СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXIX, № 2 МАРТ — АПРЕЛЬ 1988

УДК 513.838 : 519.513

Р. И. ПИМЕНОВ

АКСИОМАТИКА ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО И ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЕН ПОСРЕДСТВОМ ПРИЧИННОСТИ

1. Решаемые задачи. На симпозиуме по геометрии в целом и основаниям теории относительности в г. Новосибирске в сентябре 1982 г. А. Д. Александров поставил как актуальную следующую задачу: дать аксиоматику общей теории относительности в духе хроногеометрии (исчерпывающий обзор по хроногеометрии см. в [1]). Хроногеометрией установлено, что специально-релятивистское пространство-время ${}^{n-1}R_n$ можно рассматривать как структуру

$$(M, <, \mathfrak{G}), \tag{1.1}$$

где M — множество, $<$ — отношение порядка (потенциальной причинности) на M, а $\mathfrak{G}$ — достаточно богатая группа автоморфизмов $\mathfrak{g}$: $(M, <) \to (M, <)$. Так как общерелятивистское псевдориманово пространство ${}^{n-1}V_n$, вообще говоря, не имеет автоморфизмов, то этот подход непосредственно неприменим для ${}^{n-1}V_n$ (см. [1, § 26]). Мы покажем, что можно представить ${}^{n-1}V_n$ в виде структуры (1.1), если понимать $\mathfrak{G}$ как автоморфизмы $\mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$ на множестве функций f из $(M, <)$ в $(\mathbf{R}, <)$, сохраняющих порядок. Другая трудность при аксиоматизации ${}^{n-1}V_n$ состоит в том, что на ${}^{n-1}V_n$ могут существовать замкнутые временноподобные (циклы) и, вообще говоря, отношение порядка $<$ на M ввести нельзя. Мы используем наше отношение $\prec$, названное нами отношением локального следования [2, гл. 1, § 2.2; 3, § 9], которое дает возможность охватить аксиоматикой все ориентируемые во времени многообразия, включая имеющие циклы, а заодно и получить топологию на M как производное, а не первичное понятие. В хроногеометрическом подходе множество M предполагается наделенным аффинной структурой [1, гл. 1—3], а нам достаточно будет, чтобы на M была задана некоторая гладкая (дифференцируемая) структура F.

Как и в специально-релятивистском случае, хроногеометрический подход позволяет определить метрику (метрический тензор) однозначно с точностью до скалярного множителя $\lambda \in F$, если вести рассмотрение в классе римановых пространств. Если же рассматривать финслеровы пространства (анизотропное в бесконечно малом пространство-время), то число метрик (финслеровых метрических тензоров), совместимых с данной причинной структурой ($<$ или $\prec$), резко возрастает. Например, если $g_{ik}x^ix^k = 0$ задает световой конус на M, то финслерова длина вектора x может [4] равняться как $\sqrt{g_{ik}x^ix^k}$, так и $(g_{ik}a^ix^k)^\alpha \ (\sqrt{g_{jl}x^jx^l})^{1-\alpha}$, где a — произвольный фиксированный вектор при $g_{ik}a^ia^k = 0$ и $-1 < \alpha < 1$. Поэтому мы даем каузальную аксиоматику финслеровых кинематик. Оказывается, в случае финслеровых кинематик необходимо пополнить структуру (1.1) оператором L: $M^{[0,1]} \to \mathbf{R}$ длины дуги кривой γ: $[0, 1] \mapsto M$ или чем-нибудь эквивалентным, устранив, конечно, группу $\mathfrak{G}$.

2. Определения и аксиомы в случае общей теории относительности. Бинарное антисимметрическое отношение $\prec$ называется отношением *локального следования*, если оно удовлетворяет аксиоме локальной транзитивности

$$(\exists p(p \prec a \,\&\, p \prec b \,\&\, p \precsim c) \vee \exists p(a \prec p \,\&\, b \prec p \,\&\, c \prec p)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a \prec b \,\&\, b \prec c \Rightarrow a \precsim c). \qquad (2.1)$$

Вообще, из $a \prec b \prec c$ не вытекает $a \prec c$, и допускается цепочка $a \prec b \prec \prec c \prec a$. На окружности радиуса r с предписанной ориентацией ω можно ввести отношение $\prec$, положив, например, $a \prec b$, если a предшествует b в смысле ω, а $\widehat{ab} < \frac{2\pi r}{3}$. В этом случае возможна цепочка $a \prec b \prec c \prec \prec d \prec a$. Обозначим «будущее» через $p^+ = \{x | p \prec x\}$ и «интервал» — через $(a, b) = \{x | a \prec x \prec b \,\&\, a \prec b\}$.

Интуиция обычно связывает с порядком, возрастающими функциями и другими объектами над порядком одномерные примеры. Поэтому приведем несколько образцов существенно неодномерного порядка, ограничившись случаем двумерной плоскости в координатах (t, x).

I. Порядок задаем так: $(t, x) \prec (t', x')$ тогда и только тогда, когда $t' - t > |x' - x|$. Ясно, что всякая $f(t, x) = at + bx + c$ при $a \geqslant |b|$ — возрастающая (изотонная) функция, т. е. $(t, x) \prec (t', x') \Rightarrow f(t, x) < < f(t', x')$, а при $a < |b|$ та же f невозрастающая. Градиент $(\partial_t f, \partial_x f) = = (a, b)$ входит во внутрь конуса $t > |x|$ при $a > |b|$.

II. Порядок задаем так: $(t, x) \prec (t', x') \Leftrightarrow t' - t > \log(1 + |x' - x|)$. Теперь функция f при $a > |b|$ уже не возрастающая на всей плоскости. Но для полосы $-x_0 < x' - x < x_0$ при тривиально находимом x_0 она остается изотонной.

III. $(t, x) \prec (t', x') \Leftrightarrow t' - t > \sqrt{|x' - x|}$. На области $-a^2 < x' - x < < \infty$ функция $f(t, x) = at + x + c$ возрастает при $a > 0$, а на $-\infty < < x' - x < a^2$ — при $a < 0$. Общий предел таких функций для $a \to 0$ оказывается нигде в окрестности нуля не возрастающей функцией $f(t, x) = x + c$. Другие примеры см. в [2, 5, 6].

Известно определение гладкости F на топологическом n-многообразии M_n. Для нас существенно, что F — подмножество непрерывных отображений f из M_n в $\mathbf{R}$, которые удовлетворяют следующим требованиям: 1) область задания $\operatorname{dom} f$ открыта у всякой $f \in F$; 2) для любой $p \in M_n$ существуют n функций $f_k \in F, p \in \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{dom} f_k$ таких, что не найдется нетривиальной функции g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ класса C^∞, при которой $g(f_1, \ldots, f_n) = = \text{const}$ на $f_1 \times \ldots \times f_n \left(\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{dom} f_k\right) \subset \mathbf{R}^n$ (тривиальная функция — это $g = \text{const}$); комплект из n функций из F, удовлетворяющих этому требованию на окрестности U, обеспечивает гомеоморфизм U на область в $\mathbf{R}^n$ и называется *картой на* U (или в точке $p \in U$); 3) преобразование координат, соответствующее двум картам, C^∞-дифференцируемо *).

Важно множество $F_p = \{f \in F | p \in \operatorname{dom} f\}$ заданных в точке p гладких функций f. Коль скоро задана C^∞-гладкость F, операторы дифференцирования X: $F_p \mapsto \mathbf{R}$ образуют n-мерное касательное векторное пространство, обозначаемое через T_pM, а градиенты $\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) \middle| f \in F_p\right\}$ образуют n-мерное кокасательное пространство T_p^*M. Обычно градиенты называются дифференциалами, обозначаются символом df и определяются как тот ковектор, свертка которого с вектором X дает производную от f по направлению X. При данных $p \in M$, $f \in F_p \backslash A$ и $A \subset F_p$, если существуют $f_k \in A$, для которых $\lim_k df_k(p) = df(p)$ (в смысле обычной топологии

*) В [3, с. 120, 8, 9-я строки сверху] имеется опечатка. Следует читать: «Найдется C^∞-дифференцируемая функция f: $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, для которой $f(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}) = = \text{const}$ на некоторой окрестности точки p». Благодарю В. И. Кузьминова, отметившего эту описку.

n-мерного векторного пространства T_p^*M), говорим, что f — *пограничная в р к А функция.*

Считаем, что $f \in F_p$ *локально-изотонна в точке* $p \in M_n$, если у p найдется окрестность, в которой $x \prec y$ влечет $fx < fy$. Говорим, что f *локально-изотонная в области*, если она локально-изотонна в каждой точке области. Физическая интерпретация изотонных функций — *часы.* Часы — это такое датирование событий, при котором более раннему событию сопоставляется более ранняя дата. Правда, так как $f\colon M_n \to \mathbf{R}$, а $n > 1$ (обычно в хроногеометрии $n \geqslant 3$), то возможно, что некоторые никак не соотнесенные события получают одну и ту же дату и, вообще, из $fx < fy$ не следует, будто $x \prec y$ (ср. ниже ДА$_2$). Множество всех локально-изотонных функций из F_p обозначаем через F_p^+, т. е. $f \in F_p^+$ означает, что f локально-изотонна на некоторой (возможно, своей для конкретной f) области, содержащей точку p. Если $f \in F_p^+$, а df — ее градиент и имеется такая окрестность $U \subset T^*M$ (т. е. $U = \{(q, Z) \mid q \in V \;\& \;\& \; Z \in W_q\}$, $V \subset M_n$, $W_q \subset T_q^*M$) градиента $(p, df(p))$, что для всякой $g \in F_p$ из $(q, dg(q)) \in U$ вытекает $g \in F_p^+$, то f называем *сильно-изотонной* (в p). Отметим, что функция может быть изотонной, не будучи сильно-изотонной; такова $f(t, x) = t \pm x + c$ в примере 2.1. Двойственным образом определяются *локально-антитонные* $f \in F_p^-$ и *сильно-антитонные функции.*

Рассмотрим структуру

$$(M, \prec, F, \{\mathfrak{G}_p \mid p \in M\}), \tag{2.2}$$

где M — множество, $\prec$ — отношение локального следования, $F \subset \mathbf{R}^M$ и $\mathfrak{G}_p \subset M^M$. К этой структуре относятся аксиомы ОТО$_{1-4}$ и ДА$_{1-3}$.

ОТО$_1$. Семейство $\{(a, b) \mid a, b \in M\}$ всех интервалов в M можно принять за базис некоторой хаусдорфовой топологии T, причем (M, T) оказывается n-мерным топологическим многообразием со счетной базой, а в его алгебре непрерывных функций содержится постулированное множество F, удовлетворяющее аксиомам C^∞-гладких функций.

Требование, чтобы интервалы составляли базис топологии, налагает определенные условия на интервалы (см. [2, гл. 2]). В частности, будущее открыто, а непустое пересечение любых двух интервалов содержит интервал вместе с его концами (ср. аксиомы ТК$_{0-2}$ в [5]). Такая топология называется *интервальной.*

ОТО$_2$. Множество сильно-изотонных в точке p функций непусто для каждой p.

ОТО$_3$. Если некоторая $f \in F_p$ является пограничной и к множеству сильно-изотонных функций, и к множеству сильно-антитонных функций в p, то $df(p) = 0$.

Аксиома ОТО$_2$ нарушается в галилеево-ньютоновом случае, а ОТО$_3$ — в примере III.

Диффеоморфизм $\mathfrak{g}$, оставляющий неподвижной точку $p \in M$, порождает отображение $F_p \mapsto F_p$ по формуле $f \mapsto f \circ \mathfrak{g}$. Через f_U обозначим f, у которой $U = \operatorname{dom} f$.

ОТО$_4$. Для любой точки $p \in M_n$ множество $\mathfrak{G}_p$ есть псевдогруппа диффеоморфизмов $\mathfrak{g}\colon U \mapsto V$ $(U, V \subset M)$ с инвариантной $p \in U \cap V$, удовлетворяющая двум условиям: 1) если f_V сильно-изотонна в p, то при любом $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}_p$ функция $f_U = f_V \circ \mathfrak{g}$ также сильно-изотонна в p, 2) если f_U и f_V — функции, пограничные в точке p к сильно-изотонным в p, но сами не сильно-изотонные в p, то найдется $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}_p$ при $df_U = df_V d\mathfrak{g}(p)$.

Этих аксиом уже достаточно (см. [5, 6], где они сформулированы в несколько более общем случае в виде ГК$_{1-2}$) для однозначного (с точностью до множителя) получения псевдориманова пространства ${}^{n-1}V_n$ (лоренцева многообразия, как часто пишут). Но здесь возникает такая проблема. В ${}^{n-1}V_n$ известным образом выделяется класс временноподобных кривых и с их помощью локально (в окрестности U, построенной с помощью экспоненциального отображения $T_pM \mapsto M$) можно ввести отношение порядка $<_u$. Для ориентируемых во времени пространств ${}^{n-1}V_n$ можно даже превратить $\{<_U \mid U \subset M\}$ в отношение локального следования $\prec$. Будет ли так полученное производное отношение порядка совпадать (или как-то согласовываться) с первичным, исходным отношением порядка? Вообще говоря, нет, но при выполнении дополнительных аксиом ДА$_{1-3}$ будет совпадать.

Кривая γ: $[0, 1] \mapsto M$ называется *изотонной*, если для достаточно близких $s, t \in [0, 1]$ из $s < t$ следует $\gamma s \prec \gamma t$, и *каузальной*, если следует $\gamma t \in \overline{(\gamma s)^+}$, где черта сверху — замыкание в интервальной топологии.

ДА$_1$. Если $p, q \in (a, b)$, то $\overline{(p, q)} \subset (a, b)$ и в той же интервальной топологии для достаточно близких точек p и q интервал (p, q) всегда связен (ср. ТК$_{3-4}$ в [5]).

ДА$_2$. Любые два причинно-несвязанных и близких события можно отделить некоторыми «часами», т. е. сильно-изотонной функцией:

$$\forall p\, \exists U\, \forall a \forall b\; a, b \in U \in T \;\&\; a \notin \overline{b^+} \;\&\; b \notin \overline{a^+} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists f \textit{ сильно-изотонная на области } U \textit{ при } fa < fb. \tag{2.3}$$

ДА$_3$. Если точки p и q можно соединить изотонной кривой γ (т. е. $\gamma 0 = p$ и $\gamma 1 = q$), то p и q можно соединить C^1-дифференцируемой изотонной кривой.

3. Теоремы о римановой кинематике.

Теорема 1. *Если для структуры $(M, \prec, F, \{\mathfrak{G}_p\})$ выполнены аксиомы* ОТО$_{1-4}$, *то на (M_n, F) с точностью до скалярной функции $\lambda \in F$ однозначно определен тензор $g_{ik}(p)$ сигнатуры $(+ - \ldots -)$ такой, что (M_n, F, g_{ik}) является ориентируемым во времени многообразием.*

Доказательство. Рассмотрим в кокасательном пространстве T_p^*M множество дифференциалов сильно-изотонных в p функций; обозначим его символом 0_p^{*+}. По ОТО$_1$ это рассмотрение корректно, по построению и определению сильно-изотонности — открыто, по ОТО$_2$ оно непусто и очевидно, что $0_p^{*+} + 0_p^{*+} \subset 0_p^{*+}$ и $\lambda 0_p^{*+} \subset 0_p^{*+}$ при $\lambda > 0$. Таким образом, 0_p^{*+} есть клин. Докажем, что $\overline{0_p^{*+}}$ — это конус с острой вершиной. Введем 0_p^{*-} как множество дифференциалов сильно-антитонных функций, заметим, что $0_p^{*-} = -0_p^{*+}$, и рассмотрим $Q = \partial 0_p^{*+} \cap \partial 0_p^{*-}$. Если $a \in Q$, то из $a = df \in \partial 0_p^{*+}$ заключаем, что f — пограничная к сильно-изотонным, а из $a = df \in \partial 0_p^{*-}$ — пограничная к сильно-антитонным функция. Тогда согласно ОТО$_3$ $df = 0$, т. е. $a = 0$ и вершина $\overline{0_p^{*+}}$ состоит из одной точки 0. В касательном пространстве T_pM введем сопряженный конусу 0_p^{*+} конус 0_p^+ относительно естественной операции $df \cdot X = Xf(p)$ формулой

$$0_p^+ = \operatorname{int}\{X \mid \forall f \in F_p^+ \;\; Xf > 0\} \tag{3.1}$$

(в теории выпуклых функций обычно изучают полярный конус [7], отличающийся от сопряженного знаком неравенства). Очевидно, что $0_p^+ \subset T_pM$ — также непустой открытый конус с острой вершиной. Докажем, что он эллиптический. В силу ОТО$_4$ в T_p^*M действует линейная группа (дифференциалов диффеоморфизмов из $\mathfrak{G}_p$) G, относительно которой конус 0_p^{*+} инвариантен (в силу первого условия ОТО$_4$), а на границе $\partial 0_p^{*+}$ эта группа транзитивна на множестве лучей (в силу второго условия ОТО$_4$). Отсюда конус $\overline{0_p^{*+}}$ строго выпуклый (наличие неэкстремальных лучей из $\partial 0_p^{*+}$ противоречило бы совмещаемости любых двух лучей линейным автоморфизмом конуса), поэтому применима теорема 9 из [8, § 7], согласно которой конус с такой группой автоморфизмов эллиптичен (см. также п. (д) доказательства теоремы 1 в [1, § 6]). Итак, 0_p^{*+}, а значит, и 0_p^+ эллиптические. Так как эллиптический конус $\partial 0_p^+$ задается с точностью до множителя уравнением

$$\partial 0_p^+ \cup \partial 0_p^- = \{X \in T_pM \mid g_{ik}(p) X^i X^k = 0\}, \tag{3.2}$$

где g_{ik} имеет сигнатуру $(+ - \ldots -)$, и все рассматриваемые функции гладкие, существование тензора g_{ik} доказано. Из двух половинок конуса $g_{ik}(p) X^i X^k > 0$ выберем ту, которая соответствует 0_p^+. Так как последний определяется через $\prec$, а это отношение задано на M, а не на его подобластях, то вопросов о согласовании 0_p^+, 0_q^+ не возникает и, следовательно, (M_n, F, g_{ik}) — ориентируемое во времени лоренцево многообразие.

Определение. Пусть (M_n, F, g_{ik}) — ориентируемое во времени лоренцево многообразие с фиксированной ориентацией конуса $g_{ik}X^iX^k > 0$. Будем говорить, что кривая γ *временноподобна*, если она кусочно-гладкая и ее касательный вектор $\gamma_* t$ лежит в положительной половине конуса $g_{ik}(\gamma t) X^i X^k > 0$. Будем говорить, что $y \vdash x$, если найдется открытое множество U, содержащееся в невырожденном образе экспоненциального отображения, и в нем точки a и b со следующими свойствами: найдутся 1) временноподобные из a в x и из x в b, лежащие в U, 2) временноподобные из a в y и из y в b, лежащие в U, 3) временноподобная из x в y, лежащая в U.

Теорема 2. *Если* (M_n, F, g_{ik}) — *ориентируемое во времени лоренцево многообразие, то* $(M, \vdash, F)$ *удовлетворяет аксиомам* ОТО$_{1-3}$ *и в каждой точке* $p \in M$ *существует* $\mathfrak{G}_p$, *удовлетворяющая* ОТО$_4$.

Доказательство. В силу ориентированности во времени не возникает проблемы согласования направления геодезических на пересечении разных U и V, поэтому определение $\vdash$ корректно. Так как $(U, \vdash)$ по определению изоморфна части ${}^{n-1}R_n$, заданной в касательном пространстве, то в U нет замкнутых временноподобных, а потому $\vdash$ антисимметрично. Локальная транзитивность тривиальна, ибо на U выполняется транзитивность. По той же причине $\{x | x \vdash p\}$ открыто и т. д., так что выполняется аксиома ОТО$_1$. Рассматривая теперь изотонные относительно $\vdash$ функции, замечаем, что их градиенты суть векторы из положительной половинки конуса $g_{ik}X^iX^k > 0$, а следовательно, для них тривиально выполняются аксиомы ОТО$_{2,3}$. Псевдогруппа $\mathfrak{G}_p$ непосредственно строится по матрице (G_k^i), представляющей лоренцевы преобразования конуса $g_{ik}X^iX^k = 0$.

Каузальность (временноподобность и т. д.) в первичном смысле будем обозначать как $\prec$-каузальность, а в порожденном — как $\vdash$-каузальность. Установим связи между $\prec$-каузальностью и $\vdash$-каузальностью.

Теорема 3. *Если для структуры* $(M, \prec, F, \{\mathfrak{G}_p\})$ *выполнены аксиомы* ОТО$_{1-4}$ *и* ДА$_1$, *то у всякой* C^1-*дифференцируемой* $\prec$-*каузальной кривой* γ *касательная* γ_* *лежит в положительной половине конуса* $g_{ik}X^iX^k \geqslant 0$.

В самом деле, по определению $s < t \Rightarrow \gamma t \in \overline{(\gamma s)^+}$. Взяв любую изотонную функцию f, будем иметь $s < t \Rightarrow f \circ \gamma s \leqslant f \circ \gamma t$, откуда $\frac{d}{dt} f \circ \gamma \geqslant 0$ и, следовательно, $\gamma_* \in \overline{0_\gamma^+}$, т. е. γ_* в положительной половине конуса $g_{ik}X^iX^k \geqslant 0$, чем и завершается доказательство.

Теорема 4. *Если выполнены аксиомы* ОТО$_{1-4}$ *и* ДА$_{1-2}$, *то всякая* C^1-*дифференцируемая кривая* $\prec$-*каузальна тогда и только тогда, когда она* $\vdash$-*каузальна*.

Первая половина, т. е. то, что из $\prec$-каузальности вытекает $\vdash$-каузальность, доказана в теореме 3. Осталось показать, что если $\gamma_* \in \overline{0_\gamma^+} \setminus 0$, то $s < t \Rightarrow \gamma t \in \overline{(\gamma s)^+}$. Для этого достаточно сослаться на теорему 31 из

[5], а корректность ссылки оправдана тем, что формулировка аксиомы $ДА_2$ совпадает с формулировкой аксиомы $ГК_3$.

Теорема 5. *Если выполнены* $ОТО_{1-4}$ *и* $ДА_{1-3}$, *то для достаточно близких точек* $p \prec q$ *равносильно* $q \vdash p$.

В самом деле, из теоремы 4 вытекает, что $q \vdash p \Rightarrow p \prec q$. Пусть $p \prec q$. Тогда по теореме 11 из [5] для достаточно близких p и q существует $\prec$-изотонная кривая γ из p в q. В силу $ДА_3$ существует C^1-дифференцируемая $\prec$-изотонная кривая μ из p в q, а по теореме 3 она временноподобна, так что $q \vdash p$.

4. Финслерова кинематика и ее аксиоматика. По определению [3, 9, 10] *финслерово многообразие* представляет собой открытую область $\mathfrak{M} \subset TM$ (где TM — касательное расслоение с проекцией π: $TM \mapsto M$), не содержащую нулевого вектора $0 \in T_pM$ ни при какой точке $p \in M$ (последнее требование связано с тем, что в нуле метрики обычно недифференцируемы). Финслеров вектор есть элемент $(\mathfrak{p}, Z)$ из $\mathfrak{M} \times T_pM$ при условии, что $\pi\mathfrak{p} = p$. Аналогично вводятся финслеровы тензоры. Финслерова связность состоит из: 1) фиксированного спуска (лифта) ν: $T_\mathfrak{p}\mathfrak{M} \mapsto T_pM$, где $T_\mathfrak{p}\mathfrak{M}$ — касательное к $\mathfrak{M}$ пространство, при $\pi\mathfrak{p} = p$ (в координатной записи $\nu^k(\dot{p}, \dot{Z}) = \dot{Z}^k + N^k_l(p, Z)\,\dot{p}^l$); 2) дифференцирования ∇_Φ на градуированной алгебре финслеровых тензоров при $\Phi \in T_\mathfrak{p}\mathfrak{M}$. Для каждого тензора A вводятся еще горизонтальная $A_{,k}$ и вертикальная $A_{;k}$ ковариантные производные условием $\nabla_\Phi A = A_{,k}(d\pi\Phi)^k + A_{;k}(\nu\Phi)^k$, где $d\pi$ — дифференциал проекции π, т. е. $d\pi$: $T_\mathfrak{p}\mathfrak{M} \mapsto T_pM$. В координатной записи ковариантные производные выражаются аналогично случаю аффинной связности компонентами Γ^i_{jk} для производных по точкам $p \in M$ и компонентами C^i_{jk} для производных по векторам $X \in T_pM$. Обычно ν и ∇ связаны некоторым условием (тензор девиации-склонения равен нулю), которое в координатах выражается через $N^i_k(p, Z) = Z^j F^i_{jk}(p, Z)$ при $F^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - C^i_{jl}N^l_k$, так что при данной ∇ спуск ν определен однозначно, поэтому в дальнейшем мы не будем упоминать спуск.

Финслерова кинематика представляет собой структуру $(M_n, F, \mathfrak{M}, \nabla, \tau)$, подчиненную следующим условиям. 1. В каждом T_pM задан непустой открытый конус с острой вершиной, обозначаемый 0^+_p. 2. По определению $\mathfrak{M} = \{0^+_p \mid p \in M\}$ и τ: $\mathfrak{M} \mapsto (0, \infty)$ — финслерова гладкая скалярная функция $\tau = \tau(p, Z)$, $Z \in 0^+_p$. 3. Функция $\tau(p, Z)$ положительно-однородна и вогнута по $Z \in 0^+_p$, а $\lim\limits_k \tau(p, Z_k) = 0$ при $Z_k \to \partial 0^+_p$. Производные $\dot{\partial}_k$ по Z от τ^2 образуют ковектор и тем самым возникает отображение h: $T_pM \mapsto T^*_pM$, называемое *сопрягающим*, $h(X) = \frac{1}{2}\dot{\partial}\tau^2(X)$. Матрица Якоби $h_{ik} = \frac{1}{2}\dot{\partial}_i\dot{\partial}_k\tau^2$ этого отображения обычно называется *метрическим финслеровым тензором* и $h_k(X) = h_{ik}(X)X^i$. Если h не вырождено, т. е. $\operatorname{ran} h_{ik} = n$, то финслерова кинематика называется *регулярной*. 4. Подструктура $(\mathfrak{M}, \nabla)$ — это пространство финслеровой связности, причем связность имеет симметричные компоненты F^i_{jk} и C^i_{jk} и ее склонение равно нулю, а с сопрягающим отображением при всяком $\Phi \in T_\mathfrak{p}\mathfrak{M}$ связность согласована диаграммой

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{\nabla\Phi} & T_pM \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ T^*_pM & \xrightarrow{\nabla\Phi} & T^*_pM \end{array} \qquad (4.1)$$

Это стандартное определение финслеровой кинематики. Обычно рассматриваемая финслерова геометрия с положительно определенным метрическим финслеровым тензором h_{ik} получается заменой в пп. 3 указанных там условий на условие «τ выпукла на T_pM» и отбрасыванием пп. 1. Более общая финслерова геометрия, соответствующая метрике произвольной сигнатуры и до сих пор не исследуемая, получается заменой условий из пп. 3 на условие «τ — седловая функция на T_pM» с модификацией пп. 1. Иногда связность не включается явно в определение, как, например, в римановом случае, когда подразумевается общепринятое построение римановой связности по метрике. Мы покажем, что это определение равносильно нижеследующему аксиоматическому посредством введения аксиом $ФК_{1-6}$ и $ДА_{1-3}$ для структуры (4.2). Естественно, в аксиоматизируемой структуре будет отсутствовать группа автоморфизмов, ибо световой конус анизотропного пространства-времени, вообще говоря, автоморфизмов не допускает.

Рассмотрим структуру

$$(M, \prec, F, L), \tag{4.2}$$

где M, $\prec$ и F те же, что в формуле (2.2), а $L \in \mathbf{R}^{(M^{[0,1]})}$ — некоторый оператор на множестве кривых γ: $[0, 1] \mapsto M$ со значениями в $\mathbf{R}$, который назовем *длиной* кривой γ от $\gamma 0$ до $\gamma 1$.

Определение. Будем называть C^1-дифференцируемую кривую γ *допустимой*, если для всякой ее поддуги $\mu \subset \gamma$ выполняется неравенство $L(\mu) > 0$.

Определения и первые две аксиомы те же, что и в римановом случае: $ФК_1 = ОТО_1$, $ФК_2 = ОТО_2$.

Следующие аксиомы относятся к допустимым кривым.

$ФК_3$. При всякой точке $p \in M$ множество касательных к допустимым кривым, выходящим из p, непусто и открыто в T_pM. Обозначим его символом 0_p^+.

$ФК_4$. При всякой точке $p \in M$ кривая γ, выходящая из p, допустима тогда и только тогда, когда производная вдоль нее от любой сильно-изотонной функции положительна в точке p.

$ФК_5$. При всякой точке $p \in M$ для любой допустимой кривой γ, выходящей из p, существует производная от ее длины в p по любой гладкой (относительно F) параметризации. Эта производная как функция точки p и кривой γ_* сама оказывается гладкой функцией. Если две допустимые кривые имеют в p общую касательную, то производные длин вдоль них совпадают. Если из p выходит семейство γ_k допустимых кривых при $\gamma_{k*} \to \partial 0_p^+$ (см. $ФК_3$), то $\lim\limits_k \frac{d}{dt} L(\gamma_k) = 0$.

Определение. Допустимая кривая называется *экстремалью*, если: 1) ее можно варьировать в классе допустимых кривых в любом направлении так, что она останется внутренней точкой вариации, 2) при вариации этой кривой вариация ее длины равна нулю.

Первое требование избыточно для финслеровой геометрии с положительно определенной h_{ik}, а потому не отмечается и при переносе теории на сигнатуру $(+ - \ldots -)$. Однако наличие «вращающихся фотонов», упомянутых в [11, § 1; 3, § 6], делает его необходимым в кинематиках. Без него нельзя утверждать, будто бы экстремаль удовлетворяет уравнению Эйлера.

$ФК_6$. Через всякую точку p в любом направлении $X \in T_pM$, в котором выходит хотя бы одна допустимая кривая, выходит не более одной экстремали.

Дополнительные аксиомы в финслеровом случае те же, что выше.

5. Теоремы о финслеровой кинематике.

Теорема 6. *Если структура $(M, \prec, F, L)$ удовлетворяет аксиомам $ФК_{1-4}$, то при каждой точке $p \in M$ в T_pM задан непустой открытый конус 0_p^+ с острой вершиной.*

Как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что непустой открытый конус 0_p^{*+} есть в T_p^*M, а из ФК$_{3-4}$ прямо следует существование конуса $0_p^+ \subset T_pM$. Согласно ФК$_4$ эти конусы сопряжены, что было бы невозможно, если бы один из них имел вершиной не точку, а линейное подпространство (тогда сопряженный был бы коразмерности этого подпространства и не был бы открыт в T_pM). Теорема доказана.

Теорема 7. *Если структура* $(M, \prec, F, L)$ *удовлетворяет аксиомам* ФК$_{1-6}$, *то однозначно определяются* $\mathfrak{M}$, ∇ *и* τ, *относительно которых* $(M_n, F, \mathfrak{M}, \nabla, \tau)$ *оказывается регулярной финслеровой кинематикой, причем*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \tau(\gamma t, \gamma_* t)\, dt, \tag{5.1}$$

$$\tau(p, X) > 0 \Leftrightarrow X \in 0_p^+. \tag{5.2}$$

Доказательство. Положим $\mathfrak{M} = \{0_p^+ \mid p \in M\}$. В силу аксиомы ФК$_5$ для любых $p \in M$, $X \in 0_p^+$ однозначно определяется число $a = \frac{d}{dt} L(\gamma)$ при $\gamma_* = X$ (так как L определен на кривых, а не на путях, то $L(\gamma)$ не зависит от параметризации, а $\frac{d}{dt} L(\gamma)$ зависит). По той же аксиоме a является гладкой функцией от p и X, и потому можно положить $\tau(p, X) = a$. Отсюда вытекает выполнение равенства (5.1). Дабы этот интеграл не зависел от параметризации, необходимо, чтобы $\tau(p, X)$ была положительно-однородна от $X \in 0_p^+$. Так как экстремаль такого функционала описывается уравнением Эйлера, то для экстремали

$$\ddot{x}^k \dot{\partial}_i \dot{\partial}_k \tau(x, \dot{x}) = \partial_i \tau(x, \dot{x}) - \dot{x}^k \partial_k \dot{\partial}_i \tau(x, \dot{x}). \tag{5.3}$$

Если $\operatorname{ran} \dot{\partial}_i \dot{\partial}_k \tau < n - 1$, то степень произвола в решении относительно $\ddot{x}^k$ превышает допустимый одномерный произвол в выборе параметризации, и поэтому для выполнения аксиомы ФК$_6$ необходимо условие $\operatorname{ran} \dot{\partial}_i \dot{\partial}_k \tau = n - 1$, что в силу

$$h_{ik} = \dot{\partial}_i \tau \dot{\partial}_k \tau + \tau \dot{\partial}_i \dot{\partial}_k \tau \tag{5.4}$$

равносильно $\det h_{ik} \neq 0$. Из коммутативности диаграммы (4.1) следует, что h_{ik} должен быть ковариантно постоянен относительно искомой связности ∇, что в сочетании с только что доказанной невырожденностью h_{ik} позволяет [9, § 28; 3, § 8] однозначно найти компоненты связности ∇ (называемой в этом случае *картановой*). По построению видно, что связность задана на всем $\mathfrak{M}$. На границе $\partial\mathfrak{M}$ обычно происходит вырождение, а эта граница в кинематиках не сводится к нулевому вектору. Согласно ФК$_5$ $\lim\limits_k \tau(p, X_k) = 0$ при $X_k \to \partial 0_p^+$, чем доказывается соотношение (5.2). Доопределив непрерывно τ, запишем $\tau(p, X) = 0$ при $X \in \partial 0_p^+$. Докажем, что функция $\tau(p, X)$ вогнута, т. е. $-\tau$ выпукла на 0_p^+, для чего достаточно [7, § 4] доказать, что при любом фиксированном $X \in 0_p^+$ выполняется соотношение

$$\forall Z \in T_pM \qquad Z^i Z^k \dot{\partial}_i \dot{\partial}_k \tau(p, X) \leqslant 0. \tag{5.5}$$

Сначала обозначим $\tau_{ik} = \dot{\partial}_i \dot{\partial}_k \tau$ и заметим, что в силу формулы (5.3) и положительной однородности τ имеем: (i) $h_{ik}(X) Z^i Z^k$ положительна на направлении $Z = \lambda X$, (ii) $h_{ik}(X) Z^i Z^k$ на дополнительном к X направлении Y будет того же знака, что $\tau_{ik}(X) Z^i Z^k$ и даже (iii) $h_{ik}(X) Y^i Y^k = \tau \tau_{ik}(X) Y^i Y^k$ (ради краткости не пишем аргумент $p \in M$). Допустим (допущение I), что в пространстве, дополнительном к $A \in 0_p^+$, найдется направление $B \in 0_p^+$, на котором $h_{ik}(A) B^i B^k = \tau \tau_{ik}(A) B^i B^k > 0$ (использовано (iii)). Тогда $h_{ik}(A) X^i X^k \geqslant 0$ на 2-плоскости $A \oplus B$, при этом

$\det h_{ik} \neq 0$. Пока определитель не обращается в нуль, квадратичная форма не меняет знака. Если бы существовал (допущение II) такой вектор $V \in 0_p^+ \cap A \oplus B$, что для него $h_{ik}(V)X^iX^k < 0$ на каком-то X, то эта квадратичная форма обязана была бы где-то в промежутке выродиться, т. е. при каком-то векторе $V_0 \in 0_p^+ \cap A \oplus B$ двумерный ее определитель обращался бы в нуль. Но в этом случае на $0_p^+ \cap A \oplus B$ форма $\tau_{ik}(V_0)X^iX^k = 0$ тождественна в силу равенства (5.4). В частности, $V_0^iV_0^k\dot{\partial}_i\dot{\partial}_k\tau(V_0) = 0$, а это выражение не зависит от того, берем ли мы ограничение τ на $A \oplus B$ или на всем 0_p^+, ибо всегда оно получается из ограничения τ на λV_0. Следовательно, в любом ортонормальном представлении, начинающемся с V_0, один элемент на диагонали будет нулевой, так что в $V_0 \in 0_p^+$ определитель $\det h_{ik}(V_0)$ равен 0, что противоречит ФК$_6$. Значит, допущение II неверно, и при $Y \in 0_p^+ \cap A \oplus B$ всюду $h_{ik}(Y)X^iX^k \geqslant 0$ и $\tau_{ik}(Y)X^iX^k \geqslant 0$ согласно (*ii*), так что ограничение τ на $A \oplus B$ оказывается выпуклой функцией [7, § 4]. В пересечении n-мерного конуса $\overline{0_p^+}$ двумерной плоскостью $A \oplus B$ найдутся $C, C' \in \partial 0_p^+$, на которых в силу вышеизложенного $\tau(C) = \tau(C') = 0$, и в то же время $A = \lambda C + \lambda' C'$, $\lambda, \lambda' > 0$. Тогда по выпуклости $\tau(A) \leqslant 0$, что противоречит положительности $\tau > 0$. Значит, допущение I неверно, что и доказывает теорему.

Определение $\vdash$-каузальности, данное в римановом случае, существенно зависит от наличия экспоненциального отображения, существование которого в финслеровых кинематиках не доказано, так как геодезические определены только для направлений $X \in 0_p^+$, а не для всех $X \in T_pM$. Но это препятствие нетрудно обойти, если рассмотреть для конуса 0_p^+ минимальный эллиптический конус, содержащий его в T_pM. Этот «внешний конус» $\widehat{0}_p$ порождает некоторую риманову кинематику ${}^{n-1}V_n$, обладающую тем свойством, что всякая временноподобная в финслеровом смысле является временноподобной и в римановой кинематике ${}^{n-1}V_n$. Поэтому, взяв экспоненциальное для римановой кинематики ${}^{n-1}V_n$ отображение, получим окрестность, в которой не существует циклических финслеровых геодезических. После этого без изменения проводятся доказательства аналогов теорем 2—5.

Теорема 8. *Если* $(M_n, F, \mathfrak{M}, \nabla, \tau)$ — *ориентируемая во времени финслерова кинематика, то* $(M, \vdash, F, L)$ *при условии* (5.1) *удовлетворяет аксиомам* ФК$_{1-6}$.

Теорема 9. *Если для* $(M, \prec, F, L)$ *выполнены аксиомы* ФК$_{1-6}$ *и* ДА$_1$, *то у всякой* C^1*-дифференцируемой* $\prec$*-каузальной кривой касательная* γ_* *принадлежит* $\overline{0_\gamma^+}$.

Теорема 10. *Если выполнены аксиомы* ФК$_{1-6}$ *и* ДА$_{1-2}$, *то всякая* C^1*-дифференцируемая кривая в финслеровой кинематике* $\prec$*-каузальна тогда и только тогда, когда она* $\vdash$*-каузальна.*

Теорема 11. *Если выполнены аксиомы* ФК$_{1-6}$ *и* ДА$_{1-3}$, *то для достаточно близких точек финслеровой кинематики* $p \prec q$ *равносильно* $q \vdash p$.

6. Замечания относительно роли отдельных аксиом. Область действия группы $\mathfrak{G}$ автоморфизмов в данной статье — это $\mathbf{R}^M$, а в хроногеометрическом (в узком смысле этого слова) подходе [1] — это M. Такое упрощение возможно потому, что взят линейный случай, а тогда $\mathbf{R}^M$ изоморфно M $(E_n^* \approx E_n)$.

А. Д. Александров обычно берет интервал (a, b) замкнутым, поэтому в его подходе нельзя принять множество интервалов за базис топологии, в результате возникают значительные усложнения.

Ограничение ориентируемыми во времени многообразиями (в литературе иногда только такие и называются «пространство-время») не существенно для избранной аксиоматики. Правда, отношение локального следования $\prec$ можно задать только на ориентируемых во времени многообразиях, но можно вместо $(M, \prec)$ постулировать структуру $(M, T, \omega, \{<_p\})$, где T — некоторая топология, ω: $M \mapsto T$ — открытое покрытие, а $<_p$ — отношение порядка на $U = \omega p$, как это описано в [5, 8]. Изложение станет значительно громоздче, топология из производной конструкции сделается первичной, но в остальном аксиоматика не изменится.

Так как существуют 4-мерные топологические несглаживаемые многообразия, то предположение о существовании F в аксиоме ОТО$_1$ содержательно даже с физической точки зрения. Впрочем, на самых интересных физически многообразиях, а именно на тех, где можно задать глобальное отношение порядка $<$, гладкость всегда существует, ибо в силу [2] такие топологические кинематики некомпактны, а в силу [12] некомпактные четырехмерные многообразия сглаживаемы. Неединственность семейства F открывает даже в случаях единственной с точностью до диффеоморфизма гладкости проблему: что происходит с F_p^+ при таких диффеоморфизмах? Проблемы усложняются для недиффеоморфных гладкостей на $\mathbf{R}^4$ и т. п. [13].

Аксиомы ОТО$_{1-3}$ фактически однозначно определяют причинную структуру финслеровой кинематики. В [3, 5] объект, описанный ОТО$_{1-3}$, назван гладкими кинематиками. В линейном случае ему отвечает структура, названная векторной кинематикой [2, 3], моделирующая анизотропное обобщение специальной теории относительности.

Аксиомы ОТО$_{2-3}$ независимы (примеры даны в [2]).

Аксиома ОТО$_4$ может быть заменена рядом других эквивалентных, в формулировку которых не входит явно упоминание группы автоморфизмов. Например, в [6] она сформулирована в виде условия на множество радарно одновременных событий.

Аксиома ДА$_1$ не зависит от предшествующих ей. Двумерный пример локального следования, где она нарушается и теорема 3 не выполняется — это пример II п. 2. Аксиома ДА$_2$ также не зависит от предшествующих ей, в том числе и от ДА$_1$. Вот двумерный пример метрики, где она нарушается, где верна теорема 3, но не выполняется теорема 4:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{3}(x-t)^{-\frac{2}{3}}\right) dt^2 + dt\,dx - \frac{1}{3}(x-t)^{-\frac{2}{3}}\,dx^2. \tag{6.1}$$

Мы не знаем примеров невыполнения ДА$_3$, но не умеем доказать этого утверждения. Поэтому соответствующая часть теоремы 3 в [6] остается недоказанной. Так как всякая $\prec$-каузальная кривая, как доказано в теореме 2 из [11], задается абсолютно-непрерывными функциями, то ДА$_3$ равносильна предположению: если p и q соединимы абсолютно-непрерывной кривой γ, у которой $\gamma_* \in 0_\gamma^+$ в точках существования, то p и q соединимы C^1-дифференцируемой кривой μ, у которой $\mu_* \in 0_\mu^+$. (Если заменить слова «абсолютно-непрерывные» на «имеющие почти всюду касательную», то утверждение делается неверным.)

Мы сформулировали аксиоматики ОТО и ФК так, чтобы сразу был виден большой спектр возможных аксиоматик. В одном направлении можно избавиться от отношения $\prec$ как первичного, положив по определению $p \prec q$ тогда и только тогда, когда существует дифференцируемая кривая положительной длины из p в q (для достаточно близких точек). Тогда исчезнет необходимость в аксиомах ДА$_{1-3}$. В противоположном направлении вместо постулируемого оператора длины L можно ввести общую кинематическую метрику [2, 5, 8] и так же, как там, определить длину дуги через нижнюю границу длин вписанных ломаных. Тогда, напротив, пришлось бы доказывать гораздо больше, в частности, не так легко установить равенство (5.1) (ср. громоздкое доказательство теоремы 9 в [11]).

В общей теории относительности длины кривых, касательная к которым выходит вне $\overline{0_p^+} \cup \overline{0_p^-}$, обычно принимаются мнимыми. С точки зрения применимости аппарата выпуклых функций удобнее длину считать равной $-\infty$. Но в нашей аксиоматике подобные конкретизации избыточны. Достаточно, чтобы на таких кривых длина не равнялась бы никакому положительному вещественному числу.

Аксиома ΦK_6 гарантирует *) невырожденность h_{ik}, т. е. постоянство сигнатуры финслерова метрического тензора h_{ik} на $\mathfrak{M}$. При ее нарушении из точки в данном направлении выходит не одна, а бесконечно много геодезических. При метрике примера A из [11] размерность пространства геодезических с одним и тем же начальным условием в направлении плоской грани конуса 0_p^+ равна размерности грани, если $\alpha \neq 2$, и на единицу меньше, если $\alpha = 2$. С физической точки зрения нарушается одна из формулировок принципа детерминизма (причем природа нарушения детерминизма иная, нежели в примере, обсуждаемом в [11, § 1]). Так как сейчас появились исследования [14], основанные на переменности сигнатуры, следует помнить, что при этом нарушается детерминизм в смысле однозначной определенности движения по начальным данным.

Если, как изложено выше, не вводить отношения $\prec$, а исходить исключительно из класса кривых положительной длины, то ΦK_6 позволяет при небольшой модификации аксиомы ΦK_5 получить аксиоматику финслеровой геометрии произвольной (не переменной) сигнатуры. Не изучено соотношение этой аксиоматики с аксиоматикой [15]. Не удается также выделить из получаемых пространств римановы с помощью какого-нибудь аналога аксиомы ОТО_4. Для этого должна быть решена задача нахождения условий, гарантирующих, что гиперповерхность, на которой транзитивно действует подгруппа проективной группы, является гиперповерхностью 2-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуц А. К.* Аксиоматическая теория относительности // Успехи мат. наук.—1982.— Т. 37, № 2.— С. 39—79.
2. *Пименов Р. И.* Пространства кинематического типа.— Л.: Наука, 1968; *Pimenov R. I.* Kinematic spaces.— New York: Plenum press, 1970.
3. *Пименов Р. И.* Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка.— Сыктывкар: Изд-во Коми филиал АН СССР, 1987.
4. *Пименов Р. И.* К одной проблеме Буземана // Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности.— Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1982.— С. 89—90.
5. *Пименов Р. И.* Теория кривых в гладких кинематиках // Сиб. мат. журн.— 1978.— Т. 19, № 2.— С. 370—384.
6. *Пименов Р. И.* К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени // Докл. АН СССР.— 1975.— Т. 222, № 1.— С. 36—38.
7. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
8. *Busemann H.* Timelike spaces.— Warszawa, 1967.
9. *Matsumoto M.* The theory of the Finsler connections.— Okayama, 1970.
10. *Montesinos A.* On Finsler connections // Revista Matematica Hispano-America-na.— 1979.— V. 39.— P. 99—110.
11. *Пименов Р. И.* Финслеровы кинематики // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 3.— С. 138—146.
12. *Quinn F.* Ends of maps III: dimensions 4 and 5 // J. different. geom.— 1982.— V. 17, N 3.— P. 503—521.
13. *Gompf R. E.* Three exotic R^4 and other anomalies // J. different. geom.— 1983.— V. 18, N 2.— P. 317—328.
14. *Сахаров А. Д.* Космологические переходы с изменением сигнатуры метрики // ЖЭТФ.— 1984.— Т. 87, № 2.— С. 375—383.
15. *Busemann H., Beem J. K.* Axioms for indefinite metrics // Rend. Circolo Mat. Palermo.— 1966.— V. 18.— P. 223—246.

г. Сыктывкар

Статья поступила 22 октября 1986 г.

*) Попутно исправим одну неточность в [11]: в лемме 1 и теореме 1 потеряно условие $\det h_{ik} \neq 0$. Соответственно все последующие теоремы относятся к случаю регулярной финслеровой кинематики, а примеры — как к регулярной, так и к нерегулярной. Кроме того, в формуле (2.1) перед $\frac{d}{ds}$ потерян коэффициент 2.