^{N'}, L^{M'})$[10].

Es bezeichne $\{\lambda_i\}$ eine Zahlenfolge aus (L^M, L^N), $f(x)$ eine Funktion aus (L^M) und $U(f; x)$ diejenige Funktion aus (L^N), für welche $\lambda_i \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = \int_a^b U(f; x)\varphi_i(x)\,dx$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$. $U(f; x)$ ist für jedes $f(x) \epsilon (L^M)$ eindeutig bestimmt und stellt ein lineares Funktional in (L^M) dar[11]; mithin gilt mit einem konstanten K die Ungleichung $\| U(f; x)\|_N \leqslant K \| f(x)\|_M$. Es sei $h(x)$ eine beschränkte Funktion mit $\int_a^b N'[|h(x)|]\,dx \leqslant 1$; da $\{\varphi_i(x)\}$ in (C) abgeschlossen ist, so gibt es, wie leicht einzusehen, zu jedem $p > 0$ eine lineare

[9]) Verschiedene Sätze über die Mengen (L^α, L^β) und dgl. findet man in den Arbeiten: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklung (I), Studia Math. 1, (1929), S. 1—39; (III) Bull. Ac. Pol. (1932) S. 229—238; (IV) Studia Math. 5 (1935), S. 1—14.

[10]) Für das trigonometrische Orthogonalsystem wurde dieser Satz von A. Zygmund bewiesen, siehe a. a. O., S. 103—104.

[11]) Es genügt, einen Satz des Herrn S. Banach anzuwenden; S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, (1932), S. 41, Théorème 7.

Kombination $w_p(x) = \sum_{i=1}^{N(p)} c_i^{(p)} \varphi_i(x)$, so daß

$$\int_a^b N'[p|h(x) - w_p(x)|]\,dx \leqslant 1.$$

Nach (1), (4) gilt die Ungleichung

$$\left|\int_a^b U(f;x)h(x)dx - \int_a^b U(f;x)w_p(x)dx\right| \leqslant \frac{\|U(f;x)\|_N}{p}\int_a^b N\left[\frac{|U(f;x)|}{\|U(f;x)\|_N}\right]dx +$$

$$+ \frac{\|U(f;x)\|_N}{p}\int_a^b N'[p|h(x) - w_p(x)|]\,dx \leqslant 2\,\frac{\|U(f;x)\|_N}{p};$$

somit ist

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b U(f;x)\,w_p(x)\,dx = \int_a^b U(f;x)\,h(x)\,dx.$$

Da aber andererseits $\int_a^b U(f;x)\,w_p(x)\,dx = \int_a^b U(w_p;x)\,f(x)\,dx$, so existiert für jedes $f(x) \epsilon (L^M)$ der Grenzwert

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b U(w_p;x)\,f(x)\,dx = F(f),$$

und nach 1.3 ist $F(f) = \int_a^b \overline{U}(h;x)f(x)\,dx$, wo die Funktion $\overline{U}(h;x)$ dem Raume $(L^{M'})$ angehört. Wir haben also

$$\int_a^b U(f;x)\,h(x)\,dx = \int_a^b \overline{U}(h;x)\,f(x)\,dx.$$

Es besteht weiter, wegen $\int_a^b N'[|h(x)|]\,dx \leqslant 1$, die Ungleichung

$$\left|\int_a^b \overline{U}(h;x)f(x)dx\right| = \left|\int_a^b U(f;x)\,h(x)\,dx\right| \leqslant \|U(f;x)\|_N \leqslant K\|f(x)\|_M.$$

Hieraus folgern wir, daß für jede beschränkte Funktion $h(x)$ mit $\int_a^b N'[|h(x)|]\,dx \leqslant 1$ die Ungleichung $\|\overline{U}(h;x)\|_{M'} \leqslant \overline{K}$, also auch die Ungleichung

$$\int_a^b M'\left[\frac{|\overline{U}(h;x)|}{\overline{\overline{K}}}\right] dx \leqslant 1 \tag{22}$$

gilt. Es sei $g(x)$ eine Funktion, für welche $\int_a^b N'[|g(x)|]\,dx \leqslant 1$; wir wählen eine Folge $\{h_n(x)\}$ von beschränkten Funktionen, so daß $|h_n(x)| \leqslant |g(x)|$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = g(x)$ fast überall. Es ist $\int_a^b N'[|h_n(x)|]\,dx \leqslant 1$ also nach (22)

$$\int_a^b M'\left[\frac{|\overline{U}(h_n;x)|}{\overline{\overline{K}}}\right] dx \leqslant 1.$$

Somit gibt es eine Teilfolge $\{h_{n_i}(x)\}$ und eine Funktion $\overline{U}(g;x)$ aus $(L^{M'})$, so daß für jede beschränkte Funktion $\overline{f}(x)$ die Beziehung

$$\lim_{i\to\infty}\int_a^b \overline{U}(h_{n_i};x)\,\overline{f}(x)\,dx = \int_a^b \overline{U}(g;x)\,\overline{f}(x)\,dx$$

gilt. Setzen wir insbesondere $\overline{f}(x) = \varphi_p(x)$, so ist

$$\lambda_p \int_a^b h_{n_i}(x)\,\varphi_p(x)\,dx = \int_a^b \overline{U}(h_{n_i};x)\,\varphi_p(x)\,dx,$$

und durch den beiderseitigen Grenzübergang erhalten wir

$$\lambda_p \int_a^b g(x)\,\varphi_p(x)\,dx = \int_a^b \overline{U}(g;x)\,\varphi_p(x)\,dx.$$

Somit ist $(L^M, L^N) \subset (L^{N'}, L^{M'})$; man beweist ganz analog, daß $(L^{N'}, L^{M'}) \subset (L^M, L^N)$.