МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Р С Ф С Р

ВОРОНЕЖСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

на правах рукописи

В.И.ОВЧИННИКОВ

ПРОСТРАНСТВА ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

диссертация на русском языке
(01.002 - функциональный анализ и теория функций)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

В О Р О Н Е Ж
1971

Работа выполнена на кафедре уравнений в частных производных и теории вероятностей Воронежского ордена Ленина государственного университета имени Ленинского комсомола.

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор С.Г. Крейн.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессорГ.И.Кац,
доктор физико-математических наук, профессор И.С. Иохвидов.

Ведущее предприятие-Ленинградский государственный университет имени А.А.Жданова.

Автореферат разослан "____" ________________ 197 г.
Защита диссертации состоится "____" ________________ 197 г.

на заседании ученого совета математического факультета и факультета прикладной математики и механики Воронежского государственного университета по адресу: гор.Воронеж,Университетская пл. I, ВГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВГУ.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Некоммутативная теория функций берёт начало от знаменитых работ Дж.фон Неймана и Ф.Дж.Мюррея по теории алгебр операторов в гильбертовом пространстве. Основные результаты этой теории изложены в монографиях М.А.Наймарка "Нормированные кольца" и Ж.Диксмье "Алгебры операторов в гильбертовом пространстве". Существенный шаг вперед в некоммутативной теории функций был сделан И.Е.Сигалом [I], который ввел в расмотрение и детально исследовал пространства с мерой на проекторах $\Gamma=(H,\mathfrak{A},m)$, т.е. совокупность гильбертова пространства H алгебры Неймана $\mathfrak{A}$ ограниченных операторов в H и функции m (меры) на ортопроекторах из алгебры $\mathfrak{A}$. Это позволило ему построить некоммутативные аналоги пространств $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_\infty$ над пространством Γ и изучить основные свойства этих пространств. Таким образом И.Е.Сигалом был создан язык, на котором удобно было развивать некоммутативную теорию функций. Это послужило толчком для многочисленных исследований в основном американских и японских математиков.

Настоящая работа также принадлежит к указанному кругу идей. В ней выделяется и изучается класс измеримых операторов относительно алгебры Неймана $\mathfrak{A}$, для которых естественно вводится понятие s-чисел. С помощью s-чисел строятся пространства операторов, которые с одной стороны аналогичны симметричным пространствам скалярных функций, теория которых в последнее время интенсивно развивается в работах Е.М.Семенова и других авторов, с другой стороны аналогичны нормированным идеалам вполне непрерывных операторов, впервые введенных Дж.фон Нейманом и Р.А.Шаттеном (развернутое изложение см. в книге И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна "Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов").

Для симметричных пространств измеримых операторов удалось дать метод, с помощью которого на них переносится ряд интерполяционных теорем для линейных операторов в пространствах функций.

Как известно, И.Е.Сигал пришел к построению теории пространств с мерой на проекторах, отправляясь от исследования преобразования Фурье на некоммутативных группах. В настоящей работе также изучается проблема множителей для обратного преобразования Фурье на некоммутативной группе Ли с помощью двойных операторных интегралов, которые впервые были введены Ю.Л.Далецким и С.Г.Крейном. Развернутая теория этих интегралов и их применений была создана в работах М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка. Особенность применения двойных операторных интегралов в настоящей работе состоит в том, что они рассматриваются в пространствах, вообще говоря, неограниченных измеримых операторов.

В первой главе диссертации изучаются s-числа измеримых операторов. Следует отметить, что возможность введения s-чисел некоторых ограниченных операторов в алгебре со следом была указана в докладе А.Гротендика на семинаре Н.Бурбаки [2] . Там же без доказательств приведены основные свойства s-чисел таких операторов. Здесь(§1) s-числа вводятся для класса $C_0(\Gamma)$, вообще говоря, неограниченных измеримых операторов по свойствам близкого к классу вполне непрерывных операторов. Измеримый оператор $A \in C_0(\Gamma)$, если $n_A(\lambda) = m(I - E_\lambda) < \infty$ для всех $\lambda > 0$, где E_λ разложение единицы оператора $|A|$. Значения функции

$$s_A(\alpha) = \inf\{\lambda ;\ n_A(\lambda) < \alpha\} \tag{1}$$

называются s-числами оператора A .

Устанавливаются основные неравенства для s- чисел. Часть этих неравенств следует из минимаксимального принципа, доказанного для измеримых операторов: если $A \in C_0(\Gamma)$, то

$$s_A(\alpha) = \inf_{\mathcal{N},\ m\mathcal{N}^\perp < \alpha} \ \sup_{f \in \mathcal{N} \cap \mathcal{D},\ \|f\| \le 1} \|Af\| \tag{2}$$

где $\mathcal{D}$ - любое сильно плотное подпространство содержащееся в $\mathcal{D}(A)$. (Для факторов Неймана конечного типа минимаксимальный принцип установлен Ф.Дж.Мюрреем и Дж.фон Нейманом).

Из (2) следует аппроксимационное свойство s-чисел (теорема I.I)

$$S_A(\alpha) = \inf_{r(K)<\alpha} \|A-K\|_\infty \tag{3}$$

где $r(K)$ - метрический ранг оператора K.

Из соотношений (2) и (3) вытекают аналоги неравенств Фань Цюя. Из этих неравенств следует, что $C_0(\Gamma)\cap\mathfrak{A}$ - есть наименьший замкнутый двусторонний идеал алгебры $\mathfrak{A}$, содержащий все ограниченные операторы конечного метрического ранга.

По поведению s- чисел можно характеризовать различные классы операторов: ограниченные - s- числа ограничены, интегрируемые - функция $s_A(\alpha)$ интегрируема, конечного метрического ранга - функция $s_A(\alpha)$ имеет носитель конечной меры.

В §2 показывается, что с помощью s- чисел легко вводится сходимость по мере в классе $C_0(\Gamma)$, впервые определенная У.Ф. Стайнспрингом [3]. Из аналогов неравенства Фань Цюя легко выводятся её основные свойства. Показывается, что сходимость по мере метризуема, и что $C_0(\Gamma)$ с введенной метрикой является полным топологическим кольцом (теорема I.2).

Существенную роль играет аналог разложения Шмидта для положительных операторов класса $C_0(\Gamma)$ (§3), то есть представление вида

$$A = \int_0^\infty s_A(\alpha)\, d\tilde{E}_\alpha ,$$

где $\tilde{E}_\alpha$ некоторая спектральная мера.

Если пространство с мерой на проекторах Γ - непрерывно, то существует спектральная мера $\tilde{\tilde{E}}_\alpha$ такая, что

$$A = \int_0^\infty s_A(\alpha)\, d\tilde{\tilde{E}}_\alpha \tag{4}$$

$$A = -\int_0^\infty \tilde{\tilde{E}}_\alpha \, ds_A(\alpha) \tag{5}$$

$m(\tilde{\tilde{E}}_\alpha) = \alpha, \ (0 \leqslant \alpha \leqslant m(I))$.

При этом оказывается, что интеграл (5) можно понимать как интеграл Стилтьеса в пространстве $C_0(\Gamma)$ (лемма I.I).

Из (4) и (5) вытекают интегральные соотношения для s- чисел (§4). Например, если $A \in \mathcal{L}_1(\Gamma) + \mathfrak{A} \cap C_0(\Gamma)$, то

$$\int_0^t s_A(\alpha) d\alpha = \inf_{A=B+C} \{ \|B\|_{\mathcal{L}_1(\Gamma)} + t\|C\|_\infty \}$$

где $B \in \mathcal{L}_1(\Gamma)$, а $C \in \mathfrak{A} \cap C_0(\Gamma)$; если $A_1, A_2, \dots, A_n \in C_0(\Gamma)$, то

$$\int_{-0}^\infty s_{A_1 A_2 \cdots A_n}(\alpha) d\varphi(\alpha) \leqslant \int_{-0}^\infty s_{A_1}(\alpha) s_{A_2}(\alpha) \cdots s_{A_n}(\alpha) d\varphi(\alpha)$$

где $\varphi(\alpha)$ любая возрастающая вогнутая функция на $[0, \infty)$.

Во второй главе определяются и изучаются симметричные пространства измеримых операторов. Нормированное пространство E называется симметричным, если для любого $A \in E$ и любого $B \in C_0(\Gamma)$ из $s_B(\alpha) \leqslant s_A(\alpha)$ вытекает, что $B \in E$ и $\|B\|_E \leqslant \|A\|_E$.

Устанавливается, что эти пространства непрерывно вложены в $C_0(\Gamma)$. Для случая пространства с непрерывной мерой на проекторах, всякое симметрическое пространство непрерывно вложено в $\mathcal{L}_1(\Gamma) + \mathcal{L}_\infty(\Gamma)$

Вводятся аналоги пространств Лоренца $\Lambda[\varphi]$ и Марцинкевича $M[\varphi]$, для которых устанавливаются теоремы вложения (в предположении непрерывности пространства с мерой на проекторах). В случае пространства с конечной мерой доказываются теоремы двойственности для пространств $\Lambda[\varphi], M[\varphi]$.

С помощью метода, предложенного Е.М.Семеновым [5] для функциональных пространств, конструируется класс E_T симметричных пространств $E_T(\Gamma)$:

$$E_T(\Gamma) = \{ A \in C_0(\Gamma) ; \ \sup_{t \in T} \int_0^\infty s_A(\alpha) d\varphi_t(\alpha) < \infty \}$$

где $\{\varphi_t(\alpha)\}$ $(t \in T)$ произвольный набор возрастающих вогнутых функций на $[0,\infty)$.

Исследуется вопрос о сепарабельности симметричных пространств. Доказывается принадлежность классу E_T любого пространства сопряжённого сепарабельному симметричному пространству /теорема 2.11/; сами же сепарабельные симметричные банаховы пространства являются замыканием алгебры $\mathfrak{A}$ по норме некоторых пространств E_T и наследуют их нормы / теорема 2.12/. При доказательстве соответствующих теорем предполагается непрерывность и конечность меры на проекторах.

Третья глава посвящена интерполяционным теоремам для симметричных пространств.

Для слабо замкнутой подалгебры исходной алгебры Неймана, порождённой совокупностью операторов из $C_0(\Gamma)$, строится отображение, которое переводит пространство $\mathcal{L}_1(\Gamma)+\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$ на $\mathcal{L}_1(\gamma)+\mathcal{L}_\infty(\gamma)$, где γ -пространство с мерой на проекторах, соответствущее рассматриваемой подалгебре. Если пространство Γ имеет конечную меру, то это отображение совпадает с условным математическим ожиданием, которое изучалось Х.Умегаки[4]. Устанавливаются некоторые новые свойства условного математического ожидания. Обобщённые условные математические ожидания позволяют переходить от отображений, действующих в пространствах $E_T(\Gamma)$ к отображениям, действующим в более простых пространствах $E_T(\gamma)$ и обратно. Выбирая подалгебры коммутативными, можно установить связи между интерполяционными теоремами для операторов, действующих в пространствах измеримых функций с аналогичными теоремами для отображений в пространствах измеримых операторов. Отметим, что указанный метод для случая симметрично-нормированных идеалов вполне непрерывных операторов близок к методу, описанному в докторской диссертации М.З.Соломяка [8].

Получены аналоги интерполяционных теорем Ж.Марцинкевича, Б.С. Митягина, А.П.Кальдерона, Е.М.Семенова.

Приведем их формулировки.

Теорема I. (3.4, 3.5). Для того, чтобы пространство $E \subset \mathcal{L}_1(\Gamma) + \mathcal{L}^0_\infty(\Gamma)$ было интерполяционным (строго интерполяционным) между $\mathcal{L}_1(\Gamma)$ и $\mathcal{L}^0_\infty(\Gamma) = \mathfrak{A} \cap C_0(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $A \in E$ и $B \in C_0(\Gamma)$ из соотношения

$$\int_0^t s_B(\alpha)\,d\alpha \leqslant \int_0^t s_A(\alpha)\,d\alpha \qquad (t>0)$$

вытекало, что $B \in E$ ($B \in E$ и $\|B\|_E \leqslant \|A\|_E$).

Эта теорема является обобщением теоремы А.Кальдерона [9]. В частном случае симметрично нормированных идеалов вполне непрерывных операторов эта теорема доказана Г.И.Руссу.

Теорема 2. (3.6).Любое банахово сепарабельное или сопряженное сепарабельному симметричное пространство измеримых операторов над пространством с конечной непрерывной мерой - строго интерполяционно между $\mathcal{L}_1(\Gamma)$ и $\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$.

Эта теорема обобщает результаты Б.С.Митягина [7].

Теорема 3 (3.8). Пусть Γ и Γ_1 пространства с мерой на проекторах и пусть $1 \leqslant p < q < r$, $1 < p_1 < q_1 < r_1$, причем $p \leqslant p_1$, $r \leqslant r_1$ и $\frac{1}{q} = \alpha\frac{1}{p} + (1-\alpha)\frac{1}{r}$, $\frac{1}{q_1} = \alpha\frac{1}{p_1} + (1-\alpha)\frac{1}{r_1}$.

Пусть T линейное преобразование из $\mathcal{L}_p(\Gamma) + \mathcal{L}_r(\Gamma)$ в $C_0(\Gamma_1)$ ~~такое, что~~

$$\lambda\left[n_{T(A)}(\lambda)\right]^{\frac{1}{p_1}} \leqslant c\,\|A\|_{\mathcal{L}_p(\Gamma)}$$

$$\lambda\left[n_{T(A)}(\lambda)\right]^{\frac{1}{r_1}} \leqslant c_1\,\|A\|_{\mathcal{L}_r(\Gamma)}$$

тогда T непрерывно действует из $\mathcal{L}_{\varphi}(\Gamma)$ в $\mathcal{L}_{\varphi_1}(\Gamma_1)$.

Теорема 3 аналогична теореме Ж.Марцинкевича из теории функций.

Для пространств типа E_T над пространством с конечной мерой получен аналог теоремы Е.М.Семенова [5].

Обозначим $\varphi_{E_T}(\alpha) = \sup\limits_{t\in T} \varphi_t(\alpha)$, где $\{\varphi_t(\alpha)\}$ набор возрастающих вогнутых функций, определяющих $E_T(\Gamma)$.

Потребуем, чтобы оператор Π_s вида

$$\Pi_s(x)(\alpha) = \begin{cases} x(s\alpha), & \text{если } s\alpha < 1, \\ 0, & \text{если } s\alpha \geq 1. \end{cases}$$

непрерывно действовал в $E_T(0,1)$ и

$$\|\Pi_s\|_{E_T(0,1)\to E_T(0,1)} \leq c\cdot \sup_{\alpha} \frac{\varphi_{E_T}(\alpha)}{\varphi_{E_T}(s\alpha)}$$

Положим

$$E_T^{\beta}(\Gamma) = \{A \in C_0(\Gamma);\ s_A(\alpha)\alpha^{-\beta} \in E_T(0,1)\}$$

с нормой $\|A\|_{E_T^{\beta}(\Gamma)} = \|s_A(\alpha)\alpha^{-\beta}\|_{E_T(0,1)}$.

Теорема 4. (3.9). Пусть линейное отображение S непрерывно действует из $\mathcal{L}_{\frac{1}{\gamma}}(\Gamma)$ в $\mathcal{L}_{\frac{1}{\gamma-\Delta}}(\Gamma)$ при каждом $\gamma\in(\gamma_0,\gamma_1)$, $0\leq\Delta\leq\gamma_0<\gamma_1\leq 1$. Если

$$2^{\gamma_0} < \varliminf_{\alpha\to 0} \frac{\varphi_{E_T}(2\alpha)}{\varphi_{E_T}(\alpha)} \leq \varlimsup_{\alpha\to 0} \frac{\varphi_{E_T}(2\alpha)}{\varphi_{E_T}(\alpha)} < 2^{\gamma_1},$$

то S определено на $E_T(\Gamma)$ и непрерывно действует из $E_T(\Gamma)$ в $E_T^{\Delta}(\Gamma)$.

В заключение главы свойства условного математического ожидания используются для исследования ограниченных операторов из $C_0(\Gamma$

Устанавливается теорема о счетности множества собственных чисел для ограниченных операторов из $C_0(\Gamma)$, получается обобщение неравенств Г.Вейля.

Кроме этого решается задача М.Броера [10] о стабилизации относительной размерности ядер операторов $(I-T)^i$, где T – вполне непрерывный оператор относительно произвольной алгебры Неймана над сепарабельным гильбертовым пространством.

Двойные операторные интегралы дают естественные примеры трансформаторов, то есть линейных отображений, действующих в пространствах операторов. В четвертой главе , опираясь на теорию двойных операторных интегралов и результаты предыдущих глав, исследуется преобразование Фурье функций на действительной сепарабельной унимодулярной группе Ли. Для такой группы естественно вводятся правоинвариантные пространства $H^s(G)$ С.Л.Соболева. Показано, / теорема 4.1 /, что, если для некоторого s, $2s>\dim G$, $\varphi(x^{-1})\in H^s(G)$ и φ имеет компактный носитель, то трансформатор Φ , определяемый двойным операторным интегралом

$$\Phi(T)=\int_{G\times G}\varphi(yx^{-1})\,E_{dy}\,T\,E_{dx}, \tag{6}$$

где E_{dx} заданная спектральная мера в пространстве $\mathcal{L}_2(G)$ непрерывно действует в $\mathfrak{S}_1$ – идеале всех ядерных операторов в $\mathcal{L}_2(G)$ и пространстве $L(\mathcal{L}_2(G))$ всех ограниченных операторов в $\mathcal{L}_2(G)$. Эта теорема является распространением на некомпактные группы Ли результатов М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка.

В §3 определяется действие трансформатора (6) на, вообще говоря, неограниченных измеримых операторах из $\mathcal{L}_1(\Gamma_G)+\mathcal{L}_\infty(\Gamma_G)$

где Γ_G - пространство с мерой Планшереля на проекторах, соответствующее группе G. Показывается (теорема 4.4), что трансформатор Φ непрерывно действует в любом пространстве $E_T(\Gamma_G)$ и, что действие Φ в обратных образах Фурье совпадает с умножением на функцию $\varphi^{\vee}$.

В §4 с помощью двойных операторных интегралов доказывается теорема об интегрируемости преобразования Фурье финитной функции φ, $\varphi(x^{-1}) \in H^s(G)$ при некотором $s > \frac{\dim G}{2}$. Эта теорема усиливает признак интегрируемости полученный У.Ф.Стайнспрингом [II].

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [I], [II], [III], часть из них докладывалась в третьей зимней Воронежской математической школе.

Цитированная литература:

[1] I.E.Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann. Math.,57(1953),401-457. Русский перевод: Математика,6:1,/1962/,65-131.

[2] A.Grothendieck, Réarrangements de fonctions et inégalites de convexité dans les algèbres de von Neumann munies d'une trace, Seminaire Bourbaki, mars 1955.

[3] W.F.Stinespring, Integration theorems for gages and duality for unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc.,90,N1,(1959), 15-56. Русский перевод:Математика,6:2,/1962/,107-149.

[4] H.Umegaki, Conditional expectations in an operator algebras,III. Kodai Math. sem. rep. 11 (1959),51-64.

[5] Е.М.Семенов, Одна новая интерполяционная теорема, Функц. анализ, 2, в. 2, (1968), 68-80.

[6] Е.М.Семенов, Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах, Докл. АН СССР, I64, № 4 (1965), 746-749.

[7] Б.С.Митягин, Интерполяционная теорема для модулярных пространств, Математический сборник, 66 (1965), 473-482.

[8] М.З.Соломяк, Теория и приложения двойных операторных интегралов Стилтьеса, Докторская диссертация, ЛГУ, Ленинград.

[9] A.P.Calderon, Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz, Studia Math.,26 (1966),273-299.

[IO] M.Breuer, Fredholm Theories in von Neumann algebras I, Mathematische Annalen,178 (1968),243-254.

[II] W.F.Stinespring, Integrability of Fourier transforms for unimodular Lie groups, Duke Math. J.,26,N1,(1959),123-131.

Публикации по материалам диссертации.

[I] В.И.Овчинников, Симметричные пространства измеримых операторов, Докл.АН СССР, I9I, № 4 (1970),769-77I.

[II] В.И.Овчинников, О s - числах измеримых операторов, Функц. анализ, 4, в.3, (1970), 78-85.

[III] В.И.Овчинников, Симметричные пространства измеримых операторов II, Труды научно-исследовательского института математики ВГУ, в.3 (1971), 88-107.

ЛЕ 07636 от 27.XII.71 г. Заказ 472, тираж I25, формат 60х90 I/16, объем 0,7 п.л. Офсетная лаборатория ВГУ.