

# Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen

von

Johann Radon.

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. Juni 1913.)

## Einleitung.

In vorliegender Arbeit ist der Versuch gemacht, die Theorie der linearen Integralgleichungen einerseits und der linearen und bilinearen Formen unendlich vieler Variabler andererseits einer allgemeinen Theorie in dem Sinne unterzuordnen, daß die von Hilbert in seiner »vierten Mitteilung«<sup>1</sup> eingeführten einfachen Methoden im wesentlichen bestehen bleiben und dann durch einfache Spezialisierung der gewonnenen Ergebnisse die wichtigsten Resultate obgenannter Theorien erhalten werden.

In gewisser Hinsicht liegt ein Ansatz zu einer ähnlichen Theorie in der Arbeit von F. Riesz: »Über Systeme integrierbarer Funktionen«<sup>2</sup> vor, doch ist das Problem dort nur in einer der angegebenen Richtungen, nämlich der der Integralgleichungen, ausgestaltet, indem für diese Methoden entworfen wurden, die den obgenannten Hilbert'schen parallel laufen.

Will man nun die angedeutete Theorie in möglichster Allgemeinheit aufbauen, so erscheint die Entwicklung einer Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen<sup>3</sup> als unabweisliche Vorarbeit. Das in dieser Richtung bisher Geleistete besteht hauptsächlich in einer Arbeit von Lebesgue,<sup>4</sup> der sich

<sup>1</sup> Gött. Nachr., 1906, p. 157—227.

<sup>2</sup> Math. Annalen, Bd. 69, p. 449—497 (zitiert als Riesz I).

<sup>3</sup> Auch die mathematische Physik scheint dieses Begriffes nicht wohl entwerfen zu können; man vergleiche die Ausführungen über die »Masse« in Plemelj's »Potentialtheoretischen Untersuchungen« (Leipzig 1911).

<sup>4</sup> Annales de l'école normale supérieure, 1910, p. 361—450.

aber auf »absolut stetige« Mengenfunktionen einerseits und »fonctions d'intervalle« andererseits beschränkt. Das erstere ist für den vorliegenden Zweck zu speziell, das zweite zu wenig schmiegsam; an einer Stelle<sup>1</sup> der genannten Arbeit findet sich jedoch ein Hinweis auf die Möglichkeit einer Theorie, wie sie hier zu geben versucht wurde. Hat man diese Theorie, der das erste Kapitel gewidmet ist, erledigt, so kann man nach Einführung zweier Integralbegriffe, die zu dem Lebesgue'schen einerseits, zu dem Stieltjes'schen andererseits in enger Beziehung stehen und deren Theorie im zweiten Kapitel entwickelt wird, sofort eine Anwendung auf die Theorie der stetigen linearen Funktionaloperationen machen (Kapitel III). Es gelingt nämlich, die Darstellung der linearen Funktionaloperationen durch Stieltjes'sche Integrale, die ebenfalls F. Riesz,<sup>2</sup> aber nur für den Fall in einem linearen Intervall stetiger Funktionen, entwickelt hat, auf den allgemeinen Fall auf einer beliebigen abgeschlossenen Punktmenge im  $n$ -dimensionalen Raume stetiger Funktionen auszudehnen. Dieselben Integralbegriffe dienen im vierten Kapitel zu einer Integraldarstellung der absolut additiven Mengenfunktionen, wodurch erst die Anwendungen auf die Theorie der Integralgleichungen ermöglicht werden.

Um den Übergang zur Anwendung auf die eingangs erwähnte Theorie herzustellen, erschien es am bequemsten, die Theorie der von Hellinger<sup>3</sup> eingeführten Integraloperationen entsprechend zu verallgemeinern, da sich dann die Darstellung enger an die Methoden von Hilbert anschließen läßt. Es treten dabei an Stelle der Quadratsumme unendlich vieler Variabler ein verallgemeinertes Hellinger'sches Integral, an Stelle des » $n$ -ten Abschnittes« der Quadratsumme,  $x_1^2 + \dots + x_n^2$ , aber eine Teilsumme des zu dem genannten Integral führenden Grenzprozesses. Um diese Analogie zu verwerten, sind eine Reihe von Ungleichungen<sup>4</sup> erforderlich, deren Anwendung sich viel-

<sup>1</sup> Ebenda, Nr. 44.

<sup>2</sup> Annales de l'école normale supérieure, 1910 (Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales). (Zitiert als Riesz II.)

<sup>3</sup> Neue Begründung etc. Crelle's Journal, Bd. 136.

<sup>4</sup> p. 64. Um den Parallelismus mit der Hilbert'schen Theorie herzustellen, braucht man nur den Fall  $p = 2$ ; in diesem gehen aber die Ungleichungen in eine triviale Identität über, was die ganze Darstellung bedeutend vereinfacht.

leicht nicht immer ganz einfach gestaltet, die sich aber kaum durch wesentlich einfachere ersetzen lassen dürften und alles Erforderliche leisten (Kapitel V und VI). Man kann dann die gewünschte Theorie sehr einfach, und zwar in Analogie zu den Arbeiten von Hilbert, Hellinger und Toeplitz<sup>1</sup> einerseits und F. Riesz (I) andererseits entwickeln (Kapitel VII).

Am Schlusse (Kapitel VIII) ist noch die Spezialisierung der gewonnenen Theorie auf die eingangs erwähnten Fälle angedeutet und einige speziellere Fälle eingehender durchgeführt. Der erste führt einerseits auf eine Verallgemeinerung eines von F. Riesz herrührenden Satzes,<sup>2</sup> andererseits auf gewisse Sätze über Entwicklung<sup>3</sup> von Funktionen nach vorgeschriebenen; dieselben ergeben als unmittelbarste Anwendung sofort die über Orthogonalsysteme bekannten Tatsachen, sowie einige Resultate über Biorthogonalsysteme. Der zweite behandelte Fall führt unmittelbar zum Beweise einer Behauptung Hilbert's über einen speziellen Typus von Kernen linearer Integralgleichungen.

Es erübrigt schließlich noch die Bemerkung, daß ich es für überflüssig hielt, in der Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen solche Beweise ausführlich darzulegen, welche den entsprechenden in der Theorie des Lebesgue'schen Inhaltsmaßes genau parallel laufen. Der Leser, der sich derartige Lücken ergänzen will, möge sich etwa an die kurzgefaßte Darstellung letzterer Theorie im Cours d'analyse (Bd. I, 2. Aufl.) von de la Vallée-Poussin halten, die mir in mehrfacher Beziehung zum Muster gedient hat.

### Inhaltsübersicht.

|  | Seite |
|--|-------|
| I. Die absolut additive Mengenfunktion . . . . .   | 4     |
| II. Die Verallgemeinerung des Begriffes des Stieltjes'schen Integrals . .  | 28    |
| III. Die stetige lineare Funktionaloperation . . . . .   | 38    |
| IV. Darstellung der absolut additiven Mengenfunktionen durch verallgemeinerte Stieltjes'sche Integrale . . . . . | 48    |

<sup>1</sup> Hilbert, a. a. O.; O. Toeplitz, Gött. Nachr., 1907, p. 101 ff.; Hellinger und Toeplitz, Math. Annalen, Bd. 69, p. 289 ff.

<sup>2</sup> A. a. O. (I), p. 474.

<sup>3</sup> Im Sinne einer Verallgemeinerung von E. Fischer's »Convergence en moyenne« (Comptes rendues, 1907).



|   | Seite |
|---|-------|
| V. Die Verallgemeinerung der Hellinger'schen Integralbegriffe . . . . .   | 57    |
| VI. Die beschränkte lineare Funktionaloperation im Gebiete der Klasse $L_p(b)$ . Weiteres über die in V. eingeführten Operationen . . . . . | 75    |
| VII. Die beschränkte Bilinearoperation . . . . .  | 87    |
| VIII. Einige Anwendungen . . . . .  | 118   |

## I. Die absolut additive Mengenfunktion.

1. Wir beschäftigen uns mit Punktmengen im Raume der Variablen  $x_1 x_2 \dots x_n$ . Bei einem Teile der Betrachtungen wird der Bequemlichkeit halber  $n = 2$  vorausgesetzt werden, doch lassen sich die Resultate und Methoden stets auf den allgemeinen Fall ausdehnen.

Unter dem Intervall  $\left[ \begin{matrix} x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \end{matrix} \right]$ , wo  $x_i' < x_i''$ , verstehen wir die nicht abgeschlossene Punktmenge:

$$x_i' \leq x_i < x_i'' \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Um Umständlichkeiten nebensächlicher Natur zu vermeiden, beschränken wir alle Betrachtungen auf das »Grundintervall«:

$$J = \left[ \begin{matrix} M, & M, & \dots & M \\ -M, & -M, & \dots & -M \end{matrix} \right],$$

wo  $M$  eine beliebig fixierte positive Zahl bedeutet.

Die Vereinigungsmenge zweier Punktmengen  $E_1$  und  $E_2$  werde mit  $E_1 + E_2$ , ihr Durchschnitt mit  $E_1 \cdot E_2$  bezeichnet.  $E_1 - E_2$  ist die Menge aller Punkte von  $E_1$ , die nicht zu  $E_2$  gehören. Eine Gesamtheit von Mengen heie disjunkt,<sup>1</sup> wenn keine zwei ihrer Elemente Punkte gemein haben.

Zu den Punktmengen zählen wir auch die »leere« Menge  $\Omega$ , die kein Element enthält, und setzen fest:  $E_1 - E_1 = \Omega$ ,  $E_1 E_2 = \Omega$ , wenn  $E_1$  und  $E_2$  keine gemeinsamen Punkte besitzen,  $E_1 + \Omega = E_1$ ,  $E_1 \Omega = \Omega$ .  $\Omega$  heie in jeder Menge enthalten und wenn  $E_1, E_2, \dots$  disjunkt sind, so heie auch die Gesamtheit der Mengen  $\Omega, \Omega, \dots, E_1, E_2, \dots$  disjunkt, die aus ersterer durch beliebig oftmalige Hinzufügung von  $\Omega$  hervorgeht.

<sup>1</sup> Vgl. den Artikel »Mengenlehre« von G. Hessenberg im 3. Jahrgang des »Taschenbuches für Mathematiker und Physiker« (Leipzig 1913), p. 69.

Es sei nun unter den in  $J$  enthaltenen Punktmengen eine Klasse  $T$  ausgezeichnet, welche folgenden Forderungen genügt:

a) Alle Intervalle in  $J$  gehören zu  $T$  ( $J$  selbst eingeschlossen).

b) Zugleich mit  $E_1$  und  $E_2$  gehören auch  $E_1 \cdot E_2$  und  $E_1 - E_2$  zu  $T$  ( $\Omega$  gehört daher auch zu  $T$ ).

c) Sind  $E_1, E_2, E_3, \dots$  disjunkte Mengen von  $T$  in endlicher oder abzählbar unendlicher Anzahl, so gehört auch ihre Vereinigungsmenge  $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$  zu  $T$ .

Man sieht unschwer ein, daß dann jedenfalls alle im Borelschen Sinne meßbarer Mengen<sup>1</sup> zu  $T$  gehören.

Jeder Punktmenge  $E$  von  $T$  sei nun eine Zahl<sup>2</sup>  $f(E)$  zugeordnet. Dann heiße  $f$  eine Mengenfunktion mit dem Definitionsbereiche  $T$ .

Wir untersuchen insbesondere Mengenfunktionen, denen die Eigenschaft der absoluten Additivität zukommt. Darunter ist folgendes zu verstehen:

Sind  $E_1, E_2, \dots$  disjunkte Mengen von  $T$  in endlicher oder abzählbarer Anzahl, so ist:

$$f(E_1 + E_2 + \dots) = f(E_1) + f(E_2) + \dots,$$

wobei die rechts auftretende Reihe stets konvergent sein soll.

Da auf jene Mengen von  $E_1, E_2, \dots$ , für welche  $f(E) > 0$ , die gestellte Forderung für sich anwendbar ist, so muß die fragliche Reihe notwendig absolut konvergieren. Es folgt ferner, da  $f(E + \Omega) = f(E)$ , daß stets  $f(\Omega) = 0$  sein muß!

2. Eine absolut additive Mengenfunktion  $f(E)$  ist von beschränkter Schwankung oder quasimonoton; d. h.: Zerlegt man eine Menge  $E$  von  $T$  in eine endliche Anzahl disjunkter,  $T$  angehörender Teile  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , so ist stets:

$$\sum_{k=1}^n |f(E_k)| < N,$$

<sup>1</sup> Vgl. etwa É. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles (Paris 1905), p. 17.

<sup>2</sup> Wir haben es ausschließlich mit reellen Zahlen zu tun.

wo  $N$  eine von der Wahl von  $E$  und der Teilmengen  $E_k$  unabhängige Zahl bedeutet.

Wir bezeichnen jetzt und im folgenden eine Teilung von  $E$  in disjunkte Teilmengen  $E_1^{(p)}, E_2^{(p)} \dots E_n^{(p)}$  kurz mit  $\Pi_p$ , die »Teilungsmengen«  $E_k^{(p)}$  mit  $\Delta E$ ,  $f(\Delta E)$  mit  $\Delta f$  und schreiben für:

$$\sum_1^n |f(E_k^{(p)})| \quad \text{kurz:} \quad \sum_E |\Delta f|.$$

Dabei sind  $E$  und die  $E_n^{(p)}$  stets als Mengen von  $T$  zu denken.

Indem wir jetzt zum Beweise obiger Behauptung schreiten, bemerken wir, daß sich aus der Annahme des Gegenteiles die Existenz einer Folge von Teilungen  $\Pi_n$  von  $J$  ergibt, derart, daß:

$$\lim_{n=\infty} \sum_J \Pi_n |\Delta f| = +\infty.$$

Wir verstehen nun unter dem »Produkt«  $\Pi \Pi'$  zweier Teilungen  $\Pi, \Pi'$  derselben Menge  $E$ , welche durch  $\Pi$  in  $E_1 E_2 \dots E_n$ , durch  $\Pi'$  in  $E'_1 E'_2 \dots E'_m$  zerfällt wird, die Teilung von  $E$  in die  $m \cdot n$  Teilmengen  $E_i E'_k$ , von denen diejenigen, welche gleich  $\Omega$  ausfallen, nach Belieben weggelassen werden können. Setzen wir dann:

$$\Pi'_1 = \Pi_1, \quad \Pi'_2 = \Pi'_1 \Pi_2, \quad \dots \quad \Pi'_{n+1} = \Pi'_n \Pi_{n+1} \dots,$$

so folgt:

$$\lim_{n=\infty} \sum_J \Pi'_n |\Delta f| = +\infty.$$

Es sei jetzt:

$$m_1 < m_2 < \dots$$

eine beliebige Folge ins Unendliche wachsender positiver Zahlen. Man kann dann in der Folge  $\Pi'_1 \Pi'_2 \dots$  eine Teilung  $\Pi'_n$ , so bestimmen, daß:

$$\sum_J \Pi'_n |\Delta f| > m_1.$$

Es ist klar, daß  $\Pi'_{n_1}$  eine Teilungsmenge  $E'_1$  besitzen muß, für welche

$$\lim_{k=\infty} \sum_{E'_1} \Pi'_{n_1+k} |\Delta f| = +\infty.$$

Die Summierung bezieht sich dabei auf alle Teilungsmengen von  $\Pi'_{n_1+k}$ , welche in  $E'_1$  enthalten sind. Daher kann man  $n_2 > n_1$  so wählen, daß:

$$\sum_{E'_1} \Pi'_{n_2} |\Delta f| > m_2.$$

Ebenso kann man in  $\Pi'_{n_2}$  eine Teilungsmenge  $E'_2$ , die in  $E'_{n_1}$  enthalten ist, und eine Zahl  $n_3 > n_2$  so bestimmen, daß:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{E'_2} \Pi'_{n_2+n} |\Delta f| = +\infty, \quad \sum_{E'_2} \Pi'_{n_3} |\Delta f| > m_3$$

usw.

Es bezeichne jetzt  $E_1^*, E_2^* \dots$  die folgenden Mengen (in beliebiger Reihenfolge):

- α) Die Teilungsmengen von  $\Pi'_{n_1}$ , ausgenommen  $E'_1$ ;
  - β) die Teilungsmengen von  $\Pi'_{n_2}$ , die in  $E'_1$  enthalten sind, ausgenommen  $E'_2$ ;
- .....

Dann gilt:

$$E_1^* + E_2^* + \dots = J - E_0^*.$$

$E_0^*$  ist dabei die Menge aller Punkte von  $J$ , die in allen  $E'_n$  vorkommen ( $n = 1, 2, \dots$ ); also:

$$E_0^* = E'_1 - [(E'_1 - E'_2) + (E'_2 - E'_3) + \dots]. \quad (1)$$

Da  $E'_{n+1}$  in  $E'_n$  enthalten ist, sind die Summanden in der Klammer disjunkte Mengen. Nun ist:

$$|f(E_1^*)| + |f(E_2^*)| + \dots \geq \sum_{E'_{v-1}} \Pi'_{n_v} |\Delta f| - |f(E'_v)| > m_v - |f(E'_v)|.$$

Die Reihe links konvergiert dabei, da die  $E_k^*$  disjunkt sind. Da  $v$  in der letzten Ungleichung beliebig ist, so folgt:

$$\lim_{v=\infty} f(E'_v) = +\infty. \quad (2)$$

Wegen (1) ist aber:

$$f(E_0^*) = f(E'_1) - [f(E'_1 - E'_2) + f(E'_2 - E'_3) + \dots]$$

und, da

$$f(E_0^* - E'_{n+1}) + f(E'_{n+1}) = f(E'_n),$$

$$f(E_0^*) = \lim_{n=\infty} f(E'_n).$$

Demnach wäre dieser Grenzwert im Widerspruch zu (2) endlich, womit die Behauptung erwiesen ist.

Wir bezeichnen die obere Grenze der Werte von:

$$\sum_{\Pi} |\Delta f|$$

für alle möglichen Teilungen  $\Pi$  von  $E$  mit

$$\int_E |df|$$

und nennen sie die Gesamtschwankung von  $f$  auf  $E$ .

Die Gesamtschwankung einer absolut additiven Mengenfunktion ist ebenfalls eine Mengenfunktion mit demselben Definitionsbereich. Wie wir sehen werden, ist sie auch absolut additiv.

Es sei  $E_1, E_2, \dots$  eine Zerlegung von  $E$  in eine abzählbare Folge disjunkter Mengen und  $\Pi_k$  eine Teilung von  $E_k$ , so daß:

$$\int_{E_k} |df| < \sum_{\Pi_k} |\Delta f| + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

wo  $\varepsilon > 0$  beliebig fixiert werde.

Dann ist:

$$\sum_1^N \int_{E_k} |df| < \sum_1^N \sum_{\Pi_k} |\Delta f| + \varepsilon \leq \int_E |df| + \varepsilon. \quad (3)$$



Andrerseits sei  $\Pi'$  eine Teilung von  $E$  in Teilmengen  $E'_1, E'_2, \dots, E'_v$ , für welche

$$\int_E |df| < \sum_{E'} |\Delta f| + \varepsilon.$$

Dann wird:

$$|f(E'_k)| \leq \sum_1^{\infty} |f(E_h E'_k)|$$

$$\int_E |df| < \sum_1^{\infty} \sum_1^v |f(E_h E'_k)| + \varepsilon < \sum_1^{\infty} \int_{E_k} |df| + \varepsilon.$$

Aus (3) und der letzten Ungleichung folgt leicht die Behauptung.

Setzt man:

$$\varphi(E) = \frac{\int_E |df| + f(E)}{2}, \quad \psi(E) = \frac{\int_E |df| - f(E)}{2}, \quad (4)$$

so wird:

$$f(E) = \varphi(E) - \psi(E)$$

$$\int_E |df| = \varphi(E) + \psi(E) \quad (4a)$$

$\varphi$  und  $\psi$  sind keiner negativen Werte fähig. Diese Eigenschaft bezeichnen wir als Monotonie und nennen (4a) die kanonische Zerlegung einer absolut additiven Mengenfunktion in monotone Bestandteile.  $\varphi$  und  $\psi$  sind natürlich selbst absolut additiv.

Es genügt nach diesem Resultat, die monotonen, absolut additiven Mengenfunktionen näher zu studieren.

3. Es sei also  $f(E)$  absolut additiv und monoton. Indem wir uns auf den zweidimensionalen Fall beziehen und die Koordinaten  $x, y$  nennen, setzen wir:<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Vgl. Lebesgue, a. a. O., p. 385.

$$\begin{aligned}
 f\left(\left[\begin{array}{c} x, y \\ -M, -M \end{array}\right]\right) &= F(x, y), \quad -M < x \leq M, \quad -M < y \leq M, \\
 0 &= F(x, -M), \quad -M \leq x \leq M, \\
 0 &= F(-M, y), \quad -M < y \leq M.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Wie leicht ersichtlich, gilt dann:

$$f\left(\left[\begin{array}{c} a', b' \\ a, b \end{array}\right]\right) = F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b) \tag{5 a}$$

für alle Werte von  $a, b, a', b'$ , die den Ungleichungen

$$-M \leq a < a' \leq M$$

$$-M \leq b < b' \leq M$$

genügen.

$F(x, y)$  hat daher die Monotonieeigenschaft

$$F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b) \geq 0, \quad a' \geq a, \quad b' \geq b. \tag{6}$$

Es sei nun  $a_0 < a_1 < a_2 \dots$  eine Zahlenfolge mit den Eigenschaften:

$$a_0 = -M, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \leq M$$

und  $b_0 < b_1 < \dots$  eine Folge von analoger Beschaffenheit:

$$b_0 = -M, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \leq M.$$

Dann ist:

$$\left[\begin{array}{c} a, b \\ -M, -M \end{array}\right] = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \left[\begin{array}{c} a_{i+1} b_{k+1} \\ \alpha_i b_k \end{array}\right] = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \alpha_{ik}.$$

Wegen unserer Intervalldefinition sind die  $\alpha_{ik}$  disjunkt und es folgt:

$$\begin{aligned}
 F(a, b) &= \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} f(\alpha_{ik}) = \\
 &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} f\left(\left[\begin{array}{c} a_m b_n \\ -M, -M \end{array}\right]\right) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} F(a_m, b_n).
 \end{aligned}$$

Dabei dürfen die beiden Grenzübergänge unabhängig voneinander in beliebiger Weise vollzogen werden, da  $\Sigma f(\alpha_{ik})$  absolut konvergiert. Daraus folgert man leicht:

$$\text{Es ist: } \lim F(a-h, b-k) = F(a, b), \quad (7)$$

wenn  $h$  und  $k$  in beliebiger Weise, aber ohne negative Werte anzunehmen, gegen Null konvergieren.

4. Die Eigenschaften (6) und (7) sind für  $F$  charakteristisch in dem Sinne, daß wir beweisen können:

Zu jeder im Gebiete  $-M \leq x \leq M$ ,  $-M \leq y \leq M$  definierten, für  $x = -M$  und  $y = -M$  verschwindenden Funktion  $F(x, y)$ , die (6) und (7) erfüllt, gehört eine absolut additive, monotone Mengenfunktion  $f(E)$ , deren Definitionsbereich den Forderungen von 1. genügt und die zu  $F$  in dem durch (5a) ausgedrückten Verhältnisse steht.

Der Nachweis dieser Tatsache bildet den Hauptgegenstand dieses Kapitels und enthält als Spezialfall (für  $F(x, y) = (x+M)(y+M)$ ) die Lebesgue'sche Theorie vom Inhaltsmaße der Punktmengen.

Wir definieren  $f$  zunächst für die Intervalle von  $J$  durch die Gleichung (5a); wegen (6) ist für jedes Intervall  $\alpha$   $f(\alpha) \geq 0$ .

Sei  $E$  eine beliebige Punktmenge in  $J$ ,  $CE$  ihre Komplementärmenge bezüglich  $J$ , d. h.  $CE = J - E$ . Dann definieren wir zwei Zahlen  $\bar{f}(E)$  und  $\underline{f}(E)$  in folgender Weise:

$\bar{f}(E)$  sei die untere Grenze der Werte aller Summen

$$\sum_1^{\infty} f(\alpha_k),$$

wo  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  eine Folge von Intervallen darstellt, deren Vereinigungsmenge  $E$  enthält.

$\underline{f}(E)$  sei gleich  $f(J) - \bar{f}(CE)$ .

Aus dieser Definition folgt sofort:

$$\begin{aligned} \bar{f}(A) + \bar{f}(B) &\geq \bar{f}(A+B) \\ \bar{f}(E_1) &\leq \bar{f}(E_2), \quad \underline{f}(E_1) \leq \underline{f}(E_2) \end{aligned} \quad (8)$$

wenn  $E_1$  in  $E_2$  enthalten ist.

Ferner können wir beweisen:

$$\bar{f}(E) \geq f(E).$$

Wir wählen zwei Intervallfolgen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$  so, daß  $E$  in  $\Sigma \alpha_k$ ,  $CE$  in  $\Sigma \beta_k$  enthalten ist und für ein willkürlich fixiertes  $\varepsilon > 0$  die Ungleichungen gelten:

$$\Sigma f(\alpha_k) < \bar{f}(E) + \frac{\varepsilon}{6}, \quad \Sigma f(\beta_k) < \bar{f}(CE) + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Wir erweitern hierauf die Intervalle  $\alpha_k$  zu Intervallen  $\alpha'_k$  wie folgt:

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} a' & b' \\ a & b \end{bmatrix}, \quad \alpha'_k = \begin{bmatrix} a' & b' \\ a - \frac{1}{n_k} & b - \frac{1}{n_k} \end{bmatrix},$$

wo  $n_k > 0$  so groß zu wählen ist, daß:

$$f(\alpha'_k J) - f(\alpha_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Das ist wegen (7) in der Tat möglich, wie leicht zu sehen.

Mit dem  $\beta$  verfahren wir in gleicher Weise. Die nicht zu  $J$  gehörigen Punkte des Randes von  $J$  schließen wir noch in die beiden Intervalle:

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} M + \frac{1}{n} & M + \frac{1}{n} \\ M - \frac{1}{n} & -M - \frac{1}{n} \end{bmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} M + \frac{1}{m} & M + \frac{1}{m} \\ -M - \frac{1}{m} & +M - \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

ein, wo  $m$  und  $n$  positiv, und zwar so groß zu nehmen sind, daß:

$$f(\delta_1 \cdot J) < \frac{\varepsilon}{6}, \quad f(\delta_2 \cdot J) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Auch die Möglichkeit dieser Bestimmung folgt aus (7).

Die  $\alpha'_k, \beta'_k, \delta_1, \delta_2$  bilden nun eine Menge von Intervallen, so daß jeder Punkt von  $J$  und seinem Rande im Innern eines

von ihnen vorkommt. Daher kann man nach dem Borel'schen Lemma<sup>1</sup> aus ihnen eine endliche Anzahl

$$\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n$$

herausgreifen, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Läßt man von diesen die über  $J$  hinausragenden Teile weg, d. h. betrachtet man die Intervalle:

$$\gamma'_i = \gamma_i \cdot J,$$

so überdecken die  $\gamma'_i$  ganz  $J$ . Daraus folgt aber offenbar:

$$\Sigma f(\gamma'_i) \geq f(J).$$

Es ist ferner:

$$\Sigma f(\alpha'_i J) + f(\delta_1 J) + f(\delta_2 J) < \bar{f}(E) + \varepsilon$$

$$\Sigma f(\beta'_i J) \cdots \cdots < \bar{f}(CE) + \varepsilon$$

und nach Addition folgt:

$$f(J) \leq \Sigma f(\gamma'_i) < \bar{f}(E) + \bar{f}(CE) + 2\varepsilon,$$

$$\bar{f}(E) > \underline{f}(E) - 2\varepsilon.$$

Wegen der Willkür von  $\varepsilon$  folgt hieraus die Behauptung.

Ist für eine Menge  $E$   $\bar{f}(E) = \underline{f}(E)$ , so rechnen wir sie zum Definitionsbereiche  $T$  von  $f$  und setzen

$$f(E) = \bar{f}(E) = \underline{f}(E).$$

Es gehört sonach mit  $E$  auch  $CE$  zu  $T$  und es ist:

$$f(E) + f(CE) = f(J).$$

Ferner überzeugt man sich leicht, daß nach dieser Definition für ein Intervall derselbe Wert von  $f$  resultiert wie aus (5a).

$\Omega$  ist in jedem Intervall enthalten und es gibt Intervalle, für welche  $f$  beliebig klein wird. Daher ist  $\bar{f}(\Omega) = 0$ . Es ist aber auch  $\underline{f}(\Omega) = f(J) - \bar{f}(C\Omega) = f(J) - f(J) = 0$ , daher gehört  $\Omega$  zu  $T$  und es ist  $f(\Omega) = 0$ .

<sup>1</sup> É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions (Paris 1898), p. 42.

Es ist jetzt der Nachweis zu erbringen, daß der jetzt festgelegte Definitionsbereich  $T$  die in 1. gestellten Forderungen erfüllt. Zuerst beweisen wir:

Jeder Bereich in  $J$  gehört zu  $T$ .

Dabei soll unter einem Bereich eine Punktmenge verstanden werden, die nur innere Punkte enthält, ohne notwendig zusammenhängend zu sein.

Zum Beweise betrachte man für jede natürliche Zahl  $n$  die Einteilung von  $J$  in quadratische Intervalle der Seitenlänge  $\frac{M}{2^n}$ .  $\alpha_1 \alpha_2 \dots$  bezeichne die Gesamtheit der folgenden Intervalle:

a) Die Intervalle  $\alpha^{(1)}$  von  $\Pi_1$ , die nur Punkte des Bereiches ( $B$ ) enthalten.

b) Die Intervalle  $\alpha^{(2)}$  von  $\Pi_2$ , die nur Punkte von  $B$  enthalten und zu den  $\alpha^{(1)}$  disjunkt sind.

.....  
Dann ist ersichtlich:

$$B = \Sigma \alpha_k$$

$$\bar{f}(B) \leq \Sigma f(\alpha_k) \leq f(J).$$

Wählt man ein  $\varepsilon > 0$ , so kann man  $N$  so groß fixieren, daß:

$$\Sigma f(\alpha'_k) < \varepsilon,$$

wo die Summe sich auf jene Intervalle  $\alpha'_k$  unter den  $\alpha_k$  bezieht, die von den Teilungen  $\Pi_{N+i}$  stammen ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Die Intervalle  $\beta_i$  von  $\Pi_N$ , die nicht zu den  $\alpha_i$  gehören, umschließen ganz  $CB$  und daher folgt:

$$\Sigma f(\beta_i) \geq \bar{f}(CB) = f(J) - \underline{f}(B).$$

Weiter ist aber:

$$\Sigma f(\alpha_k) - \Sigma f(\alpha'_k) + \Sigma f(\beta_i) = f(J),$$

weil die  $\alpha_k$  nach Weglassung der  $\alpha'_k$  zusammen mit den  $\beta_k$  eine endliche  $J$  gerade erschöpfende, disjunkte Intervallmenge bilden.

Man erschließt daraus:

$$f(J) + \varepsilon > f(J) + \Sigma f(\alpha'_k) \geq f(J) - \underline{f}(B) + \bar{f}(B),$$

woraus wegen der Willkür von  $\varepsilon$  die Behauptung folgt.

Gleichzeitig mit  $B$  gehört nun auch seine Komplementärmenge zu  $T$ . Eine solche muß jeden in  $J$  enthaltenen Häufungspunkt umfassen, ist also »abgeschlossen innerhalb  $J$ «. Umgekehrt ist jede so beschaffene Menge komplementär zu einem Bereiche, im speziellen daher jede in  $J$  enthaltene abgeschlossene Menge.

Wir beweisen nun weiter:

Zu jeder Menge  $E$  in  $J$  kann man nach Vorgabe eines willkürlichen  $\varepsilon > 0$  einen Bereich  $E''$  angeben, der  $E$  enthält, so daß:

$$f(E'') - \bar{f}(E) < \varepsilon.$$

Man erhält  $E''$ , wenn man zunächst  $E$  in Intervalle  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  einschließt, so daß:

$$\Sigma f(\alpha_k) < \bar{f}(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

dann die Intervalle  $\alpha_k$  wie auf p. 12 zu Intervallen  $\alpha'_k$  erweitert, für welche:

$$\Sigma f(\alpha'_k) < \Sigma f(\alpha_k) + \frac{\varepsilon}{2}$$

und von den  $\alpha'_k$  die ihnen angehörenden Ränder wegläßt. Die übrigbleibenden Bereiche  $\alpha''_k$  ergeben vereinigt  $E''$ .

Durch Übergang zu den Komplementärmengen ergibt sich zunächst: Nach Annahme von  $\varepsilon > 0$  kann man zu jedem  $E$  eine innerhalb  $J$  abgeschlossene Menge  $E^*$  so bestimmen, daß:

$$\bar{f}(E) - f(E^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Läßt man dann von  $E^*$  alle Punkte weg, die im Innern der Intervalle:

$$\alpha_1 = \left[ \begin{array}{cc} M, & M - \frac{1}{n} \\ M - \frac{1}{n}, & -M \end{array} \right], \quad \alpha_2 = \left[ \begin{array}{cc} M, & M \\ -M, & M - \frac{1}{n} \end{array} \right]$$

liegen, und bezeichnet die abgeschlossene Restmenge mit  $E'$ , so hat man:

$$\bar{f}(E^* - E') \leq f(\alpha_1) + f(\alpha_2) = F(M, M) - F\left(M - \frac{1}{n}, M - \frac{1}{n}\right)$$

und dies wird wegen (7)  $< \frac{\varepsilon}{2}$  bei geeigneter Wahl von  $n$ .

Nach (8) ist nun:

$$\bar{f}(E^* - E') + f(E') \geq f(E^*),$$

also

$$f(E^*) - f(E') \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{f}(E) - f(E') < \varepsilon,$$

womit bewiesen ist:

Nach willkürlicher Wahl von  $\varepsilon > 0$  läßt sich in jeder Menge  $E$  von  $J$  eine abgeschlossene Menge  $E'$  so bestimmen, daß:

$$\underline{f}(E) - f(E') < \varepsilon.$$

Wir betrachten jetzt zwei disjunkte Mengen  $E_1, E_2$  von  $T$ . In jeder bestimmen wir eine abgeschlossene Menge  $E'_1$ , beziehungsweise  $E'_2$ , so daß

$$f(E_1) - f(E'_1) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad f(E_2) - f(E'_2) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (9)$$

wo  $\varepsilon$  beliebig  $> 0$  fixiert werde.

$E'_1$  und  $E'_2$  sind disjunkt und abgeschlossen, besitzen daher einen Minimalabstand  $\delta > 0$ . Nach (8) folgt nun:

$$f(E'_1 + E'_2) \leq \underline{f}(E_1 + E_2). \quad (10)$$

$E'_1 + E'_2$  können wir in eine Intervallfolge  $\alpha_1 \alpha_2 \dots$  derart einschließen, daß

$$f(E'_1 + E'_2) \leq \Sigma f(\alpha_k) \leq f(E'_1 + E'_2) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Teilen wir dann alle  $\alpha_k$ , in welchen eine Seite länger als  $\frac{\delta}{2}$  ist, in Teilintervalle, deren Seitenlängen diese Zahl nicht überschreiten, so können wir aus dem abgeänderten Intervall-



system die Intervalle  $\beta_k$  herausgreifen, die Punkte von  $E'_1$  enthalten, und die  $\gamma_k$ , welche Punkte von  $E'_2$  enthalten. Kein  $\beta_k$  kann offenbar mit einem  $\gamma_k$  identisch sein. Daher ist:

$$\Sigma f(\beta_k) \geq \bar{f}(E'_1), \quad \Sigma f(\gamma_k) \geq f(E'_2)$$

$$f(E'_1) + f(E'_2) \leq \Sigma f(\beta_k) + \Sigma f(\gamma_k) \leq \Sigma f(\alpha_k) \leq f(E'_1 + E'_2) + \frac{\varepsilon}{3},$$

was mit (9) und (10) zur Ungleichung:

$$f(E_1) + f(E_2) < \underline{f}(E_1 + E_2) + \varepsilon$$

führt. Zusammen mit (8) ergibt sich so:

Zwei disjunkte Mengen  $E_1, E_2$  von  $T$  ergeben als Summe wieder eine Menge von  $T$  und es ist:

$$f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2).$$

Der Satz überträgt sich unmittelbar auf eine beliebige endliche Anzahl disjunkter Mengen von  $T$ .

Es seien jetzt  $E_1$  und  $E_2$  zwei Mengen von  $T$ . Wir bestimmen zwei Bereiche  $E''_1$  und  $E''_2$  sowie zwei abgeschlossene Mengen  $E'_1$  und  $E'_2$ , so daß  $E_i$  in  $E''_i$ ,  $E'_i$  in  $E_i$  enthalten ist und:

$$f(E_i) - f(E'_i) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad f(E''_i) - f(E_i) < \frac{\varepsilon}{4}$$

ausfällt.  $\varepsilon$  kann dabei offenbar beliebig  $> 0$  vorgeschrieben werden.

$E''_i - E'_i$  ist ein Bereich, gehört folglich zu  $T$ . Daher ist:

$$f(E''_i - E'_i) + f(E'_i) = f(E''_i),$$

$$f(E''_i - E'_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$E_1 E_2$  ist in dem Bereiche  $E''_1 E''_2$  enthalten und enthält die abgeschlossene Menge  $E'_1 E'_2$ . Daher ist:

$$f(E'_1 E'_2) \leq \underline{f}(E_1 E_2), \quad \bar{f}(E_1 E_2) \leq f(E''_1 E''_2),$$

$$\bar{f}(E_1 E_2) - \underline{f}(E_1 E_2) \leq f(E''_1 E''_2 - E'_1 E'_2).$$

Es ist nämlich  $E'_1 E'_2$  in  $E''_1 E''_2$  enthalten und ihre Differenz als Bereich zu  $T$  gehörig. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} E''_1 E''_2 - E'_1 E'_2 &= E''_1 E''_2 \cdot C(E'_1 E'_2) = E''_1 E''_2 (C E'_1 + C E'_2) \\ &= E''_2 (E''_1 \cdot C E'_1) + E''_1 (E''_2 \cdot C E'_2). \end{aligned}$$

Aus  $E''_1 C E'_1 = E''_1 - E'_1$  folgt aber:

$$f(E''_1 \cdot C E'_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher auch:

$$\bar{f}(E_1 E_2) - \underline{f}(E_1 E_2) < \varepsilon.$$

Zugleich mit  $E_1$  und  $E_2$  gehört daher auch  $E_1 E_2$  zu  $T$ . Da ferner  $E_1 - E_2 = E_1 \cdot C E_2$ , so gehört auch  $E_1 - E_2$  zu  $T$ .

Damit sind die eingangs an  $T$  gestellten Forderungen erfüllt mit Ausnahme von  $c$ ), welche wir noch zu bestätigen haben.

Es sei also  $E_1, E_2, \dots$  eine abzählbare Folge disjunkter Mengen aus  $T$ . Setzen wir:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + \dots + E_n &= S_n, & E_{n+1} + E_{n+2} + \dots &= R_n, \\ E_1 + E_2 + \dots &= S_n + R_n = E, \end{aligned}$$

so ist:

$$f(S_{n+1}) - f(S_n) = f(E_{n+1}) \geq 0, \quad f(S_n) \leq f(J),$$

daher die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(E_k)$$

konvergent. Zu jedem  $n$  kann man ferner eine Intervallfolge  $\alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(n)} \dots$  bestimmen, welche  $E_n$  einschließt und für die:

$$\sum_k f(\alpha_k^{(n)}) < f(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig fixiert werden kann.

Jetzt wählen wir  $N$  so groß, daß:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} f(E_k) < \varepsilon.$$

Da  $CE$  in  $CS_N$  enthalten ist, folgt:

$$\bar{f}(CE) \leq f(CS_N) = f(J) - f(S_N),$$

$$\underline{f}(E) \geq f(S_N) > \sum_{k=1}^{\infty} f(E_k) - \varepsilon.$$

Ferner ist:

$$\bar{f}(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(\alpha_i^{(k)}) < \sum_{k=1}^{\infty} f(E_k) + \varepsilon.$$

Wegen der Willkür von  $\varepsilon$  folgt:

$$\bar{f}(E) = \underline{f}(E) = \sum_{k=1}^{\infty} f(E_k).$$

Damit ist auch die letzte Forderung als erfüllt nachgewiesen und überdies  $f$  als absolut additiv erkannt.

5. Wir sind so, ausgehend von einem den gestellten Forderungen entsprechenden  $F$ , zu einer monotonen Mengenfunktion mit dem Definitionsbereiche  $T$  gelangt, der die in 1. gestellten Forderungen *a)* bis *c)* erfüllt, darüber hinaus aber noch folgende Eigenschaft besitzt:

*d')* In jeder Menge  $E$  von  $T$  kann man nach Vorschreibung eines beliebigen  $\varepsilon > 0$  eine abgeschlossene Menge  $E'^1$  so bestimmen, daß:

$$f(E) - f(E') < \varepsilon.$$

Es sei jetzt für  $F$  die zu einem von vornherein gegebenen monotonen  $f$  mit dem Definitionsgebiete  $T$  nach 3. gehörige Funktion genommen. Die Methoden von 4. geben dann ein zu  $F$  gehöriges  $f_1$  mit dem Definitionsbereiche  $T_1$ . Man erkennt leicht,

<sup>1</sup> Natürlich ist darunter auch eingeschlossen, daß  $E'$  eventuell mit  $E$  identisch sein kann.

daß für jede Menge, die zu  $T$  und  $T_1$  gehört, der Wert von  $f_1$  mit dem von  $f$  übereinstimmt und daß  $T$  und  $T_1$  mindestens alle im Borel'schen Sinne meßbaren Mengen gemein haben. Wir definieren dann auch auf jenen Mengen von  $T_1$ , welche in  $T$  nicht vorkommen,  $f(E)$ , indem wir  $f = f_1$  annehmen und nennen  $T_1$  den natürlichen Definitionsbereich von  $f$ . Man erkennt unschwer, daß, falls schon  $T$  die Forderung  $d')$  befriedigte,  $T_1$  ganz  $T$  umfaßt.

Handelt es sich um eine beliebige, absolut additive Mengenfunktion  $f$ , so läßt sie sich nach 2. in zwei monotone zerlegen:

$$f = \varphi - \psi;$$

$\varphi$  und  $\psi$  haben je einen natürlichen Definitionsbereich und die Mengen, die beiden gemeinsam sind, erfüllen  $a)$  bis  $c)$  und auch noch  $d')$  bezüglich  $\varphi$  und  $\psi$ .

Definieren wir auf allen diesen Mengen  $f$  durch  $\varphi - \psi$ , so haben wir damit einen neuen Definitionsbereich  $T_1$  für  $f$  geschaffen, der neben  $a)$  bis  $c)$  noch der Forderung genügt:

$d)$  In jeder Menge  $E$  von  $T_1$  läßt sich zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine abgeschlossene Menge  $E_1$  bestimmen, so daß:

$$|f(E) - f(E_1)| < \varepsilon.$$

Wir wollen nun zu  $f$  einen derartigen Definitionsbereich  $T$  in möglichst umfassender Weise bestimmen.

Es sei der zunächst vorliegende Definitionsbereich  $T_1$  von  $f$  so beschaffen, daß er  $d)$  erfüllt, wie wir ja jetzt annehmen können. Wir bestimmen zunächst die Gesamtschwankung:

$$g(E) = \int_E |df|$$

unter Zugrundelegung des Definitionsbereiches  $T_1$ .<sup>1</sup> Es ergibt sich dann:  $T_1$  ist auch für  $g(E)$  ein Definitionsbereich von der Art, daß  $d')$ , beziehungsweise  $d)$  gilt.

<sup>1</sup> Vgl. hierzu noch eine Bemerkung auf p. 63.

Denn es sei  $E$  irgend eine Menge von  $T_1$ ,  $\Pi$  eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen  $E_1, \dots, E_n$ , so daß:

$$\int_E |df| - \sum_1^n |f(E_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wo  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgeschrieben werde. Dann kann man nach  $d$ ) in  $E_k$  ein abgeschlossenes  $E'_k$  so bestimmen, daß:

$$|f(E_k) - f(E'_k)| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Es wird daher:

$$\int_E |df| - \sum_1^n |f(E'_k)| < \varepsilon$$

und, da  $g(E'_k) \geq |f(E'_k)|$ , so folgt:

$$g(E) - g(E'_1 + \dots + E'_n) = g(E) - \sum_1^n g(E'_k) < \varepsilon,$$

d. h. es ist der Forderung  $d')$  Genüge geleistet.

Für das so definierte  $g(E)$  bestimmen wir jetzt den natürlichen Definitionsbereich, dieser sei  $T$  und umfaßt gewiß  $T_1$  (nach der Bemerkung auf p. 20 oben).

Wir bilden jetzt, zunächst natürlich nur auf  $T_1$ :

$$\varphi = \frac{1}{2} (g(E) + f(E)),$$

$$\psi = \frac{1}{2} (g(E) - f(E)).$$

Das ist nichts anderes als die kanonische Zerlegung von 2. Wir haben dann zwei monotone Mengenfunktionen vor uns, deren jede einen  $T_1$  umfassenden, natürlichen Definitionsbereich hat. Da  $\varphi + \psi = g$ , so schließt man sofort, daß diejenigen Mengen, die den beiden natürlichen Definitionsbereichen von  $\varphi$ , beziehungsweise  $\psi$  zugleich angehören, gewiß dem von  $g$  angehören. Andererseits lassen sich aber  $\varphi$  und  $\psi$  nach 4. für jede Menge von  $T$  definieren; denn ist  $E$  eine Menge von  $T$ ,  $CE$  ihre

Komplementärmenge, so kann man zu jedem  $\varepsilon > 0$  in  $E$  eine abgeschlossene Menge  $E_1$ , in  $CE$  eine ebensolche  $E_2$  derart finden, daß:

$$g(E) - g(E_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad g(CE) - g(E_2) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad g(E) - g(CE_2) > \frac{\varepsilon}{2},$$

$$g(CE_2) - g(E_1) = g(CE_2 - E_1) < \varepsilon.$$

Da nun  $E_2$  und  $E_1$  als abgeschlossene Mengen zu  $T_1$  gehören, kann man weiter schließen:

$$\varphi(CE_2) - \varphi(E_1) = \varphi(CE_2 - E_1) \leq g(CE_2 - E_1) < \varepsilon.$$

Nun ist aber nach (8):

$$\varphi(E_1) \leq \underline{\varphi}(E),$$

$$\varphi(CE_2) \geq \overline{\varphi}(E);$$

also folgt:

$$\overline{\varphi}(E) - \underline{\varphi}(E) \leq \varphi(CE_2) - \varphi(E_1) < \varepsilon.$$

$E$  gehört demnach tatsächlich zum natürlichen Definitionsbereiche von  $\varphi$ . Für  $\psi$  ist die Schlußweise dieselbe. Daher ergibt sich:

Der gemeinsame Teil der natürlichen Definitionsbereiche von  $\varphi$  und  $\psi$  ist identisch mit dem natürlichen Definitionsbereiche  $T$  von  $g(E)$ .

Wir können daher  $\varphi$  und  $\psi$  auf ganz  $T$  definieren und setzen dann auf allen Mengen von  $T$ :

$$f = \varphi - \psi.$$

Der Definitionsbereich  $T_1$  von  $f$  ist daher zu dem umfassenderen  $T$  erweitert und auch jetzt noch ist die Forderung *d*) erfüllt.

Würde man nun, von  $T$  ausgehend, denselben Prozeß durchlaufen, wie vorhin von  $T_1$ , so könnte eine abermalige Erweiterung des Definitionsbereiches nur dann stattfinden, wenn in dem jetzigen Bereiche  $T_1$  die Gesamtschwankung eine andere wäre als vorher. Nun ist aber zunächst klar: Geht man von einem Definitionsgebiete  $T'$  zu einem umfassenderen  $T''$  über, wobei  $T'$  und  $T''$  beide der Forderung *d*) genügen, so kann sich auf jeder Menge von  $T'$  die Gesamtschwankung höchstens

vergrößern. Da es aber nach der oben durchgeführten Schlußweise dann in jeder Menge  $E$  von  $T'$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Anzahl disjunkter abgeschlossener Mengen  $E_k$  gibt, so daß:

$$\int_E |df| - \sum_1^n |f(E_k)| < \varepsilon,$$

wobei die Gesamtschwankung unter Zugrundelegung von  $T''$  gebildet ist, so folgt, daß auch bei alleiniger Berücksichtigung von Teilungsmengen aus  $T' -$  z. B.  $E_1, \dots, E_n, E - E_1 - \dots - E_n -$  derselbe Wert der Gesamtschwankung resultieren muß, wie bei Berücksichtigung von ganz  $T''$ . Daher kann auch in dem hier vorliegenden Fall eine fernere Erweiterung des Definitionsgebietes unter Einhaltung von  $d)$  nicht stattfinden. Es ist also der gewonnene Definitionsbereich  $T_1$  der umfassendste, der  $d)$  erfüllt und soll daher als der natürliche bezeichnet werden.

Im folgenden haben wir es stets mit dem natürlichen Definitionsbereiche zu tun, so daß  $d)$  immer statthat.

6. Man erschließt jetzt weiter, ebenso wie in der Theorie des Lebesgue'schen Inhaltsmaßes, die folgenden Sätze (die aber von der Forderung  $d)$  unabhängig sind):

$\alpha)$  Sind  $E_1, E_2, \dots$  Mengen von  $T$ , so gehören auch  $E_1 + E_2 + \dots$  und  $E_1 E_2 \dots$  zu  $T$ .

Wir verstehen unter der »äußeren Grenzmenge«<sup>1</sup>  $\overline{\lim}_{n=\infty} E_n$ , einer Folge von Mengen  $E_1, E_2, \dots$ , die Menge aller Punkte, die in unendlich vielen der  $E_k$  vorkommen und unter der »inneren Grenzmenge«<sup>2</sup>  $\underline{\lim}_{n=\infty} E_n$  die Gesamtheit jener

Punkte, die nur in einer endlichen Anzahl der  $E_k$  nicht vorkommen; dann gilt, wie man genau wie beim Lebesgue'schen Inhaltsmaß erkennt:

$\beta)$  Zugleich mit  $E_1, E_2, \dots$  gehören auch  $\overline{\lim}_{n=\infty} E_n$  und  $\underline{\lim}_{n=\infty} E_n$  zu  $T$ .

<sup>1</sup> = ensemble limite complet; Borel, Fonctions des variables réelles (Paris 1905), p. 18.

<sup>2</sup> = ensemble limite restreint; ebenda.

Ist ferner  $f$  monoton, so gilt:

$$f(\overline{\lim}_{n=\infty} E_n) \geq \overline{\lim}_{n=\infty} f(E_n), \quad f(\underline{\lim}_{n=\infty} E_n) \leq \underline{\lim}_{n=\infty} f(E_n),$$

wobei die Symbole  $\overline{\lim}$  und  $\underline{\lim}$  auf den rechten Seiten die obere, beziehungsweise untere Unbestimmtheitsgrenze bezeichnen.

Ist speziell:

$$\overline{\lim}_{n=\infty} E_n = \underline{\lim}_{n=\infty} E_n = E,$$

so sagen wir, die Folge  $E_1 E_2 \dots$  besitze eine Grenzmenge ( $E$ ) schlechthin. Aus  $\beta$ ) und der kanonischen Zerlegung folgt dann:

$\gamma$ ) Gehören  $E_1 E_2 \dots$  zu  $T$  und existiert eine Grenzmenge  $\lim_{n=\infty} E_n$ , so gehört sie auch zu  $T$  und es ist:

$$f(\lim_{n=\infty} E_n) = \lim_{n=\infty} f(E_n).$$

7. Eine monoton absolut additive Mengenfunktion  $b(E)$  heiÙe eine Basis der absolut additiven Mengenfunktion  $f(E)$ , wenn für alle Mengen, für welche  $f(E)$  definiert und  $b(E) = 0$  ist, auch  $f(E) = 0$  folgt.

Die Haupteigenschaft dieses Begriffes ist die folgende: Der natürliche Definitionsbereich von  $f$  umfaßt den ( $T$ ) von  $b$ . Sei nämlich  $E$  eine Menge von  $T$ . Dann läßt sich in  $E$  zu jedem  $n$  eine abgeschlossene Menge  $E'_n$ , in  $CE$  eine abgeschlossene Menge  $E''_n$ , so bestimmen, daß:

$$b(E) - b(E'_n) < \frac{1}{n^2}, \quad b(CE) - b(E''_n) < \frac{1}{n^2},$$

$$b(CE''_n) - b(E) < \frac{1}{n^2}.$$

Es sei nun  $\varphi$  einer der monotonen Bestandteile von  $f$ . Dann ist:

$$\overline{\varphi}(E) \leq \varphi(CE''_n), \quad \underline{\varphi}(E) \geq \varphi(E'_n),$$

$$\overline{\varphi}(E) - \underline{\varphi}(E) \leq \varphi(CE''_n - E'_n).$$

Es sei nun:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(CE''_n - E'_n) = k \geq 0.$$



Dann ergibt  $\beta$ ):

$$\varphi(\overline{\lim}_{n=\infty} (CE''_n - E'_n)) \geq k.$$

Andrerseits ist  $\overline{\lim}_{n=\infty} (CE''_n - E'_n)$  für jedes  $N$  in:

$$(CE''_N - E'_N) + (CE''_{N+1} - E'_{N+1}) + \dots$$

enthalten und daher:

$$b(\overline{\lim}_{n=\infty} (CE''_n - E'_n)) \leq \frac{2}{N^2} + \frac{2}{(N+1)^2} + \dots,$$

also:

$$b(\overline{\lim}_{n=\infty} (CE''_n - E'_n)) = 0.$$

Weil  $b$  aber Basis von  $\varphi$  ist, so folgt auch  $k = 0$  und damit:

$$\overline{\varphi}(E) - \underline{\varphi}(E) \leq \overline{\lim}_{n=\infty} \varphi(CE''_n - E'_n) = 0.$$

$E$  gehört daher zum natürlichen Definitionsbereich von  $\varphi$ , analog aber auch von  $\psi$  und daher von  $f$ .

Es ist ferner klar:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  kann man ein  $\delta$  so angeben, daß für jede Menge  $E$ , die den Definitionsbereichen von  $b$  und  $f$  angehört und für welche  $b(E) < \delta$ , auch  $|f(E)| < \varepsilon$ .

Es genügt offenbar, dies für einen monotonen Bestandteil  $\varphi$  von  $f$  nachzuweisen. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine Zahl  $\varepsilon > 0$  und eine Folge von Mengen  $E_1, E_2, \dots$ , für welche:

$$b(E_k) < \frac{1}{k^2}, \quad \varphi(E_k) > \varepsilon.$$

Es müßte dann nach  $\beta$ ) auch:

$$\varphi(\overline{\lim}_{n=\infty} E_n) \geq \varepsilon$$

sein, man zeigt aber mit den Mitteln des letzten Beweises, daß darin ein Widerspruch liegt.

Bezeichnet  $m(E)$  das Lebesgue'sche Inhaltsmaß, so heie nach Lebesgue<sup>1</sup>  $f(E)$  absolut stetig, wenn  $m$  eine Basis von  $f$  ist. Nach Lebesgue<sup>2</sup> gilt der Satz:

Der Wert einer absolut stetigen, absolut additiven Mengenfunktion auf einer meßbaren Menge  $E$  läßt sich durch ein Integral darstellen:

$$f(E) = \int_E \Phi(P) dP,$$

wo  $\Phi$  eine summierbare Funktion darstellt.

Eine absolut additive Mengenfunktion heie stetig, wenn für jede aus einem einzigen Punkt  $P$  bestehende Menge:

$$f(P) = 0.$$

Man kann aber auch definieren, ohne den Sinn zu ändern:

Eine Mengenfunktion heie (schlechthin) stetig, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta$  so bestimmt werden kann, daß für alle Mengen von  $T$ , deren Durchmesser kleiner ist als  $\delta$ ,  $|f(\varepsilon)| < \varepsilon$  ausfllt.

Unter dem Durchmesser  $d(E)$  einer Menge  $E$  ist hierbei die obere Grenze der Abstände ihrer Punktepaare verstanden.

Hat man nämlich eine Folge  $E_1, E_2, \dots$  mit:

$$\lim_{n=\infty} d(E_n) = 0, \tag{12}$$

so sei:

$$\overline{\lim}_{n=\infty} f(E_n) = l.$$

$f$  sei monoton vorausgesetzt, was die Tragweite des Beweises nicht beeinträchtigt. Dann ergibt wieder  $\beta$ ):

$$f(\overline{\lim}_{n=\infty} E_n) \geq l \geq 0.$$

Wählt man in jedem  $E_k$  einen Punkt  $P_k$ , so kann man durch Auswahl einer geeigneten Teilfolge erreichen, daß die Unbestimmtheitsgrenze  $l$  dieselbe bleibt und außerdem

$$\lim_{k=\infty} P_k = P$$

<sup>1</sup> A. a. O., p. 381.

<sup>2</sup> A. a. O., p. 399.

existiert, d. h. daß die Folge der Punkte  $P_k$  eine einzige Häufungsstelle  $P$  hat. Dann ist aber wegen (12) kein von  $P$  verschiedener Punkt in  $\overline{\lim} (E_n)$  enthalten; also:

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n=\infty} E_n &= P, \\ f(P) &\geq l.\end{aligned}$$

Infolge der ersten Definition der Stetigkeit ist also  $l = 0$ , da es wegen der Monotonie von  $f$  nicht negativ sein kann.

Also folgt aus  $\lim_{n=\infty} d(E_n) = 0$ :

$$\lim_{n=\infty} f(E_n) = 0$$

und dies ist nur eine Umformung obiger Definition.

Die Stetigkeitseigenschaften übertragen sich von  $f$  in leicht zu überblickender Weise auf seine monotonen Bestandteile in der kanonischen Zerlegung; derart, daß mindestens einer der Bestandteile denselben Stetigkeitsgrad wie  $f$  besitzen muß, während dem anderen auch ein höherer Grad von Stetigkeit zukommen kann.

Eine absolut additive, absolut stetige Mengenfunktion heie auch vom Typus I.

Eine absolut additive Mengenfunktion, die stetig ist, aber fur jede Menge  $E$ , die zu einer bestimmten Nullmenge<sup>1</sup>  $E_0$  disjunkt ist, verschwindet, heie vom Typus II und  $E_0$  ihre Grundmenge. Ist  $E_1$  eine beliebige Nullmenge, so kann man ersichtlich auch  $E_0 + E_1$  als Grundmenge von  $f$  auffassen.

$f$  heie endlich vom Typus III, wenn es folgendes Verhalten zeigt: Es sei  $P_1, P_2, \dots$  eine abzhnbare (oder endliche) Punktmenge in  $J$ ,  $a_1 + a_2 + \dots$  eine absolut konvergente Reihe. Dann sei:

$$f(E) = \sum_{(E)} a_k,$$

wo die Summe uber jene Werte von  $k$  zu erstrecken ist, fur welche  $P_k$  zu  $E$  gehort, beziehungsweise:

$$f(E) = 0,$$

<sup>1</sup> Nullmenge = Menge vom Lebesgue'schen Inhalte Null.

wenn  $E$  keinen Punkt aus den  $P_k$  enthält. Die Menge der Punkte  $P_k$  heie die Grundmenge von  $f$ .

Die Mengenfunktionen vom Typus I gestatten die schon erwähnte Darstellung durch Lebesgue'sche Integrale, die vom Typus III die in ihrer Definition liegende Darstellung durch unendliche Reihen. Dagegen bietet der Typus II eine große Anzahl von Möglichkeiten dar, da z. B. die Inhaltsdefinition eines  $m$ -dimensionalen Gebildes in  $J$  sich ihm unterordnet.

Man kann leicht zeigen:

Jede absolut additive Mengenfunktion  $f$  läßt sich in eindeutiger Weise als Summe dreier Mengenfunktionen vom Typus I, II, beziehungsweise III darstellen:

$$f(E) = f_I(E) + f_{II}(E) + f_{III}(E).$$

Dabei können natürlich einzelne Glieder dieser Darstellung ausfallen.

Für unsere Zwecke bietet diese Zerlegung kein Interesse, daher werden wir auf den Beweis, der übrigens naheliegt, verzichten. Diese Verhältnisse gestatten es, die Theorie der Integraloperationen sowie der Funktionen unendlich vieler Variablen als Spezialfälle der Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen aufzufassen.

## II. Die Verallgemeinerung des Begriffes des Stieltjes'schen Integrals.

1. Es sei  $F(P)$  eine auf einer Menge  $E_0$  von  $J$  definierte Funktion von  $x_1 x_2 \dots x_n$ , die gleichmäßig stetig ist, worunter wir verstehen, daß zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta$  so bestimmt werden kann, daß für alle Punktepaare  $P, P'$  von  $E_0$ , deren Abstand<sup>1</sup>  $\overline{PP'}$  kleiner als  $\delta$  ist,  $|F(P) - F(P')| < \varepsilon$  ausfllt. Es sei ferner  $f$  eine absolut additive Mengenfunktion, zu deren Definitionsbereich  $(T)E_0$  gehöre. Wir betrachten dann eine Einteilung  $\Pi$  von  $E_0$  in Teilmengen  $E_1 E_2 \dots E_n$  von  $T$  und wählen in jedem  $E_k$  einen willkürlichen Punkt  $P_k$ . Wir setzen nun:

$$S_{\Pi} = \sum_1^n F(P_k) f(E_k) = \sum_{E_0}^{\Pi} F(P) \Delta f.$$

<sup>1</sup> Unter »Abstand«  $\overline{PP'}$  können wir z. B.  $(\sum (x_i - x_i')^2)^{\frac{1}{2}}$  verstehen.

Wir bezeichnen jetzt und im folgenden den Maximaldurchmesser einer Teilung  $\Pi$ , d. h. den größten der Durchmesser<sup>1</sup> ihrer Teilungsmengen, mit  $d(\Pi)$ . Es bezeichne ferner  $\eta(\delta)$  die obere Grenze von:

$$|F(P) - F(P')|$$

für alle Punktpaare  $P, P'$ , deren Abstand  $\leq \delta$  ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $F$  ist  $\eta(\delta)$  für jedes positive  $\delta$  definiert, monoton und  $\lim_{\delta=0} \eta(\delta) = 0$ . Es sei jetzt  $\Pi'$  eine analoge

Teilung von  $E_0$  in die Mengen  $E'_1 E'_2 \dots E'_m$  und wir bilden auf gleiche Weise  $S_{\Pi'}$ . Bezeichnen wir noch mit  $\Pi\Pi'$  die aus  $\Pi$  und  $\Pi'$  zusammengesetzte Teilung,<sup>2</sup> so gilt:

$$\begin{aligned} S_{\Pi} - S_{\Pi'} &= \sum_{E_0}^{\Pi} F(P_k) f(E_k) - \sum_{E_0}^{\Pi'} F(P'_i) f(E'_i) \\ &= \sum_{E_0}^{\Pi\Pi'} [F(P_k) - F(P'_i)] f(E_k E'_i). \end{aligned}$$

Für Summenglieder, für welche  $E_k E'_i$  von  $\Omega$  verschieden ist, ist notwendig:

$$\overline{P_k \cdot P'_i} \leq d(\Pi) + d(\Pi').$$

Also gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |S_{\Pi} - S_{\Pi'}| &\leq \eta(d(\Pi) + d(\Pi')) \sum_{E_0}^{\Pi\Pi'} f |(E_k E'_i)| \\ &\leq \eta(d(\Pi) + d(\Pi')) \int_{E_0} |df|. \end{aligned} \quad (13)$$

Es sei jetzt  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  eine Folge von Teilungen von  $E$ , für welche:

$$\lim_{n=\infty} d(\Pi_n) = 0.$$

Eine solche Folge soll kurz »gegen Null konvergent« heißen.

<sup>1</sup> Vgl. p. 26.

<sup>2</sup> Vgl. p. 6.

Dann ergibt die Ungleichung (13) die Existenz von:

$$\lim_{n=\infty} S_{\Pi_n} = \int_{E_0} F(P) df.$$

Dieser Grenzwert ist offenbar unabhängig von der speziellen Wahl der Folge  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ , da, wenn  $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots$  eine zweite gegen Null konvergente Folge ist, auch  $\Pi_1, \Pi'_1, \Pi_2, \Pi'_2, \dots$  eine solche darstellt. Läßt man in (13)  $\Pi'$  eine gegen Null konvergente Folge durchlaufen, so ergibt sich noch:

$$\left| S_{\Pi} - \int_{E_0} F(P) df \right| \leq \eta(d(\Pi) + 0) \int_{E_0} |df|. \quad (14)$$

Um den Inhalt dieser Ungleichung bequem formulieren zu können, verabreden wir noch:

Ist jeder Teilung  $\Pi$  einer Menge  $E_0$  eine Zahl  $Z_{\Pi}(E_0)$  zugeordnet und existiert eine Zahl  $Z$  derart, daß sich zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta$  bestimmen läßt, so daß:

$$|Z_{\Pi}(E_0) - Z| < \varepsilon$$

für alle Teilungen  $\Pi$  mit  $d(\Pi) < \delta$ , so drücken wir diesen Tatbestand kurz durch die Limesbezeichnung aus:

$$\lim_{\Pi=0} Z_{\Pi}(E_0) = Z.$$

Dann ergibt aber (14):

$$\lim_{\Pi=0} \sum_{E_0}^{\Pi} F(P) \Delta f = \int_{E_0} F(P) df.$$

Der hier eingeführte Grenzprozeß stellt die erste Verallgemeinerung des Stieltjes'schen Integrals dar. Es ist offenbar:

$$\left| \int_{E_0} F df \right| \leq [\text{Obere Grenze von } |F| \text{ auf } E_0] \cdot \int_{E_0} |df|.$$

2. Wir wollen jetzt eine zweite Verallgemeinerung vornehmen, die zu der eben behandelten in demselben Verhältnisse steht wie die Lebesgue'sche Integraldefinition zur Definition des Integrals einer stetigen Funktion.

Wir nennen eine Funktion  $F(P)$  »meßbar bezüglich der absolut additiven Mengenfunktion  $f(E)$ «, wenn für jede Zahl  $A$  die Menge jener Punkte  $P$ , in welchen  $F(P) > A$ , zum Definitionsbereiche  $T$  von  $f$  gehört. Offenbar hat jede im Borel'schen Sinne meßbare Funktion diese Eigenschaft. Über Funktionen, die bezüglich  $f$  meßbar sind, beweist man mit denselben Mitteln wie bei der Theorie der im Lebesgue'schen Sinne meßbaren Funktionen, eine Reihe von Sätzen, welche zum Ausdruck bringen, daß die Klasse der bezüglich  $f$  meßbaren Funktionen die aus ihren Elementen durch die elementaren Rechenoperationen hervorgehenden Funktionen ebenfalls enthält und daß auch Grenzprozesse nicht aus dieser Klasse hinausführen. Letzteres kann man so formulieren:<sup>1</sup>

Sind  $F_1, F_2, \dots$  meßbar bezüglich  $f$ , so sind es auch die beiden Unbestimmtheitsgrenzen:

$$\overline{\lim}_{n=\infty} F_n, \quad \underline{\lim}_{n=\infty} F_n,$$

wenn man die Stellen, wo z. B.  $\overline{\lim}_{n=\infty} F_n = \infty$  ist, etwa stets zu jenen Stellen rechnet, wo der Funktionswert größer als die Zahl  $A$  ist, was immer auch  $A$  sein möge.

Es sei zunächst  $f$  eine monotone Mengenfunktion,  $F$  eine nicht negative, auf einer Menge  $E$  erklärte Funktion, die bezüglich  $f$  meßbar ist.

Wir nennen eine Folge von Zahlen

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 \dots$$

eine Fundamentalreihe mit der Maximaldifferenz  $\alpha$ , wenn

$$\lim_{n=\infty} y_n = \infty$$

und die Differenzen  $y_{n+1} - y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) die endliche obere Grenze  $\alpha$  besitzen.

<sup>1</sup> Vgl. Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitesimale, Bd. II (Paris 1912), p. 105.

Wir wählen dann eine beliebige Fundamentalreihe und bilden die Reihe:

$$\sum_0^{\infty} y_k f(E_k), \quad (15)$$

wo  $E_k$  die Menge jener Punkte  $P$  von  $E$  bedeutet, für welche:

$$y_k \leq F(P) < y_{k+1}.$$

Ist diese Reihe konvergent, so heiÙe  $F$  summierbar bezüglich  $f$ .

Eine beschränkte, positive, bezüglich  $f$  meÙbare Funktion ist eo ipso summierbar bezüglich  $f$ .

Wir wählen jetzt eine zweite Fundamentalreihe  $(y'_k)$  und es sei  $\alpha$  die größere der Maximaldifferenzen von  $(y_k)$  und  $(y'_k)$ . Dann wird:

$$\sum_0^{\infty} y_k f(E_k) - \sum_0^n y'_i f(E'_i) = \sum_0^{\infty} \sum_0^n (y_k - y'_i) f(E_k E'_i).$$

Für diejenigen Kombinationen  $i, k$ , bei welchen  $E_k E'_i$  nicht die leere Menge  $\Omega$  ist, ist aber  $|y_k - y'_i| \leq \alpha$ . Daher folgt:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} y_n f(E_k) - \sum_0^n y'_i f(E'_i) &\geq -\alpha f(E), \\ \sum_0^{\infty} y'_i f(E'_i) &\leq \sum_0^{\infty} y_n f(E_k) + \alpha f(E). \end{aligned}$$

Hält man daher  $\alpha$  fest und betrachtet die Gesamtheit aller Fundamentalreihen, deren Maximaldifferenz  $\alpha$  nicht übersteigt, so sind die zugehörigen Summen (15) sämtlich konvergent und ihre Werte besitzen eine endliche obere Grenze  $\underline{S}$ . Erweitert man eine Fundamentalreihe durch Einschubung von Zwischengliedern, so kann die zugehörige Summe (15) nicht abnehmen. Ersetzt man daher  $\alpha$  durch einen kleineren Wert, so kann  $\underline{S}$  nicht abnehmen, aber auch nicht zunehmen;  $\underline{S}$  ist also von  $\alpha$  unabhängig.



Ganz Analoges gilt von den Summen:

$$\sum_0^\infty y_{i+1} f(E_i), \tag{15a}$$

die sämtlich größer als die mit derselben Fundamentalreihe gebildeten (15) ausfallen und eine untere Grenze  $\bar{S} \geq \underline{S}$  besitzen. Bildet man die Differenz der Summen (15) und (15a) für dieselbe Fundamentalreihe, so folgt leicht:

$$\underline{S} = \bar{S} = \int_E F(P) df.$$

Dies ist die gesuchte Integraldefinition, zunächst für die vorausgesetzte Spezialisierung von  $F$  und  $f$ .

Hat man eine Folge von Fundamentalreihen  $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots$  mit den Maximaldifferenzen  $\alpha_k$  und ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , so gilt:

$$\left. \begin{aligned} s_n &= \sum_0^\infty y_k^{(n)} f(E_k^{(n)}) \leq \int_E F(P) df \leq \sum_0^\infty y_{k+1}^{(n)} f(E_k^{(n)}) = S_n, \\ S_n - s_n &= \sum_0^\infty (y_{k+1}^{(n)} - y_k^{(n)}) f(E_k^{(n)}) \leq \alpha_n f(E). \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

Daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_E F(P) df.$$

Man erhält offenbar eine der obigen Definition der Summierbarkeit von  $f$  völlig gleichwertige, wenn man die Konvergenz einer der Summen (15a) fordert.

Nimmt  $F$  auch negative Werte an, so zerlegen wir es in zwei nicht negative Funktionen  $F_1, F_2$ :

$$F = \frac{|F| + F}{2} - \frac{|F| - F}{2} = F_1 - F_2.$$

Sind  $F_1$  und  $F_2$  (die gleichzeitig mit  $F$  meßbar sind) bezüglich  $f$  summierbar, so heiße  $F$  summierbar bezüglich  $f$  und wir definieren:

$$\int_E F df = \int_E F_1 df - \int_E F_2 df.$$

Offenbar ist notwendig und hinreichend für die Summierbarkeit von  $F$ , daß die mit einer »zweiseitigen Fundamentalreihe«

$$\dots y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \dots,$$

$$y_{i+1} - y_i \leq \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_{-n} = -\infty$$

gebildete Summe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} y_k f(E_k)$$

konvergiert und es folgt dann:

$$\int_E F df = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} y_k^{(n)} f(E_k^{(n)}),$$

wenn die Maximaldifferenzen der Reihen  $y_k^{(n)}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergieren.

Ist schließlich  $f$  nicht monoton, so zerlege man es in kanonischer Weise in die monotonen Bestandteile  $\varphi$  und  $\psi$ . Ist dann  $F$  summierbar bezüglich  $\varphi$  und  $\psi$ , oder, was dasselbe ist, bezüglich<sup>1</sup>

$$\int_E |df|,$$

so heie es summierbar bezüglich  $f$  und es werde gesetzt:

$$\int_E F df = \int_E F d\varphi - \int_E F d\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} y_k^{(n)} f(E_k^{(n)}),$$

wobei der letzte Grenzübergang wie oben zu verstehen ist.

Damit ist die zweite Verallgemeinerung des Stieltjes'schen Integrals gewonnen.

Ist  $F$  auf  $E$  gleichmäßig stetig, so sind die beiden Integraldefinitionen gleichwertig.

3. Nun beweist man mit den analogen Mitteln wie beim Lebesgue'schen Integral, folgende Sätze:

<sup>1</sup> Vergl. I, 5.

I.  $\int_E F(P)df$  stellt im Definitionsbereiche von  $f$  eine absolut additive Mengenfunktion mit der Basis  $\int_E |df|$  dar, wenn  $F$  in ganz  $J$  bezüglich  $f$  meßbar ist.

Wir führen den Beweis für ein monotonen  $f$  und nicht negatives  $F$ , worauf sich der allgemeine Fall reduzieren läßt. Es sei:

$$E = E^{(1)} + E^{(2)} + \dots, \quad E^{(1)} + E^{(2)} + \dots + E^{(n)} = S_n,$$

wo die  $E^{(i)}$  disjunkt sind. Es folgt dann aus der Definition von  $\int_E Fdf$  sofort:

$$\int_{S_n} Fdf \leq \int_E Fdf, \quad \sum_1^{\infty} \int_{E^{(k)}} Fdf \leq \int_E Fdf. \quad (17)$$

Ist ferner  $y_0, y_1, \dots$  eine Fundamentalreihe mit der Maximaldifferenz  $\alpha$ , so ist:

$$\sum_1^n \int_{E^{(k)}} Fdf = \int_{S_n} Fdf \geq \sum_0^{\infty} y_i f(E_i S_n) \geq \sum_0^N y_i f(E_i S_n)$$

und folglich, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(E_i S_n) = f(E_i),$$

$$\sum_1^{\infty} \int_{E^{(k)}} Fdf \geq \sum_0^N y_i f(E_i)$$

und wegen der Willkür von  $N$ :

$$\sum_1^{\infty} \int_{E^{(k)}} Fdf \geq \sum_0^{\infty} y_i f(E_i).$$

Aus den Gleichungen (16), angeschrieben für die Reihe  $y_k$ , liest man aber ab:

$$\int_E Fdf - \sum_0^{\infty} y_i f(E_i) \leq \alpha f(E),$$

also schließlich:

$$\sum_1^{\infty} \int_{E^{(k)}} F df \geq \int_E F df - \alpha f(E).$$

Zusammen mit (17) ergibt dies den Beweis der Behauptung.

II. Wenn  $|F|$  auf  $E \leq M$  bleibt, so ist:

$$\left| \int_E F df \right| \leq M \int_E |df|.$$

III. Ist  $F_1, F_2, \dots$  eine konvergente Folge bezüglich  $f$  meßbarer Funktionen und  $|F_n| < M$ , so gilt:

$$\lim_{n=\infty} \int_E F_n df = \int_E \left( \lim_{n=\infty} F_n \right) df.$$

IV. Ist  $f$  monoton,  $F_1, F_2, \dots$  eine nicht abnehmende Folge bezüglich  $f$  summierbarer Funktionen:

$$F_i \leq F_{i+1}$$

und hat die monotone Folge:

$$\int_E F_n df$$

für  $n = \infty$  einen endlichen Grenzwert  $A$ , so ist auch  $F = \lim_{n=\infty} F_n$  summierbar und es ist:

$$\int_E F df = \lim_{n=\infty} \int_E F_n df = A.$$

Dabei kann man dort, wo  $\lim_{n=\infty} F_n = \infty$ , unter  $F$  einen beliebigen Zahlwert verstehen.

Beim Beweise kann man die  $F_n$  als nicht negativ voraussetzen. Bezeichnet  $E_n^{(N)}$  die Menge aller Punkte, wo

$$F_N > n,$$

so muß ersichtlich:

$$f(E_n^{(N)}) < \frac{A}{n}$$

ausfallen; nennen wir noch  $E_n$  die Menge aller Punkte, wo  $\lim_{k=\infty} F_k > n$ , eingeschlossen jene Punkte, wo der Grenzwert unendlich ist, so ist auch:

$$f(E_n) \leq \frac{A}{n}.$$

Die Menge  $E_\infty$ , wo  $\lim_{n=\infty} F_n = \infty$ , läßt sich aber im Sinne von I., 6.,  $\gamma$ ) in der Form:

$$E_\infty = \lim_{n=\infty} E_n$$

darstellen und es folgt:

$$f(E_\infty) = 0.$$

Wir können demnach beim Beweise des Satzes  $E$  durch  $E' = E - E_\infty$  ersetzen, ohne etwas Wesentliches zu ändern.

Nun hat man:

$$\int_{E'} F_m df \geq \int_{E-E_n} F_m df$$

und nach III.:

$$\int_{E-E_n} F df = \lim_{m=\infty} \int_{E-E_n} F_m df \leq \lim_{m=\infty} \int_{E'} F_m df = A.$$

Man erschließt hieraus leicht die Summierbarkeit von  $F$  und:

$$\int_{E'} F df = \lim_{n=\infty} \int_{E-E_n} F df \leq A. \quad (18)$$

Nun kann man bei gegebenem  $\varepsilon > 0$   $N$  und  $M$  so groß wählen, daß für alle  $n \geq N$  und  $m \geq M$ :

$$A - \int_{E-E_n} F_m df < \varepsilon.$$

Daher folgt, indem man zuerst  $m$ , dann  $n$  unendlich werden läßt:

$$\int_{E'} F df \geq A - \varepsilon.$$

Zusammen mit (18) ergibt dies die Behauptung.

V. Ist  $F_1$  summierbar,  $F_2$  meßbar und beschränkt, so ist auch  $F_1 F_2$  summierbar.

VI. Summe und Differenz summierbarer Funktionen sind summierbar und es ist:

$$\int_E (F_1 \pm F_2) df = \int_E F_1 df \pm \int_E F_2 df.$$

Beim Beweise von V. und VI. leistet IV. gute Dienste.

### III. Die stetige lineare Funktionaloperation.

1. Wir betrachten die Gesamtheit aller auf einer beschränkten, abgeschlossenen Menge  $E_0$  stetigen Funktionen  $F(P)$ . Diese sind eo ipso gleichmäßig stetig in demselben Sinne wie in II., 1. Jeder dieser Funktionen sei eine Zahl  $U(F)$  zugeordnet und es sei:

$$U(F_1 + F_2) = U(F_1) + U(F_2),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(F_n) = U(F),$$

wenn  $F_n$  gleichmäßig auf  $E_0$  gegen  $F$  konvergiert. Dann beweist man leicht:<sup>1</sup>

$$U(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = \lambda_1 U(F_1) + \lambda_2 U(F_2),$$

wenn  $\lambda_1, \lambda_2$  zwei beliebige Konstante sind, sowie die Existenz einer Zahl  $N$ , so daß:

$$|U(F)| \leq N,$$

sobald  $|F| \leq 1$ .

$U$  heiße eine stetige lineare Funktionaloperation und die kleinstmögliche Zahl  $N$  von obiger Beschaffenheit ihre Maximalzahl.<sup>2</sup> Bezeichnet man das Maximum des absoluten Betrages von  $F$  mit  $\overline{|F|}$ , so gilt:

$$|U(F)| \leq N \overline{|F|}.$$

<sup>1</sup> Vgl. Riesz, II.

<sup>2</sup> Nach E. Helly, diese Sitzungsber., Bd. CXXI (1912), Abt. IIa., p. 267.

Wir werden im folgenden beweisen:

Jede lineare Funktionaloperation läßt sich durch eine Integraloperation der in II, 1. betrachteten Art darstellen, und zwar ist:

$$U(F) = \int_{E_0} Fdf$$

und die Maximalzahl  $N$  von  $U$  hat den Wert:

$$N = \int_{E_0} |df|.$$

Wir nehmen der Einfachheit halber die Dimensionszahl gleich zwei an und es liege die abgeschlossene Menge  $E_0$  ganz im Quadrate:

$$Q: |x| \leq \frac{R}{2}, \quad |y| \leq \frac{R}{2}.$$

Für jede natürliche Zahl  $n$  machen wir eine Einteilung  $\Pi_n$  von  $Q$  in  $2^{2n}$  Teilquadrate mit der Seitenlänge  $\frac{R}{2^n}$  durch Achsenparallele. Unter dem Bereich eines der Gitterpunkte  $P_v^{(n)}$  dieses Quadratnetzes verstehen wir die an ihn anstoßenden Quadrate  $Q_v^{(n)}$  (in der Anzahl 1, 2 oder 4) einschließlich ihrer Ränder. Wir definieren dann ein System in  $Q$  stetiger Funktionen  $\varphi_v^{(n)}$  wie folgt:

Es sei jedem der Gitterpunkte  $P_v^{(n)}$  von  $\Pi_n$  eine Funktion  $\varphi_v^{(n)}$  zugeordnet, die in  $P_v^{(n)}$  den Wert Eins, in allen anderen Gitterpunkten von  $\Pi_n$  den Wert Null hat und in jedem Quadrate  $Q_\mu^{(n)}$  von  $\Pi_n$  eine bilineare Funktion in  $x$  und  $y$  darstellt.  $\varphi_v^{(n)}$  ist offenbar nur im Bereiche von  $Q_v^{(n)}$  von Null verschieden.

Wir sondern jetzt aus den Gitterpunkten von  $\Pi_n$  jene ab, deren Bereich Punkte von  $E_0$  enthält; es seien dies die Punkte  $P'_v^{(n)}$  und die zugehörigen  $\varphi$  seien mit  $\varphi'_v^{(n)}$  bezeichnet. Jedem  $P'_v^{(n)}$  ordnen wir einen Punkt  $R'_v^{(n)}$  zu, der dem Bereiche von  $P'_v^{(n)}$  und  $E_0$  angehört, sonst aber beliebig ist. Insbesondere kann ein und derselbe Punkt mehrmals unter den  $R'_v^{(n)}$  vorkommen.

Es sei jetzt  $\Phi(P)$  eine auf  $E_0$  stetige Funktion,  $\eta(\delta)$  die zugehörige, wie in I, 2. definierte Funktion, so daß:

$$|\Phi(P) - \Phi(P')| \leq \eta(PP').$$

Wir setzen jetzt:

$$\Phi'_n(P) = \sum_{\nu} \varphi'_{\nu}{}^{(n)}(P) \Phi(R_{\nu}^{(n)}).$$

$\Phi'_n(P)$  ist dann in ganz  $Q$  stetig und in jedem  $Q_{\nu}^{(n)}$  bilinear, daher zwischen dem größten und kleinsten seiner Werte in den Ecken von  $Q_{\nu}^{(n)}$  enthalten. Ist nun  $P$  ein Punkt von  $E_0$  in  $Q_{\nu}^{(n)}$ , so gehören die Ecken von  $Q_{\nu}^{(n)}$  zu den  $P_{\mu}^{(n)}$  und die Werte von  $\Phi'_n$  in ihnen sind von der Form  $\Phi(R_{\mu}^{(n)})$ .  $R_{\mu}^{(n)}$  ist dabei ein Punkt von  $E_0$ , der von  $P$  nicht weiter als  $\frac{R}{2^{n-\frac{3}{2}}}$  entfernt sein kann. Daher folgt:

$$|\Phi'_n(P) - \Phi(P)| \leq \eta \left( \frac{R}{2^{n-\frac{3}{2}}} \right)$$

oder:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi'_n(P) = \Phi(P)$$

gleichmäßig auf  $E_0$ .

Setzen wir jetzt:

$$\begin{aligned} \psi_{\nu}^{(n)}(P) &= \varphi_{\nu}^{(n)'}(P), & \text{wenn } P \text{ ein Punkt von } E_0, \\ \psi_{\nu}^{(n)}(P) &= 0, & \text{wenn } P \text{ nicht in } E_0 \text{ vorkommt,} \end{aligned}$$

so ist

$$\Phi_n(P) = \sum_{\nu} \psi_{\nu}^{(n)}(P) \Phi(R_{\nu}^{(n)})$$

auf  $E_0$  mit  $\Phi'_n$  identisch, außerhalb  $E_0$  aber Null.

Ist nun eine stetige lineare Funktionaloperation  $U(F)$  für die auf  $E_0$  stetigen Funktionen  $F$  definiert, so ist auch jedem  $\psi_{\nu}^{(n)}$  eine Zahl

$$U(\psi_{\nu}^{(n)}) = \rho_{\nu}^{(n)}$$

zugeordnet und es ist:

$$U(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(\Phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\nu} \rho_{\nu}^{(n)} \cdot \Phi(R_{\nu}^{(n)}) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\Phi),$$

denn der Klammerausdruck ist selbst eine lineare Funktionaloperation.



Ist  $N$  die Maximalzahl von  $U$  und setzt man:<sup>1</sup>

$$\Phi = \sum_{\nu} \phi_{\nu}^{(n)} \operatorname{sgn} \rho_{\nu}^{(n)},$$

so ist  $|\Phi| \leq 1$ , daher  $|U(\Phi)| \leq N$  oder  $\sum |\rho_{\nu}^{(n)}| \leq N$ .

Wir wählen jetzt ein Grundintervall  $J$ , das  $Q$  in seinem Innern enthält und bilden die auf den Mengen von  $J$  definierte absolut additive Mengenfunktion vom Typus III (vgl. I., 6.) mit der Grundmenge  $\{R_1^{(n)}, R_2^{(n)} \dots\}$ :

$$f_n(E) = \sum_{(E)} \rho_{\nu}^{(n)},$$

wobei die Summe über alle Werte von  $\nu$  zu erstrecken ist, für welche  $R_{\nu}^{(n)}$  in  $E$  vorkommt. Dann ist offenbar:

$$\begin{aligned} U_n(\Phi) &= \int_{E_0} \Phi(P) df_n, \\ \int_{E_0} |df_n| &= \int_J |df_n| = \sum_{\nu} |\rho_{\nu}^{(n)}| \leq N, \\ U(\Phi) &= \lim_{n=\infty} \int_{E_0} \Phi(P) df_n, \end{aligned}$$

wobei die Integrale im Sinne von II., 1. zu verstehen sind.

Wir werden in der nächsten Nummer einen Hilfssatz beweisen, der uns gestattet, aus diesen Resultaten den ersten Teil des zu beweisenden Satzes unmittelbar zu folgern. Wir nehmen daher jetzt an, es sei bereits die Darstellung gewonnen:

$$U(F) = \int_{E_0} F df.$$

Dann folgt sofort:

$$|U(F)| \leq \overline{|F|} \int_{E_0} |df|,$$

es ist daher die Maximalzahl von  $U$  nicht größer als  $\int_{E_0} |df|$ :

<sup>1</sup>  $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ , wenn  $x \neq 0$ ,  $\operatorname{sgn} 0 = 0$ .

Wenn nun  $\Pi$  eine Einteilung von  $E_0$  in disjunkte Mengen  $E_1, E_2, \dots, E_n$  ist, für welche:

$$\int_{E_0} |df| - \sum_{E_0} |\Delta f| < \frac{\varepsilon}{3},$$

so kann man nach I., 5., d) in jedem  $E_k$  eine abgeschlossene Menge  $E'_k$  finden, so daß:

$$|f(E_k) - f(E'_k)| < \frac{\varepsilon}{3n},$$

$$\left| \int_{E_k} |df| - \int_{E'_k} |df| \right| = \int_{E_k - E'_k} |df| < \frac{\varepsilon}{3n}.$$

Die  $E'_k$  sind disjunkt und abgeschlossen, ihre gegenseitigen Minimalabstände daher sämtlich größer als eine positive Zahl  $\delta > 0$ . Daraus folgert man leicht die Existenz einer in  $J$  stetigen Funktion  $\Phi$ , welche in jedem Punkte von  $E'_k$  den Wert  $\operatorname{sgn} f(E_k)$  hat und nirgends dem Betrage nach  $> 1$  ist.

Dann ist aber:

$$\begin{aligned} \int_{E_0} \Phi df &= \sum_k \int_{E'_k} \Phi df + \sum_k \int_{E_k - E'_k} \Phi df = \\ &= \sum_k |f(E_k)| + \sum_k \int_{E_k - E'_k} \Phi df, \\ &= \sum_k [ |f(E'_k)| - |f(E_k)| ] + \left[ \sum_k |f(E_k)| - \int_{E_0} |df| \right] + \\ &\quad + \left[ \sum_k \int_{E_k - E'_k} \Phi df \right] + \int_{E_0} |df|. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber:

$$\left| \int_{E_0} \Phi df - \int_{E_0} |df| \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  dabei beliebig fixiert werden kann, folgt, daß die Maximalzahl von  $U$  auch nicht kleiner als  $\int_{E_0} |df|$  sein kann.

Es ist somit die Maximalzahl von  $U$  diesem Werte gleich, wie der zweite Teil der Behauptung besagte.

2. Der noch ausstehende Hilfssatz lautet:

Es sei  $f_1, f_2 \dots$  eine Folge absolut additiver Mengenfunktionen, deren Gesamtschwankungen auf  $J$  beschränkt sind:

$$\int_J |df_n| < A.$$

Ferner sei  $E_0$  eine abgeschlossene Menge im Inneren von  $J$ . Dann kann man eine Teilfolge  $f_n^*$  der  $f_n$  und eine absolut additive Mengenfunktion  $f$  so bestimmen, daß für jede auf  $E_0$  stetige Funktion  $\Phi(P)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_0} \Phi(P) df_n^* = \int_{E_0} \Phi(P) df.$$

Beim Beweise genügt es, auf Grund der kanonischen Zerlegung von I, 2. die  $f_n$  als monoton vorauszusetzen. Die Integrale ändern sich ferner nicht, wenn man  $f_n(E)$  durch  $f_n(E_0 E)$  ersetzt. Wir wollen daher die  $f_n$  für alle zu  $E_0$  disjunkten Mengen als Null vorauszusetzen.  $J'$  bezeichne  $J$  einschließlich seines gesamten Randes. Ein Punkt von  $J$  soll dyadisch heißen, wenn seine Koordinaten sich schreiben lassen:

$$x = -M + \frac{pM}{2^\alpha}, \quad y = -M + \frac{qM}{2^\beta};$$

$M$  ist dabei, wie in I, 1., die halbe Seitenlänge von  $J$ ,  $p, q, \alpha, \beta$  sind ganze, nicht negative Zahlen. Die dyadischen Punkte sind in  $J'$  überall dicht und abzählbar:  $P_1, P_2, P_3 \dots$

Zu jeder der Mengenfunktionen  $f_n$  gehört nach I, 3. eine in  $J'$  definierte Funktion  $F_n(x, y)$  mit den Eigenschaften:

1.  $F(x, -M) = F(-M, y) = 0$ ,
2.  $F_n(x+h, y+k) - F_n(x, y+k) - F_n(x+h, y) + F_n(x, y)$   
 $= f_n \left( \begin{array}{c} x+h, y+k \\ x, y \end{array} \right) \geq 0, \quad (h > 0, k > 0),$
3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow a-0 \\ y \rightarrow b-0}} F_n(x, y) = F_n(a, b).$

Nach einem bekannten Verfahren kann man aus den  $F_1 F_2 \dots$  eine Teilfolge  $F_1^*, F_2^* \dots$  herausheben, so daß:

$$\lim_{n=\infty} F_n^*(P_\nu) = F^*(P_\nu)$$

für alle dyadischen Punkte  $P_\nu$  existiert. Es ist nun:

$$1'. F^*(x, -M) = F^*(-M, y) = 0,$$

$$2'. F^*(x+h, y+k) - F^*(x, y+k) - F^*(x+h, y) + F^*(x, y) \geq 0 \\ (h \geq 0, k \geq 0).$$

Dabei sind unter  $x, y, x+h, y+k$  nur dyadische Werte zu verstehen. Aus 2' und:

$$F^*(x, y) \leq \overline{\lim}_{n=\infty} f_n(J) \leq A$$

folgt — analog wie (7) in I., 3. — die Existenz des Grenzwertes:

$$\lim_{\substack{h=0 \\ k=0}} F^*(x-h, y-k) = F(x, y).$$

Dabei sind  $x, y$  Koordinaten eines beliebigen Punktes von  $J'$ , den zu  $J$  gehörigen Rand ausgenommen;  $h, k$  durchlaufen beim Grenzübergang nur positive Werte (mit Ausschluß der Null) derart, daß  $x-h, y-k$  stets dyadisch sind. Auf dem zu  $J$  gehörigen Rande von  $J'$  definieren wir noch:

$$F(x, y) = 0.$$

Dann ist  $F(x, y)$  in ganz  $J'$  definiert und hat die Eigenschaften:

$$\alpha) F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y) \geq 0 \\ (h \geq 0, k \geq 0),$$

$$\beta) \lim_{\substack{h=0 \\ k=0}} F(x-h, y-k) = F(x, y) \quad (h \geq 0, k \geq 0).$$

Die erste Beziehung folgt unmittelbar; die zweite erhellt leicht auf folgende Weise. Es sei:

$$\lim_{n=\infty} h_n = 0, \quad h_n \geq 0, \\ \lim_{n=\infty} k_n = 0, \quad k_n \geq 0.$$

Wegen der Definition von  $F$  kann man zu jedem  $n$  zwei positive Größen  $\delta_n, \delta'_n$  so bestimmen, daß:

$$0 \leq F(x-h_n, y-k_n) - F^*(x-h_n-\delta_n, y-k_n-\delta'_n) < \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = \lim_{n=\infty} \delta'_n = 0.$$

Dann ist aber:

$$F(x, y) = \lim_{n=\infty} F^*(x-h_n-\delta_n, y-k_n-\delta'_n),$$

$$= \lim_{n=\infty} F(x-h_n, y-k_n),$$

w. z. b. w.

$\gamma$ ) Auf jeder rationalen Geraden des Büschels mit dem Scheitel  $(-M, -M)$  existiert, soweit ihre Punkte zu  $J'$  gehören,  $\lim_{n=\infty} F_n^*$  und stimmt mit  $F$  überein, ausgenommen eine höchstens abzählbare Punktmenge.

Dabei ist unter einer rationalen Geraden des erwähnten Büschels die Menge aller Punkte:

$$y = -M + r(x + M),$$

wo  $r$  rational ist, verstanden. Man kann offenbar zum Beweise  $r > 0$  annehmen. Auf der zu  $J'$  gehörigen Strecke einer solchen Geraden bilden die dyadischen Punkte eine abzählbare, überall dichte Menge und es stellt

$$f_n(x) = F_n^*(x, -M + r(x + M))$$

eine monotone Funktion von  $x$  dar, weil:

$$\begin{aligned} f_n(x+h) - f_n(x) &= F_n^*(x+h, y+k) - F_n^*(x, y) \\ &= [F_n^*(x+h, y+k) - F_n^*(x+h_1, -M) - \\ &\quad - F_n^*(x, y+k) + F_n^*(x_1, -M)] \\ &\quad + [F_n^*(x, y+k) - F_n^*(x, y) - F_n^*(-M, y+k) + \\ &\quad + F_n^*(-M, y)] \end{aligned}$$

$$(y = -M + r(x + M), k = rh)$$

wegen 2.  $\geq 0$  ist.

Da demnach die monotonen  $f_n$  in der überall dichten Menge der dyadischen Punkte gegen eine Grenze:

$$f(x) = F^*(x_1 - M + r(x + M))$$

konvergieren, so konvergiert nach einem Satze von E. Helly<sup>1</sup>  $f_n$  überall mit Ausnahme höchstens einer abzählbaren Menge gegen eine monotone Grenze  $f^*$ , die auf den dyadischen Punkten mit  $f$  übereinstimmt. Geht man von  $f^*(x)$  zu einer Funktion  $\bar{f}(x)$  über, indem man an den — in abzählbarer Menge vorhandenen — Sprungstellen von  $f^*(x)$  den Wert dieser Funktion durch  $f^*(x-0)$  ersetzt, so bedeutet dies nichts anderes als der Ansatz:

$$\bar{f}(x) = F(x, -M + r(x + M)).$$

Es konvergiert daher  $F_n^*$  tatsächlich, eine abzählbare Menge ausgenommen, gegen  $F$ . Markieren wir diese Ausnahmestellen auf jeder rationalen Geraden, so bildet ihre Gesamtheit wieder eine abzählbare Menge.

$F$  hat wegen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) alle Eigenschaften, die zur Bildung einer absolut additiven Mengenfunktion nach den Regeln von I., 4. erforderlich sind. Es sei  $f$  die zugehörige Mengenfunktion, so daß für jedes Intervall:

$$f\left(\left[\begin{matrix} a', b' \\ a, b \end{matrix}\right]\right) = F(a' b') - F(a' b) - F(a, b') + F(a, b).$$

Für jede zu  $E_0$  disjunkte Menge ist ferner  $f(E) = 0$ . Denn zunächst verschwindet  $f$  vermöge der Definition von  $F$  für jedes Intervall, dessen Punkte von  $E_0$  einen kleinsten Abstand  $> \delta > 0$  haben. Da sich  $J - E_0$  als Summe einer Folge derartiger Intervalle darstellen läßt, so folgt  $f(J - E_0) = 0$  und dasselbe, wegen der Monotonie von  $f$ , für jede Teilmenge von  $J - E_0 = CE_0$ .

Wir wählen jetzt eine Zahl  $k > 0$  so, daß ihre rationalen Vielfachen  $\frac{m}{n} k$  zu  $-M$  addiert, nur solche Werte von  $x$  geben, für welche  $F_n^*(x, y)$  auf allen rationalen Geraden des behandelten Büschels gegen  $F$  konvergiert. Daß dies angeht, folgt daraus, daß die durch diese Forderungen ausgeschlossenen Abszissen

<sup>1</sup> A. a. O., p. 285.

$\xi_1, \xi_2, \dots$  abzählbar sind und  $k$  demnach der Forderung genügen muß:

$$-M + \frac{m}{n} k \neq \xi_p,$$

$$k \neq \frac{n}{m} (\xi_p + M).$$

Es sind demnach für  $k$  nur abzählbar viele Werte unmöglich. Für

$$x = -M + \frac{m}{n} k$$

haben dann die Ordinaten zu den rationalen Büschelgeraden die Werte:

$$-M + r \frac{m}{n} k,$$

stellen also für alle derartigen  $x$ -Werte dieselbe, in  $(-M, +M)$  überall dichte Wertmenge dar. Es gilt, mit anderen Worten:

Auf der in  $J$  überall dichten Punktmenge:

$$x = -M + r_1 k, \quad y = -M + r_2 k,$$

wo  $r_1, r_2$  unabhängig voneinander alle rationalen Werte zwischen Null und  $\frac{2M}{k}$  annehmen, existiert der Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty} F_n^*(x, y) = F(x, y)$$

und es ist folglich für jedes Intervall  $\alpha$ , dessen Ecken besagter Menge angehören:

$$\lim_{n=\infty} f_n^*(\alpha) = f(\alpha).$$

Jetzt nehmen wir eine Einteilung  $\Pi_n$  von  $J$  vor, indem wir Parallele zu den Achsen ziehen, welche die letzteren in den Punkten mit dem Koordinatenwerte:

$$-M + \frac{hk}{n} \quad \left( h = 1, 2, \dots \left[ \frac{2Mn}{k} \right] \right)$$

treffen. Der Durchmesser sämtlicher Teilintervalle dieser Zerlegung übersteigt nicht den Betrag  $\frac{k\sqrt{2}}{n}$ .

Bezeichnen wir noch die größte der Zahlen  $A$  und  $\int_J |df|$  mit  $B$  (es ließe sich zeigen, daß  $B = A$ ), so gilt für ein auf  $E_0$  stetiges  $\Phi$  nach (14):

$$\left| \sum_J \Pi_n \Phi(\bar{P}) \Delta f_\rho^* - \int_{E_0} \Phi df_\rho^* \right| \leq \eta \left( \frac{k\sqrt{2}}{n} + 0 \right) \cdot B \quad (\rho = 1, 2, \dots),$$

$$\left| \sum_J \Pi_n \Phi(\bar{P}) \Delta f - \int_{E_0} \Phi df \right| \leq \eta \left( \frac{k\sqrt{2}}{n} + 0 \right) \cdot B.$$

Dabei ist  $P$  in allen diesen Ungleichungen (bei festem  $n$ ) derselbe, sonst willkürliche Punkt von  $E_0$  im betreffenden Teilintervalle, dagegen verschwindet  $\Delta f_\rho^*$  und  $\Delta f$  für den Fall, daß das Teilintervall zu  $E_0$  disjunkt ist, wodurch die betreffenden Glieder der Summen wegfallen. Da  $\eta$  nur von  $\Phi$  abhängt und, wenn  $\Phi$  auf  $E_0$  stetig ist, mit  $n = \infty$  gegen Null konvergiert, ferner wegen der obigen Resultate:

$$\lim_{\rho = \infty} \sum_J \Pi_n \Phi(\bar{P}) \Delta f_\rho^* = \sum_J \Pi_n \Phi(\bar{P}) \Delta f,$$

so schließt man daraus leicht:

$$\lim_{n = \infty} \int_{E_0} \Phi df_n^* = \int_{E_0} \Phi df,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

#### IV. Darstellung der absolut additiven Mengenfunktionen durch verallgemeinerte Stieltjes'sche Integrale.

1. Wir beschränken uns wieder auf den zweidimensionalen Fall.  $f(E)$  sei eine in  $J$  definierte, absolut additive, monotone Mengenfunktion. Wir teilen  $J$  durch äquidistante Parallele zu den Achsen sukzessive in  $4, 4^2, 4^3, \dots$  kongruente quadratische Teilintervalle und numerieren diese so, daß aus  $J$  die Intervalle  $J_1, J_2, J_3, J_4, \dots$  hervorgehen, wenn man von der Teilung » $n$ ter Stufe« in  $4^n$  Intervalle zu der Teilung » $(n+1)$ ter Stufe



übergeht. Dabei ist unter »Intervall« stets der in I., 1. definierte Begriff zu verstehen, so daß jeder Punkt von  $J$  bei beliebigem  $n$  einem und nur einem Intervalle  $n$ ter Stufe angehört.

Andererseits tragen wir auf einer Strecke  $0 \leqq t < f(J)$  in entsprechender Weise lineare Intervalle auf, und zwar so, daß jedem Intervall  $J_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  ein lineares Intervall

$$K_{\alpha_2 \dots \alpha_n} (\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \leqq t < \tau_{\alpha_1 \dots \alpha_n} + f(J_{\alpha_1 \dots \alpha_n}))$$

oder keines entspricht, je nachdem  $f(J_{\alpha_1 \dots \alpha_n})$  von Null verschieden ist oder nicht. Dabei sollen die  $K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  (bei festem  $n$ ) so angeordnet sein, daß sie einander nicht überdecken, aber lückenlos aneinanderschließen, so zwar, daß  $K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  auf  $K_{\beta_1 \dots \beta_n}$  folgt oder umgekehrt, je nachdem in der Reihe der Differenzen

$$\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2 \dots \alpha_n - \beta_n$$

das erste nicht verschwindende Glied positiv oder negativ ist. Dadurch ist bewirkt, daß für jedes feste  $n$ :

$$\sum_1^{\alpha_1} \dots \sum_1^{\alpha_n} K_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = K,$$

wo  $K$  das  $J$  entsprechende Intervall  $0 \leqq t < f(J)$  sein soll, und daß beim Übergang zu höherer Stufenzahl  $K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  in  $K_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}}$ ,  $K_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+2}} \dots K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+4}}$  zerfällt, ebenso wie es bei den  $J$  der Fall war.

Wir stellen nun eine Abbildung<sup>1</sup> der Punkte von  $J$  auf die Punkte des Intervalls  $K$  in folgender Weise her:

Jeder Punkt  $P$  von  $J$  gehört einer eindeutig bestimmten Folge von Intervallen:  $J, J_{\alpha_1}, J_{\alpha_1 \alpha_2}, \dots$  steigender Stufenzahl an, welchen in  $K$  eine unendliche oder abbrechende Folge von Intervallen  $K, K_{\alpha_1}, K_{\alpha_1 \alpha_2}, \dots$  entspricht, deren jedes alle folgenden enthält. Bricht die Folge der  $K$  ab, so soll dem Punkte  $P$  kein Punkt von  $K$  entsprechen. Die Menge aller derartigen Punkte von  $J$  bezeichnen wir mit  $E'_0$ .

Man erhält  $E'_0$  auf folgende Weise: Man ordnet die Intervalle  $J_{\nu_1 \nu_2 \dots}$  nach steigender Stufenzahl, geht sie der Reihe nach

<sup>1</sup> Diese Korrespondenz ist eine Verallgemeinerung eines von F. Riesz ausgesprochenen Korrespondenzprinzips; a. a. O. (I.), p. 497.

durch und wenn man auf ein  $J_{\nu_1, \dots, \nu_k}$  stößt, für welches  $f(J_{\nu_1, \dots, \nu_k}) = 0$ , so merkt man es an und streicht aus der Reihe der  $J_{\nu_1, \nu_2, \dots}$  sämtliche Teilintervalle höherer Stufe von  $J_{\nu_1, \dots, \nu_k}$ . Man erhält so eine abzählbare Menge disjunkter Intervalle  $J_{\nu_1, \dots, \nu_k}$ , für welche  $f$  verschwindet, und ihre Vereinigungsmenge stellt offenbar  $E'_0$  dar. Für  $E'_0$  und jede ihrer Teilmengen ist offenbar  $f = 0$ .

Falls dagegen die Folge  $K, K_{\alpha_1}, K_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots$  sich ins Unendliche fortsetzt, sind zwei Fälle möglich: entweder enthalten die Intervalle der Reihe  $K, K_{\alpha_1}, \dots$  allen gemeinsame Punkte, deren Menge dann aus einem Intervall, oder einem beiderseits abgeschlossenen (uneigentlichen) Intervall, oder einem einzelnen Punkte besteht, dann sehen wir letztere Menge als Bild des Punktes  $P$  in  $K$  an; oder die  $K, K_{\alpha_1}, K_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots$  haben keinen Punkt gemein. Letzteres kann nur dann eintreten, wenn die  $K_{\alpha_1}, \dots$  von einem bestimmten an alle denselben rechten Endpunkt  $Q$  besitzen, während ihre linken Endpunkte gegen  $Q$  konvergieren. Auch in diesem Falle soll dem Punkte  $P$  kein Bildpunkt in  $K$  entsprechen. Es ist dann notwendig  $f(P) = 0$ ; denn es gilt:

$$P = \lim_{n=\infty} J_{\alpha_1, \dots, \alpha_n},$$

$$f(P) = \lim_{n=\infty} f(J_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \lim_{n=\infty} m(K_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = 0,$$

wenn  $m$  das lineare Inhaltsmaß bedeutet. Solche Punkte  $P$  können nur in abzählbarer Menge  $E''_0$  vorkommen, da jedem von ihnen ein anderes  $Q$  entsprechen muß und die Endpunkte der Intervalle  $K_{\beta_1, \dots, \beta_n}$ , zu denen die  $Q$  gehören, eine abzählbare Menge bilden. Wir fassen zusammen:

Als Bild eines Punktes  $P$  von  $J$  gilt die Punktmenge in  $K$ , welche den Intervallen  $K, K_{\alpha_1}, K_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots$ , die den  $P$  enthaltenden  $J, J_{\alpha_1}, J_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots$  entsprechen, gemeinsam sind. Für die Menge  $E_0 = E'_0 + E''_0$  aller Punkte  $P$ , die kein Bild in  $K$  besitzen, und jede ihrer Teilmengen ist  $f = 0$ . Es gibt Punkte, die als Bild ein (eigentliches oder uneigentliches) Intervall  $A$  besitzen, während das Bild der übrigen Punkte wieder ein Punkt ist. Die Bilder zweier verschiedener Punkte sind disjunkt. Daher sind die Intervalle  $A$  höchstens

in abzählbarer Menge vorhanden, die Punkte, die als Bild ein Intervall besitzen, bilden also ebenfalls eine abzählbare Menge  $E_1$ .

2. Es handelt sich jetzt um die Umkehrung dieser Korrespondenz. Ein Punkt  $Q$  von  $K$  liegt in einer eindeutig bestimmten Folge von Intervallen:  $K, K_{\beta_1}, K_{\beta_1\beta_2}, \dots$ , denen in  $J$  die Intervalle:  $J, J_{\beta_1}, J_{\beta_1\beta_2}, \dots$  entsprechen. Letztere haben entweder einen (und nur einen) Punkt  $P$  gemein, dann muß  $Q$  zum Bilde von  $P$  gehören, oder sie haben keinen gemeinsamen Punkt. Dies tritt ähnlich wie oben dann und nur dann ein, wenn von einem gewissen Werte von  $n$  ab mindestens eine der nicht zu  $J_{\beta_1, \dots, \beta_n}$  gehörigen Begrenzungslinien dieses Intervalls fest bleibt. Wir bezeichnen die durch die vorgenommene dyadische Teilung von  $J$  entstehenden Abszissen in beliebiger Anordnung mit  $x_1 x_2 \dots$ , die Ordinaten mit  $y_1 y_2 \dots$  und wählen ein  $\varepsilon > 0$ . Dann läßt sich zu jedem  $x_n$  der ersten Reihe ein  $x'_n$  aus derselben Reihe finden, für welches:

$$f\left(\begin{matrix} x_n & M \\ x'_n & -M \end{matrix}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Denn wenn  $\xi_1 < \xi_2 < \dots$  eine gegen  $x_n$  konvergente Folge ist, so ist:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{matrix} x_n & M \\ \xi_k & -M \end{matrix} = \Omega, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\begin{matrix} x_n & M \\ \xi_k & -M \end{matrix}\right) = 0.$$

Analoges gilt für die  $y$ . Jedes der Intervalle  $\begin{bmatrix} x_n & M \\ x'_n & -M \end{bmatrix}$  zerfällt in eine endliche Anzahl von Intervallen gleicher, geeignet gewählter Stufenzahl  $\rho_n$ . Markieren wir für jedes  $n$  die entsprechenden Intervalle in  $K$ , so ist deren Gesamtlänge:

$$< \sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dasselbe führen wir mit den  $y_n$  aus und erhalten so in  $K$  zwei abzählbare Intervallfolgen, die Intervalle  $D$ , so daß die Summe der Längen der Intervalle  $D < \varepsilon$  ist.

Kehren wir jetzt zu den Punkten  $Q$  zurück, für welche die Folge  $J, J_{\beta_1}, J_{\beta_1\beta_2}, \dots$  keinen gemeinsamen Punkt aufweist. Da, wie bemerkt, von einem bestimmten  $n$  ab die rechten oder oberen Intervallgrenzen der  $J_{\beta_1, \dots, \beta_n}$  fest bleiben, so wollen wir annehmen, es sei etwa für  $n > N$  die rechte Grenze von  $J_{\beta_1, \dots, \beta_n}$  gleich  $x_v$ . Dann liegen für genügend große Stufenzahl die  $J_{\beta_1, \dots, \beta_n}$  sämtlich in  $\left[ \begin{matrix} x_v, & M \\ x'_v, & -M \end{matrix} \right]$ , die entsprechenden  $K_{\beta_1, \dots, \beta_n}$  und somit auch  $Q$  demnach in dem von den Intervallen  $D$  bedeckten Gebiet. Alle Punkte  $Q$  sind demnach in Intervalle von der Gesamtlänge  $< \varepsilon$  eingeschlossen, d. h. wegen der Willkür von  $\varepsilon$ , sie bilden zusammen eine Nullmenge  $E_0$ .

Ausgenommen eine Nullmenge  $E_0$ , gehört also jeder Punkt  $Q$  von  $K$  dem Bilde eines und nur eines Punktes  $P$  von  $J$  an. Gehört ferner  $Q$  zu keinem der Intervalle  $A$ , so ist  $Q$  das Bild von  $P$ .

3. Wir betrachten jetzt eine Punktmenge  $E$  in  $J$ , welche zum Definitionsbereiche  $T$  von  $f$  gehört. Wir trennen von ihr zuerst  $EE_0$  ab, dann ist  $f(E - EE_0) = f(E)$ , und bezeichnen die Gesamtheit  $E'$  der Bilder der Punkte von  $E - EE_0$  in  $K$ , welche gleichzeitig die Gesamtheit der Bilder der Punkte von  $E$  darstellen, als Bild von  $E$  in  $K$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existieren in  $J$  zwei Intervallmengen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  und  $\beta_1, \beta_2, \dots$  derart, daß  $\Sigma \alpha_i E$  und  $\Sigma \beta_i CE$  umfaßt und die Ungleichung gilt:

$$\Sigma f(\alpha_i) + \Sigma f(\beta_i) < f(J) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man kann offenbar jedes Intervall  $\gamma$  in  $J$  in eine endliche oder abzählbare Menge von Intervallen  $J_{\rho_1, \dots, \rho_v}$  einschließen,<sup>1</sup> für welche  $\Sigma f(J_{\rho_1, \dots, \rho_v}) - f(\gamma)$  beliebig klein wird. Es ist daher erlaubt, die  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  als Intervalle  $J_{\rho_1, \dots, \rho_v}$  vorauszusetzen. Betrachten wir jetzt die den  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  in  $K$  entsprechenden Inter-

<sup>1</sup> Bezeichnet  $\xi$  die Abszisse des linken Randes,  $\eta$  die Ordinate des unteren Randes von  $\gamma$ , so kann man zuerst  $x_v$  und  $y_\mu$  (vgl. 2.) so wählen, daß  $x_v \leq \xi$ ,  $y_\mu \leq \eta$  und für das links bis  $x_v$ , unten bis  $y_\mu$  erweiterte Intervall  $\gamma'$   $f(\gamma') - f(\gamma) < \varepsilon$  wird.  $\gamma'$  läßt sich aber in eine abzählbare Folge von  $J_{\rho_1, \dots, \rho_v}$  zerlegen.

valle. Die ersteren umschließen  $E'$ , die anderen  $(CE)'$ . Ferner gehört  $K - E' - (CE)'$  ersichtlich zu  $\overline{E_0}$ , ist also eine Nullmenge und kann in eine Folge von Intervallen mit einer Gesamtlänge  $< \frac{\varepsilon}{2}$  eingeschlossen werden. Daher ist sowohl  $E'$  als auch  $CE' = (CE)' + (K - E' - (CE)')$  in eine Intervallfolge eingeschlossen und die Summen der Längen sämtlicher einschließenden Intervalle ist:

$$< \Sigma f(\alpha_i) + \Sigma f(\beta_i) + \frac{\varepsilon}{2} < f(J) + \varepsilon = m(K) + \varepsilon.$$

Daher ist  $E'$  meßbar und hat ersichtlich den Inhalt  $f(E)$ .

Einer Menge  $E$  von  $T$  entspricht daher in  $K$  eine meßbare Menge  $E'$  und es ist  $m(E') = f(E)$ .

Es sei nun  $E'$  eine beliebige, meßbare Menge in  $K$ . Wir trennen von  $E'$  ab: erstens  $E' \overline{E_0}$ , das ist eine Nullmenge von Punkten, die nicht Bildpunkte von Punkten in  $J$  sind; zweitens die Menge jener Punkte von  $E'$ , die in den Intervallen  $A$  liegen. Diese Menge ist meßbar und besteht aus Punkten, die nicht einziger Bildpunkt von Punkten in  $J$  sind. Der Rest von  $E'$  sei  $E''$ , jedem seiner Punkte entspricht in  $J$  ein Punkt, dessen Bild er ist; die Menge der letzteren Punkte in  $J$ , die mit  $E''$  in ein-eindeutiger Beziehung steht, heiße  $E$ .  $E''$  ist meßbar, läßt sich also nach Vorgabe von  $\varepsilon > 0$  in eine Intervallfolge  $\alpha_k$  so einschließen, daß jeder Punkt von  $E''$  im Inneren eines der  $\alpha_k$  liegt und daß  $\Sigma m(\alpha_k) < m(E'') + \varepsilon$ .

Wir wählen jetzt eines der Intervalle  $\alpha_k$  und gehen die  $K_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  in steigender Stufenzahl durch. Unter den Intervallen jeder Stufe wählen wir diejenigen aus, die ganz im Inneren von  $\alpha_k$  liegen, d. h. deren sämtliche Punkte innere Punkte von  $\alpha_k$  sind und welche in den schon bei niedrigerer Stufe herausgegriffenen nicht vorkommen. Wir erhalten so eine abzählbare Folge von Intervallen, die einander nicht überdecken und ganz im Inneren von  $\alpha_k$  liegen. Ein innerer Punkt von  $\alpha_k$ , der in keinem dieser Intervalle liegt, kommt in einer unendlichen Folge ineinandergeschachtelter  $K$ -Intervalle vor, deren Längen nicht gegen Null konvergieren, d. h. in einem der Intervalle  $A$ . Ersetzen

wir also jedes  $\alpha_k$  durch die dermaßen gewählten  $K$ -Intervalle, so bleiben nur Punkte von  $\Sigma \alpha_v$  weg, die nicht zu  $E''$  gehören. Daher läßt sich  $E''$  in eine Folge von  $K$ -Intervallen einschließen, deren Gesamtlänge  $< m(E'') + \varepsilon$  ist. Diesem entspricht in  $J$  eine Folge von  $J$ -Intervallen, welche  $E$  einschließen und für welche:

$$\Sigma f(J_{\alpha_1, \dots, \alpha_v}) < m(E'') + \varepsilon.$$

Die Komplementärmenge von  $E$  setzt sich zusammen:

1. aus den Punkten der Menge  $E_0$ . Für diese ist  $f(E_0) = 0$ , daher kann man sie in eine Intervallfolge  $\gamma_i$  so einschließen, daß:

$$\Sigma f(\gamma_i) < \frac{\varepsilon}{3};$$

2. aus den Punkten von  $E_1$ . Für diese ist  $f(E_1) = \Sigma m(A)$ , wo die Summierung über alle  $A$ -Intervalle geht. Man kann also  $E_1$  in eine Intervallfolge  $\gamma'_i$  einschließen, so daß:

$$\Sigma f(\gamma'_i) < \Sigma m(A) + \frac{\varepsilon}{3};$$

3. aus der Menge  $\bar{E}$  der restlichen Punkte von  $J$ . Diese haben in  $K$  je ein bestimmtes Bild und diese Bilder bilden zusammen die Menge:

$$\bar{E}'' = K - \Sigma A - \bar{E}_0 - E'',$$

welche den Inhalt hat:

$$f(J) - \Sigma m(A) - m(E'').$$

Sie ist auf  $\bar{E}$  ebenso ein-eindeutig bezogen wie  $E''$  auf  $E$  und kann in gleicher Weise behandelt werden. Es ergibt sich daher die Existenz eines Intervallsystems  $J'_{\alpha_1, \dots, \alpha_v}$ , für welches:

$$\Sigma f(J'_{\alpha_1, \dots, \alpha_v}) < f(J) - \Sigma m(A) - m(E'') + \frac{\varepsilon}{3}.$$

1. bis 3. ergeben zusammen, daß sich  $CE$  in eine Intervallfolge  $\gamma''$  so einschließen läßt, daß:

$$\Sigma f(\gamma'') < f(J) - m(E'') + \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich, daß  $E$  zu  $T$  gehört mit  $f(E) = m(E'')$ .

Ist also eine meßbare Menge  $E''$  in  $K$  vorgelegt, die zu den Intervallen  $A$  disjunkt ist, so ist jeder ihrer Punkte mit Ausnahme einer Nullmenge Bildpunkt eines Punktes von  $J$ . Bezeichnet man die Menge letzterer Punkte mit  $E$ , so gehört  $E$  zu  $T$  und es ist  $f(E) = m(E'')$ .

4. Es sei jetzt  $g(E)$  eine absolut additive Mengenfunktion, für welche  $f$  eine Basis (I., 7.) darstellt. Wir wollen dann auf den meßbaren Mengen  $E'$  von  $K$  ebenfalls eine absolut additive Mengenfunktion  $G(E')$  definieren, und zwar wie folgt:

$E'$  sei eine beliebige, meßbare Menge von  $K$ .  $E' - \Sigma E'A$  ist nach dem letzten Resultate, von einer Nullmenge abgesehen, Bild eines  $E$  in  $J$  und es ist  $m(E' - \Sigma E'A) = f(E)$ . Es bezeichne  $P_i$  den Punkt von  $J$ , dessen Bild das  $A$ -Intervall  $A_i$  ist. Es ist dann  $f(P) = m(A_i)$ . Wir setzen:

$$G(E') = g(E) + \sum_1^{\infty} \frac{m(E'A_i)}{m(A_i)} g(P_i).$$

Da  $\Sigma |g(P_i)|$  konvergieren muß und die Faktoren  $\frac{m(E'A_i)}{m(A_i)}$  höchstens den Wert Eins haben, ist dies zulässig.

Damit ist auf den meßbaren Mengen von  $K$  eine Mengenfunktion definiert, die, wie leicht zu sehen, absolut additiv und absolut stetig ist, denn wenn  $m(E') = 0$ , so ist auch  $m(E' - \Sigma E'A) = f(E) = g(E) = 0$  und es verschwindet auch  $m(E'A_i)$ . Nach dem Satze von Lebesgue (vgl. p. 26) läßt sich nun  $G(E')$  schreiben:

$$G(E') = \int_{E'} \Phi(t) dt.$$

Dabei kann man die summierbare Funktion  $\Phi$  in  $A_i$  konstant voraussetzen. Ist nun  $E$  eine beliebige Menge von  $T$  in  $J$ , so ist  $g(E) = G(E')$ , wenn  $E'$  das Bild von  $E$  bedeutet. Denn für die Menge jener Punkte von  $J$ , die in  $K$  kein Bild haben und alle ihre Teilmengen, ist ja  $f$  und folglich  $g$  Null. Daher folgt:

$$g(E) = \int_{E'} \Phi(t) dt.$$

Wir definieren jetzt in  $J$  eine Funktion  $\Psi(P)$  wie folgt:

1. Hat  $P$  ein Bild<sup>1</sup>  $Q$  in  $K$ , so sei  $\Psi(P) = \Phi(Q)$ .
2. Hat  $P$  kein Bild in  $K$ , so sei  $\Psi(P)$  etwa Null.

$\Psi(P)$  ist bezüglich  $f$  summierbar. Sei  $E$  eine Menge von  $T$  in  $J$ ,  $E'$  ihr Bild in  $K$ ; wir nehmen eine Fundamentalreihe:

$$\dots < y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \dots$$

mit der Maximaldifferenz  $\alpha$  und bezeichnen:

1. die Menge der Punkte von  $E'$ , für welche

$$y_k \leq \Phi(x) < y_{k+1},$$

mit  $E'_k$ ,

2. die Menge aller Punkte von  $E$ , für welche

$$y_k \leq \Psi(x) < y_{k+1},$$

mit  $E_k$ , so ist:

$$f(E_k) = m(E'_k).$$

Denn es besteht  $E'_k$  erstens aus den Bildern der Punkte von  $E_k$ , zweitens aus Punkten von  $\bar{E}_0$ , die eine Nullmenge bilden, und es ist andererseits für die Menge  $E_k E_0$ , die in  $K$  kein Bild hat,  $f = 0$ . Es zieht daher die bestehende Konvergenz von

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} y_k m(E'_k)$$

die von

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} y_k f(E_k)$$

nach sich, d. h.  $f$  ist summierbar. Da nun beide Reihen stets übereinstimmen, so folgt weiter:

$$g(E) = G(E') = \int_{E'} \Phi(t) dt = \int_E \Psi(P) df,$$

wenn  $E$  eine beliebige Menge in  $J$ ,  $E'$  ihr Bild in  $K$  ist.

<sup>1</sup> Ist das Bild von  $P$  eines der Intervalle  $A$ , so sei  $Q$  irgend ein Punkt von  $A$ .



Damit ist bewiesen:

Eine absolut additive Mengenfunktion  $g(E)$  mit der Basis  $f(E)$  läßt sich im Definitionsbereich von  $f$  durch ein Stieltjes'sches Integral (im Sinne von II., 2.) ausdrücken:

$$g(E) = \int_E \Psi(P) df,$$

wo  $\Psi$  eine bezüglich  $f$  summierbare Funktion bedeutet.

### V. Die Verallgemeinerung der Hellinger'schen Integralbegriffe.

1. Für das Folgende sind einige — größtenteils bekannte — Ungleichungen fundamental, die ich herleiten will, um ihren Zusammenhang klarzulegen.

Ist  $p > 1$ , so gilt, wie man sofort aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung herleitet:

$$|1+x|^p \geq 1+px,$$

woraus weiter folgt:

$$|a+b|^p \geq |a|^p + pb|a|^{p-1} \operatorname{sgn} a. \quad (19)$$

Dabei sind  $a$  und  $b$  beliebige Zahlen und die Potenzen stets durch  $|x|^\beta = e^{\beta \lg |x|}$  zu definieren, während unter  $0^\beta$ , so lange  $\beta > 0$ , stets Null zu verstehen ist.

Es seien  $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$  positive Zahlen,  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  beliebige Zahlen. Wir setzen in (19):

$$a = \gamma_i \frac{\sum \alpha_k}{\sum \gamma_k}, \quad b = \alpha_i - \gamma_i \frac{\sum \alpha_k}{\sum \gamma_k},$$

dividieren die erhaltene Ungleichung durch  $\gamma_i^{p-1}$  und summieren über  $i$ . Es ergibt sich:

$$\sum_1^n \frac{|\alpha_i|^p}{\gamma_i^{p-1}} \geq \frac{\left| \sum_1^n \alpha_i \right|^p}{\left( \sum_1^n \gamma_i \right)^{p-1}} \quad (\gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

Wir setzen hierin:

$$\alpha_i = a_i b_i, \quad \gamma_i = |b_i|^{\frac{p}{p-1}},$$

wo die  $b_i$  zunächst von Null verschieden sein müssen. Dann folgt leicht die Hölder'sche<sup>1</sup> Ungleichung:

$$\sum_1^n |a_i b_i| \leq \left( \sum_1^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_1^n |b_i|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \quad (21)$$

die, wie man sofort sieht, auch gilt, wenn die  $b_i$  teilweise Null sind, also für beliebige Größen  $a_i, b_i$ .

Wir schreiben (20) für  $n = 2$  an:

$$\frac{|\alpha|^p}{\gamma^{p-1}} + \frac{|\beta|^p}{\delta^{p-1}} \geq \frac{|\alpha + \beta|^p}{(\gamma + \delta)^{p-1}} \quad (\gamma > 0, \delta > 0)$$

und setzen hierin:

$$\alpha = a_i, \quad \gamma = \left( \sum_1^n |a_h|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\beta = b_i, \quad \delta = \left( \sum_1^n |b_h|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wobei nicht alle  $a_i$  und nicht alle  $b_i$  Null sein dürfen.

Summation über  $i$  und eine leichte Umformung ergibt:

$$\left( \sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \sum |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (22)$$

Die Einschränkung über die  $a_i$  und  $b_i$  kann man sofort aufheben, so daß (22) für beliebige  $a_i$  und  $b_i$  gilt.

Diese Ungleichung rührt von Minkowski<sup>2</sup> her; da man aus (21) leicht (20) herleiten kann, so läßt sie sich aus der

<sup>1</sup> Göttinger Nachrichten, 1889, p. 38. Obiger Beweisgang stimmt im Prinzip mit dem Hölder's überein.

<sup>2</sup> Diophantische Approximationen; Leipzig 1907, p. 95.

Hölder'schen Ungleichung herleiten, was bisher nur für  $p = 2$  bekannt gewesen sein dürfte.<sup>1</sup>

Es sei jetzt  $p > q > 0$ . Wir schreiben, wenn  $\gamma_1 \dots \gamma_n$  wieder positive Zahlen sind:

$$\sum \frac{|\alpha_i|^p}{\gamma_i^{p-1}} = \sum \frac{\left(\frac{|\alpha_i|^q}{\gamma_i^{q-1}}\right)^{\frac{p}{q}}}{\gamma_i^{\frac{p}{q}-1}}.$$

Da  $\frac{p}{q} > 1$ , ergibt die Anwendung von (20):

$$\frac{\left(\sum \frac{|\alpha_i|^p}{\gamma_i^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}}{(\sum \gamma_i)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\left(\sum \frac{|\alpha_i|^q}{\gamma_i^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}}}{(\sum \gamma_i)^{\frac{1}{q}}} \quad (p > q > 0). \quad (23)$$

2. Es sei nun  $f(E)$  eine absolut additive Mengenfunktion,  $b(E)$  eine Basis von  $f$  (vgl. I., 7.). Eine Menge  $E$  des natürlichen Definitionsbereiches  $T$  von  $b^2$  zerlegen wir durch eine Teilung  $\Pi$  in eine endliche Anzahl disjunkter Teilmengen und bilden die Summe (betreffs der Bezeichnung vgl. I., 2.):

$$\sum_E \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \quad (p > 1). \quad (24)$$

Diese Summenbildung ist so zu verstehen, daß dabei nur jene Teilungsmengen von  $\Pi$  in Betracht kommen, für welche  $\Delta b > 0$ . Ist keine derartige vorhanden, also  $b(E) = 0$ , so ist als Wert der Summe Null zu definieren.

Es existieren nun für eine Basis  $b$  und einen Exponenten  $p > 1$  solche  $f$  (z. B.  $f = b$ ), für welche (24) für alle Mengen  $E$  und alle Teilungen  $\Pi$  unter einer Schranke  $M^p$  bleibt. Ein solches  $f$  heiße zur Klasse  $L_p(b)$  gehörig.

Aus (22) schließt man, daß die Summe zweier  $f$  der Klasse  $L_p(b)$  derselben Klasse angehört, und aus (23), daß  $L_p(b)$  die

<sup>1</sup> Riesz, I., p. 455 (Anmerkung).

<sup>2</sup> Andere Mengen werden von jetzt ab nicht mehr betrachtet.

Klasse  $L_q(b)$  umfaßt, sobald  $p < q$ . Es ergibt sich ferner sofort die Ungleichung:

$$|f(E)| \leq M \cdot b(E)^{\frac{p-1}{p}} \quad (24a)$$

Es wird wegen (20) die Summe (24) nicht verkleinert, wenn man von der Teilung  $\Pi$  zu einer Unterteilung übergeht. Daraus folgt zunächst leicht, daß zur Entscheidung, ob  $f$  zur Klasse  $L_p(b)$  gehört, die Summe (24) nur für  $E = J$  untersucht zu werden braucht; es gehört daher  $f$  zu  $L_p(b)$ , wenn

$$\sum_J \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}}$$

für alle Teilungen  $\Pi$  von  $J$  unter einer endlichen Schranke verbleibt.

Die obere Grenze der Werte von (24) bei festem  $E$  und  $p$  stellt eine Mengenfunktion dar, die wir schreiben wollen:

$$\int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}}$$

Sie ist monoton, d. h. nur positiver Werte fähig, hat denselben Definitionsbereich wie  $b$  und ist, wie wir sofort beweisen werden, absolut additiv. Es seien  $E_1, E_2, \dots$  disjunkte Mengen von  $T$  und  $E_1 + E_2 + \dots = E$ . Es sei  $\varepsilon$  eine beliebige positive Zahl und  $\Pi_k$  eine derartige Teilung von  $E_k$ , daß:

$$\int_{E_k} \frac{|df|^p}{db^{p-1}} - \sum_{\Pi_k} \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Dann folgt:

$$\sum_1^\infty \int_{E_k} \frac{|df|^p}{db^{p-1}} < \sum_1^\infty \sum_{\Pi_k} \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} + \varepsilon$$

und die Reihe rechts ist konvergent, weil alle Teilsummen offenbar:

$$< \int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}}$$

sein müssen.

Aus demselben Grunde folgt:

$$\sum_1^{\infty} \int_{E_n} \frac{|df|^p}{db^{p-1}} < \int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} + \varepsilon. \quad (25)$$

Ist andererseits  $E'_1, E'_2 \dots E'_N$  eine Teilung<sup>1</sup> von  $E$ , für welche:

$$\int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} - \sum_1^N \frac{|f(E'_k)|^p}{b(E'_k)^{p-1}} < \varepsilon,$$

so ergibt (20):

$$\frac{|f(E_k)|^p}{b(E_k)^{p-1}} \leq \sum_1^{\infty} \frac{|f(E_h E'_k)|^p}{b(E_h E'_k)^{p-1}},^2$$

$$\int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} < \sum_1^{\infty} \sum_1^N \frac{|f(E'_k E_h)|^p}{b(E'_k E_h)^{p-1}} + \varepsilon < \sum_1^{\infty} \int_{E_h} \frac{|df|^p}{db^{p-1}} + \varepsilon.$$

Zusammen mit (25) ergibt dies, da  $\varepsilon$  willkürlich ist:

$$\int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} = \sum_1^{\infty} \int_{E_h} \frac{|df|^p}{db^{p-1}},$$

w. z. b. w.

Diese nunmehr als absolut additiv erkannte Mengenfunktion hat natürlich  $b$  als Basis. Man kann daher zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\eta$  so bestimmen, daß für alle Mengen  $E$  von  $T$ , für welche  $b(E) < \eta$ :

$$\int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} < \varepsilon.$$

Es sei nun  $\Pi_0$  eine Teilung von  $E$ , so daß:

$$\sum_E \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \geq \int \frac{|df|^p}{db^{p-1}} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dabei kann man  $\varepsilon > 0$  bei gehöriger Wahl von  $\Pi_0$  beliebig klein annehmen.

<sup>1</sup> Man denke sich unter die  $E'_k$  nur jene Teilungsmengen aufgenommen, für welche  $b > 0$ .

<sup>2</sup> Hier sind Glieder mit dem Nenner Null wegzulassen.

$E_1, E_2 \dots E_N$  seien jene Teilungsmengen von  $E$ , für welche  $b > 0$ . Wir bestimmen in  $E_k$  eine abgeschlossene Menge  $E'_k$ , so daß:

$$\left| \frac{|f(E_k)|^p}{b(E_k)^{p-1}} - \frac{|f(E'_k)|^p}{b(E'_k)^{p-1}} \right| < \frac{\varepsilon}{4N}.$$

Dann ist:

$$\sum_1^N \frac{|f(E'_k)|^p}{b(E'_k)^{p-1}} \geq \int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} - \frac{3\varepsilon}{4}. \quad (26)$$

Die  $E'_k$  haben wechselseitige Minimalabstände, die sämtlich größer als ein geeignet gewähltes  $\delta > 0$  ausfallen. Macht man jetzt eine Teilung  $\Pi$  von  $E$  in Mengen, deren Durchmesser sämtlich  $< d < \frac{\delta}{2}$  sind, so hat keine von ihnen mit zweien der  $E'_k$  Punkte gemein. Läßt man darunter jene weg, die mit keinem  $E'_k$  Punkte gemein haben, und bezeichnet die übrigen mit  $E''_h$ , so gilt:

$$\sum_{\Pi} \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \geq \sum_h \frac{|f(E''_h)|^p}{b(E''_h)^{p-1}}.$$

In der rechten Summe<sup>1</sup> fassen wir die Glieder zu  $N$  Gruppen zusammen, so daß die  $k$ -te Gruppe jene  $E''_h$  umfaßt, welche mit  $E'_k$  Punkte gemein haben. Der Wert der Glieder der  $k$ -ten Gruppe ist nach (20), wenn man die Summe der Mengen der Gruppe  $k$ , die  $E'_k$  einschließt, mit  $\bar{E}_k$  bezeichnet:

$$\geq \frac{|f(\bar{E}_k)|^p}{b(\bar{E}_k)^{p-1}}.$$

Also wird:

$$\sum_{\Pi} \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \geq \sum_1^N \frac{|f(\bar{E}_k)|^p}{b(\bar{E}_k)^{p-1}}. \quad (27)$$

Da die  $E'_k$  abgeschlossen sind, so erkennt man leicht:

$$\lim_{d=0} \bar{E}_k = E_k, \quad \lim_{d=0} \frac{|f(\bar{E}_k)|^p}{b(\bar{E}_k)^{p-1}} = \frac{|f(E'_k)|^p}{b(E'_k)^{p-1}}.$$

<sup>1</sup> Summenglieder mit dem Nenner Null sind wie immer wegzulassen.

Daher können wir  $d$  so klein fixieren, daß:

$$\left| \sum_1^N \frac{f(\bar{E}_k)^p}{b(\bar{E}_k)^{p-1}} - \sum_1^N \frac{|f(E'_k)|^p}{b(E'_k)^{p-1}} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nach (26) und (27) wird daher:

$$\sum_E \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} > \int_E \frac{|df|^p}{d b^{p-1}} - \varepsilon. \quad (28)$$

Damit ist gezeigt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  kann man ein  $d$  so bestimmen, daß für jede Teilung  $\Pi$  mit  $d(\Pi) < d$ , (28) erfüllt ist.<sup>1</sup> Daraus folgt aber, daß in der Bezeichnung von  $\Pi$ , 1:

$$\lim_{\Pi=0} \sum_E \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} = \int_E \frac{|df|^p}{d b^{p-1}}. \quad (29)$$

Nach (22) gilt schließlich noch:

$$\left( \int_E \frac{|df|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E \frac{|dg|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \cong \left( \int_E \frac{|d(f+g)|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (30)$$

woraus man leicht weiter erhält:

$$\left| \left( \int_E \frac{|df|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} - \left( \int_E \frac{|dg|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \right| \cong \left( \int_E \frac{|d(f-g)|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (31)$$

3. Um weiterzugehen, brauchen wir eine Erweiterung der Ungleichung (19), die sich aus einer genaueren Abschätzung von  $|1+x|^p$  ergibt. Es ist nämlich:

<sup>1</sup> Man kann, indem man obige Beweismethode für  $p = 1$  wiederholt, leicht einsehen: Erfüllt der Definitionsbereich einer absolut additiven Mengenfunktion die Forderung  $d$ ) (I, 5), so ist:

$$\int_E |df| = \lim_{\Pi=0} \sum_E |\Delta f|.$$

$$|1+x|^p \geq 1+px + \frac{1}{2^{p-2}} |x|^p \quad \left. \vphantom{|1+x|^p} \right\} p \geq 2 \quad (32 a)$$

$$|1+x|^p \leq 1+px + (2^p-p-1) \begin{cases} |x|^p & (|x| \geq 1) \\ x^2 & (|x| < 1) \end{cases} \quad \left. \vphantom{|1+x|^p} \right\} p \geq 2 \quad (32 b)$$

$$|1+x|^p \geq 1+px + (2^p-p-1) \begin{cases} |x|^p & (|x| \geq 1) \\ x^2 & (|x| < 1) \end{cases} \quad \left. \vphantom{|1+x|^p} \right\} 1 < p \leq 2 \quad (33 a)$$

$$|1+x|^p \leq 1+px + \frac{1}{2^{p-2}} |x|^p \quad \left. \vphantom{|1+x|^p} \right\} 1 < p \leq 2 \quad (33 b)$$

Der Faktor  $2^p-p-1$  ist wesentlich positiv und für  $p < 2$  kleiner als 1.

Man beweist obige Ungleichungen ohne wesentliche Schwierigkeit mit den elementaren Mitteln der Differentialrechnung, der Beweis mag daher, um so mehr als er ziemlich viel Raum erfordern würde, dem Leser überlassen bleiben.

Bei der Anwendung der obigen Ungleichungen werden wir über  $p$  in der Regel jene Voraussetzung machen, welche auf (32 b), beziehungsweise (33 a) führt, da die beiden anderen Ungleichungen wesentlich einfacher zu behandeln sind. Wir nehmen jetzt  $1 < p \leq 2$  an und setzen in (33 a)  $x = \frac{b}{a}$  ( $a \neq 0$ ); so erhalten wir:

$$|a+b|^p \geq |a|^p + p|b||a|^{p-1} \operatorname{sgn} a + (2^p-p-1) \begin{cases} |b|^p, & |b| \geq |a| \\ |b|^2 \cdot |a|^{p-2}, & |b| < |a| \end{cases} \quad (34)$$

Auch für  $a = 0$  bleibt die Ungleichung richtig.

Wir setzen in (27) wie früher in (19):

$$a = \gamma_i \frac{\sum \alpha_k}{\sum \gamma_k}, \quad b = \alpha_i - \gamma_i \frac{\sum \alpha_k}{\sum \gamma_k} \quad (\gamma_i > 0).$$

Verfährt man ebenso wie bei der Ableitung von (20), so erhält man:

$$\sum \frac{|\alpha_i|^p}{\gamma_i^{p-1}} \geq \frac{|\sum \alpha_i|^p}{(\sum \gamma_i)^{p-1}} + (2^p-p-1) \left\{ \sum' \frac{\left| \alpha_i - \gamma_i \frac{\sum \alpha}{\sum \gamma} \right|^p}{\gamma_i^{p-1}} + \sum'' \frac{\left( \alpha_i - \gamma_i \frac{\sum \alpha}{\sum \gamma} \right)^2}{\gamma_i} \left( \frac{|\sum \alpha|}{\sum \gamma} \right)^{p-2} \right\}.$$



Die Summe  $\Sigma'$  faßt dabei jene Glieder zusammen, in welchen:

$$\left| \alpha_i - \gamma_i \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma \gamma} \right| \geq \gamma_i \frac{|\Sigma \alpha|}{\Sigma \gamma}$$

und die Summe  $\Sigma''$  die übrigen, in denen also:

$$\left| \alpha_i - \gamma_i \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma \gamma} \right| < \gamma_i \frac{|\Sigma \alpha|}{\Sigma \gamma}.$$

Wenn also überhaupt  $\Sigma''$  auftritt, so ist  $|\Sigma \alpha| > 0$ , daher macht der Faktor

$$\left( \frac{|\Sigma \alpha|}{\Sigma \gamma} \right)^{p-2}$$

keine Schwierigkeiten. Für die beiden Summen  $\Sigma'$  und  $\Sigma''$  folgen hieraus die Ungleichungen:

$$\sum' \frac{\left| \alpha_i - \gamma_i \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma \gamma} \right|^p}{\gamma_i^{p-1}} \leq \frac{1}{2^p - p - 1} \left( \sum \frac{|\alpha_i|^p}{\gamma_i^{p-1}} - \frac{|\Sigma \alpha|^p}{(\Sigma \gamma)^{p-1}} \right) \quad (35 a)$$

$$\sum'' \frac{\left| \alpha_i - \gamma_i \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma \gamma} \right|^2}{\gamma_i} \leq \frac{1}{2^p - p - 1} \left( \frac{|\Sigma \alpha|}{\Sigma \gamma} \right)^{2-p} \left( \sum \frac{|\alpha_i|^p}{\gamma_i^{p-1}} - \frac{|\Sigma \alpha|^p}{(\Sigma \gamma)^{p-1}} \right)$$

Nach (23) ist, da  $p \leq 2$ , die linke Seite der letzten Beziehung

$$\begin{aligned} &\geq (\Sigma'' \gamma_i)^{\frac{p-2}{p}} \left( \sum'' \frac{\left| \alpha_i - \gamma_i \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma \gamma} \right|^p}{\gamma_i^{p-1}} \right)^{\frac{2}{p}} \geq \\ &\geq (\Sigma \gamma_i)^{\frac{p-2}{p}} \left( \sum'' \frac{\left| \alpha_i - \gamma_i \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma \gamma} \right|^p}{\gamma_i^{p-1}} \right)^{\frac{2}{p}} \end{aligned}$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned} &\sum'' \frac{\left| \alpha_i - \gamma_i \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma \gamma} \right|^p}{\gamma_i^{p-1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{(2^p - p - 1)^{\frac{p}{2}}} \left( \frac{|\Sigma \alpha|^p}{(\Sigma \gamma)^{p-1}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \left( \sum \frac{|\alpha_i|^p}{\gamma_i^{p-1}} - \frac{|\Sigma \alpha|^p}{(\Sigma \gamma)^{p-1}} \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (35 b) \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt wieder die in  $J$  definierten Mengenfunktionen  $f$  und  $b$ , wo  $b$  eine Basis von  $f$  darstellt.  $\Pi$  sei eine Zerlegung von  $J$  in Teilmengen  $\Delta_i J$ ,  $\Pi'$  eine analoge Teilung in  $\Delta'_k J$ ,  $\Pi \Pi'$  die zusammengesetzte Teilung in die Mengen  $\Delta_i J \cdot \Delta'_k J = \Delta_{ik} J$ . Bei den folgenden Summierungen sind von diesen Teilungsmengen nur die zu benutzen, für welche  $b \neq 0$  und man beachte, daß aus  $\Delta_i b = 0$  auch  $\Delta_{ik} b = 0$  folgt, weil  $b$  monoton ist. Man setze dann in (35 a) und (35 b)  $\alpha_i = \Delta_{ik} f$ ,  $\gamma_i = \Delta_{ik} b$ , also  $\Sigma \alpha = \Delta_k f$ ,  $\Sigma \gamma = \Delta_k b$ , und addiere die beiden Ungleichungen. Das Resultat kann man schreiben:

$$\sum_{\Delta_k J} \frac{|\Delta_{ik} f - \Delta_{ik} b \cdot \frac{\Delta_k f}{\Delta_k b}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} \leq A \left( \sum_{\Delta_k J} \frac{|\Delta_{ik} f|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} - \frac{|\Delta_k f|^p}{\Delta_k b^{p-1}} \right) + B \left( \frac{|\Delta_k f|^p}{\Delta_k b^{p-1}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \left( \sum_{\Delta_k J} \frac{|\Delta_{ik} f|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} - \frac{|\Delta_k f|^p}{\Delta_k b^{p-1}} \right)^{\frac{p}{2}}$$

$A$  und  $B$  sind nur von  $p$  abhängige positive Zahlen.

Summiert man dann über  $k$ , so läßt sich auf die Glieder mit dem Faktor  $B$  die Hölder'sche Ungleichung (21) anwenden, da  $\frac{p}{2} \leq 1$  ist. Es folgt daraus:

$$\sum_J \frac{|\Delta_{ik} f - \Delta_{ik} b \cdot \frac{\Delta_k f}{\Delta_k b}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} \leq A \left( \sum_J \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} - \sum_J \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \right) + B \left( \int_J \frac{|df|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \left( \sum_J \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} - \sum_J \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (36)$$

Wir führen nun folgende Schreibweise ein: Ist  $f$  eine absolut additive Mengenfunktion mit der Basis  $b$ ,  $\Pi$  irgendeine Teilung  $\Pi$  von  $J$ , so soll  $f^{(\Pi)}$  die folgendermaßen definierte Mengenfunktion sein:

$$f^{(\Pi)}(E) = \sum_J b(E \Delta J) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta b}. \quad (37)$$

Unter Gliedern, in welchen  $\Delta b = 0$ , ist dabei Null zu verstehen.  $f^{(II)}(E)$  ist auf den Teilmengen eines  $\Delta J$  zu  $b(E)$  proportional und hat die Basis  $b$ . Ferner ist ersichtlich

$$\int_J \frac{|df^{(II)}|^p}{db^{p-1}} = \sum_{II} \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}}. \quad (38)$$

Dann läßt sich die linke Seite von (36) schreiben:

$$\sum_{III'} \frac{|\Delta f - \Delta f^{(III')}|^p}{\Delta b^{p-1}}.$$

Läßt man ferner in (36) die Teilung II gegen Null konvergieren (vgl. II, 1), so folgt:

$$\begin{aligned} \int_J \frac{|d(f - f^{(III)})|^p}{db^{p-1}} &\leq A \left( \int_J \frac{|df|^p}{db^{p-1}} - \sum_{II'} \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \right) \quad (p < 2) \\ &+ B \left( \int_J \frac{|df|^p}{db^{p-1}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \left( \int_J \frac{|df|^p}{db^{p-1}} - \sum_{II'} \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \right)^{\frac{p}{2}} \quad (39) \end{aligned}$$

Daraus folgt aber nach den Resultaten von 2.:

$$\lim_{II=0} \int_J \frac{|d(f - f^{(III)})|^p}{db^{p-1}} = 0. \quad (40)$$

Im Falle  $p \geq 2$  ergibt sich dieselbe Beziehung mit Hilfe von (32 a), an Stelle von (39) erhält man nämlich:

$$\begin{aligned} \int_J \frac{|d(f - f^{(III)})|^p}{db^{p-1}} &\leq 2^{p-2} \left( \int_J \frac{|df|^p}{db^{p-1}} - \sum_{II} \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \right) \quad (39 a) \\ &(p \geq 2) \end{aligned}$$

Wir definieren nun:

Eine Folge von Mengenfunktionen  $f_n$  heißt konvergent gegen die Grenzfunktion  $f$  bezüglich  $L_p(b)$ , wenn:

1. alle  $f_n$  und  $f$  zu  $L_p(b)$  gehören,
2. die Größen:

$$\int_J \frac{|df_n|^p}{db^{p-1}}$$

sämtlich unter einer Schranke  $K$  liegen,

3. für jede Menge  $E$  des Definitionsbereiches von  $b$ :

$$\lim_{n=\infty} f_n(E) = f(E).$$

Eine Folge von Mengenfunktionen  $f_n$  von  $L_p(b)$  heißt bezüglich  $L_p(b)$  stark konvergent gegen die Grenzfunktion  $f$  aus  $L_p(b)$ , wenn:

$$\lim_{n=\infty} \int_J \frac{|d(f-f_n)|^p}{d b^{p-1}} = 0.$$

Die starke Konvergenz zieht die einfache nach sich. Dann kann man (40) aussprechen:

Die Mengenfunktionen  $f(\Pi_n)$  konvergieren stark gegen  $f$ , wenn  $\lim_{n=\infty} \Pi_n = 0$ .

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung einer Behauptung von F. Riesz.<sup>1</sup>

Konvergieren  $f_1, f_2 \dots$  stark gegen  $f$ , so erhält man aus (31):

$$\lim_{n=\infty} \int_J \frac{|df_n|^p}{d b^{p-1}} = \int_J \frac{|df|^p}{d b^{p-1}}.$$

Dagegen ist im Falle einfacher Konvergenz nur auf:

$$\lim_{n=\infty} \int_J \frac{|df_n|^p}{d b^{p-1}} \geq \int_J \frac{|df|^p}{d b^{p-1}} \quad (40')$$

zu schließen; denn aus

$$\int_J \frac{|df_n|^p}{d b^{p-1}} \geq \sum_J \frac{|\Delta f_n|^p}{\Delta b^{p-1}}$$

folgt für  $n = \infty$ :

$$\lim_{n=\infty} \int_J \frac{|df_n|^p}{d b^{p-1}} \geq \sum_J \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}}.$$

<sup>1</sup> A. a. O. (I.), p. 461.

Wir wollen nun beweisen:

Konvergiert die Folge  $f_1, f_2, \dots$  gegen  $f$  und ist außerdem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \frac{|df_n|^p}{db^{p-1}} = \int_J \frac{|df|^p}{db^{p-1}}, \quad (41)$$

so ist die Konvergenz stark. Diese Bedingungen für starke Konvergenz sind nach den letzten Resultaten auch notwendig.

Es sei  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  eine Folge von Teilungen von  $J$ , derart, daß  $\Pi_{n+1}$  eine Unterteilung von  $\Pi_n$  darstellt (für  $n = 1, 2, \dots$ ) und  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Pi_n) = 0$ . Dann ist nach (38):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \frac{|df_\rho^{(\Pi_n)}|^p}{db^{p-1}} &= \int_J \frac{|df_\rho|^p}{db^{p-1}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \frac{|df^{(\Pi_n)}|^p}{db^{p-1}} &= \int_J \frac{|df|^p}{db^{p-1}} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_J \frac{|df_\rho^{(\Pi_n)}|^p}{db^{p-1}} &= \int_J \frac{|df^{(\Pi_n)}|^p}{db^{p-1}} \end{aligned} \quad (42)$$

In den beiden ersten Grenzübergängen geschieht die Konvergenz infolge (20) monoton wachsend. Daher kann man aus (41) nach einem von Dini herrührenden Satze<sup>1</sup> schließen, daß die Konvergenz in der ersten Beziehung von (42) gleichmäßig für alle  $\rho$  stattfindet. Man kann also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  so bestimmen, daß:

$$\int_J \frac{|df_\rho|^p}{db^{p-1}} - \int_J \frac{|df_\rho^{(\Pi_n)}|^p}{db^{p-1}} < \varepsilon$$

und

$$\int_J \frac{|df|^p}{db^{p-1}} - \int_J \frac{|df^{(\Pi_n)}|^p}{db^{p-1}} < \varepsilon$$

für  $n > N$  und alle  $\rho$ . Aus (39) kann man dann, da ja die Bedingung 2 der Konvergenz erfüllt sein muß, sofort entnehmen:

$$\int_J \frac{|d(f_\rho^{(\Pi_n)} - f_\rho)|^p}{db^{p-1}} \quad \text{und} \quad \int_J \frac{|d(f^{(\Pi_n)} - f)|^p}{db^{p-1}}$$

<sup>1</sup> U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe (Leipzig 1892), p. 148 (§ 99). Der Satz ist bei Dini nur für Funktionenfolgen ausgesprochen, gilt aber auch für den hier in Frage kommenden Fall von Zahlendoppelfolgen.

konvergieren für  $n = \infty$  gleichmäßig für alle  $\rho$  gegen Null. Nach (30) folgt weiter:

$$\left[ \int_J \frac{|d(f_\rho - f)|^p}{d b^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \int_J \frac{|d(f - f^{(\Pi_n)})|^p}{d b^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} + \\ + \left[ \int_J \frac{|d(f^{(\Pi_n)} - f_\rho^{(\Pi_n)})|^p}{d b^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \int_J \frac{|d(f_\rho - f_\rho^{(\Pi_n)})|^p}{d b^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

Das zweite Glied reduziert sich nach (38) auf eine Summe mit  $\rho = \infty$  gegen Null konvergenter Größen, das erste und dritte Glied können nach dem letzten Ergebnis durch Wahl von  $\Pi_n$  für alle  $\rho$  unter eine beliebig vorgeschriebene Grenze  $\varepsilon$  herabgedrückt werden. Daher folgt:

$$\overline{\lim}_{\rho = \infty} \int_J \frac{|d(f_\rho - f)|^p}{d b^{p-1}} \leq \varepsilon,$$

was wegen der Willkür von  $\varepsilon$  nach sich zieht:

$$\lim_{\rho = \infty} \int_J \frac{|d(f_\rho - f)|^p}{d b^{p-1}} = 0,$$

d. h. die starke Konvergenz von  $f_\rho$  gegen  $f$ , w. z. b. w.

4. Wir betrachten jetzt zwei Mengenfunktionen  $f$  und  $g$ , so daß  $f$  der Klasse  $L_p(b)$ ,  $g$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$  angehöre. Wir bilden für irgendeine Teilung  $\Pi$  einer Menge  $E$  die Summe:

$$\sum_{\Pi} \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta b},$$

wo wieder Glieder mit dem Nenner Null fortzulassen sind. Ist  $\Pi'$  durch Unterteilung von  $\Pi$  entstanden, so ist offenbar:

$$\sum_{\Pi} \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta b} = \sum_{\Pi'} \frac{\Delta f \Delta g^{(\Pi')}}{\Delta b},$$

$$\sum_{\Pi} \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta b} - \sum_{\Pi'} \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta b} = \sum_{\Pi'} \frac{\Delta f \Delta (g^{(\Pi')} - g)}{\Delta b},$$

woraus nach (21) folgt:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_E \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta b} - \sum_{E'} \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta b} \right| &\leq \\
 &\leq \left( \sum_E \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_E \frac{|\Delta (g - g^{(\Pi)})|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\leq \left( \int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E \frac{|d(g - g^{(\Pi)})|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \quad (43)
 \end{aligned}$$

Für eine Reihe von Teilungen  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ , deren jede eine Unterteilung der vorangehenden ist und für welche  $\lim_{n=\infty} d(\Pi_n) = 0$ , folgt demnach, da ja  $g^{(\Pi)}$  stark bezüglich

$L_{\frac{p}{p-1}}(b)$  gegen  $g$  konvergiert, die Existenz des Grenzwertes:

$$\lim_{n=\infty} \sum_E \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta b} = \int_E \frac{df \cdot dg}{db}.$$

Dieser Grenzwert ist von der Wahl der Folge  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  unabhängig. Ist nämlich  $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots$  eine Teilungsfolge von denselben Eigenschaften, so ist in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\sum_{\Pi_n} - \sum_{\Pi'_n} = \left( \sum_{\Pi_n} - \sum_{\Pi_n \Pi'_n} \right) - \left( \sum_{\Pi'_n} - \sum_{\Pi_n \Pi'_n} \right)$$

und nach (43) konvergieren beide Glieder rechts für  $n = \infty$  gegen Null. Läßt man in (43) die Teilung  $\Pi'$ , eine solche Folge durchlaufend, gegen Null konvergieren, so folgt:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_E \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta b} - \int_E \frac{df \cdot dg}{db} \right| &\leq \\
 &\leq \left( \int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E \frac{|d(g - g^{(\Pi)})|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}
 \end{aligned}$$

Aus (40) folgt daher:

$$\lim_{\Pi=0} \sum_E \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta b} = \int_E \frac{df dg}{db} \quad (44)$$

in dem Sinne von II, 1.

Ferner schließt man aus (21):

$$\left| \int_E \frac{df dg}{db} \right| \leq \left( \int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E \frac{|dg|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (45)$$

Mit Hilfe von (45) kann man leicht einsehen, daß  $\int_E \frac{df \cdot dg}{db}$  eine absolut additive Funktion von  $E$  ist.

5. Wir wollen noch einen wichtigen Konvergenzsatz bezüglich der in 1 eingeführten Integraloperationen ableiten.

Es sei  $f_1, f_2, \dots$  eine Folge von Mengenfunktionen von  $L_p(b)$  und

$$\int_J \frac{|df_n|^p}{db^{p-1}} \leq M^p.$$

Dann läßt sich aus ihrer Gesamtheit eine Teilfolge  $f_1^*, f_2^*, \dots$  derart herausgreifen, daß die  $f_1^*, f_2^*, \dots$  bezüglich  $L_p(b)$  gegen eine Grenze  $f$  konvergieren.<sup>1</sup>

Zum Beweise betrachten wir eine Folge von Teilungen  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ , derart, daß  $\lim_{n=\infty} d(\Pi_n) = 0$ . Man kann dann wegen (24 a) aus den  $f_i$  eine Teilfolge  $f_1^*, f_2^*, \dots$  herausheben, so daß  $\lim_{n=\infty} f_n^* = f$  für jede beliebige Teilungsmenge jeder Teilung  $\Pi_n$  existiert. Es sei jetzt  $E$  eine Menge des Definitionsbereiches von  $b$  und  $\varepsilon$  eine positive Zahl. Dann kann man in  $E$  eine abgeschlossene Menge  $E'$  so bestimmen, daß:

$$b(E) - b(E') = b(E - E') < \varepsilon.$$

Es sei  $E_n^*$  die Summe jener Teilungsmengen von  $\Pi_n$ , welche Punkte von  $E'$  enthalten. Dann ist:

$$\lim_{n=\infty} E_n^* = E', \quad \lim_{n=\infty} b(E_n^*) = b(E').$$

<sup>1</sup> Vgl. Riesz, I, p. 467.



Wählt man also  $N$  genügend groß, so ist:

$$b(E_N^*) - b(E') = b(E_N^* - E') < \varepsilon.$$

Nach (24 a) folgt nun:

$$|f_n^*(E_N^*) - f_n^*(E')| = |f_n^*(E_N^* - E')| \leq M \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}$$

$$|f_n^*(E) - f_n^*(E')| = |f_n^*(E - E')| \leq M \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}$$

also:

$$|f_n^*(E_N^*) - f_n^*(E)| \leq 2 M \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}$$

oder:

$$f_n^*(E_N^*) - 2 M \varepsilon^{\frac{p-1}{p}} \leq f_n^*(E) \leq f_n^*(E_N^*) + 2 M \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}$$

und für  $\lim n = \infty$ :

$$f(E_N^*) - 2 M \varepsilon^{\frac{p-1}{p}} \leq \lim_{n=\infty} f_n^*(E) \leq \overline{\lim}_{n=\infty} f_n^*(E) \leq f(E_N^*) + 2 M \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}$$

Dabei ist unter  $f(E_N^*)$  die Summe der Werte von  $f$  auf den  $E_N$  bildenden Teilungsmengen von  $\Pi_N$  verstanden. Da  $\varepsilon$  beliebig gewählt werden kann, folgt daraus die Existenz von

$$\lim_{n=\infty} f_n^*(E) = f(E).$$

$f$  ist nun für alle Mengen des Definitionsbereiches von  $b$  definiert und es ist für eine endliche Anzahl disjunkter Mengen:

$$f(E_1 + E_2 + \dots + E_n) = f(E_1) + f(E_2) + \dots + f(E_n).$$

Ist ferner  $E_1, E_2, \dots$  eine unendliche Folge disjunkter Mengen, so hat man:

$$f(E_1 + E_2 + \dots) = f(E_1) + f(E_2) + \dots + f(E_n) + \dots + f(E_{n+1} + E_{n+2} + \dots)$$

$$|f(E_1 + E_2 + \dots) - f(E_1) - f(E_2) - \dots - f(E_n)| \leq M b(E_{n+1} + E_{n+2} + \dots)^{\frac{p-1}{p}},$$

da vermöge (24 a) auch

$$f(E) \leq M b(E)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Für  $n = \infty$  hat die rechte Seite den Grenzwert Null, daher ist  $f$  absolut additiv.

Es läßt sich jetzt weiter beweisen:

Nennt man eine Folge von Mengenfunktionen  $f_1, f_2, \dots$  der Klasse  $L_p(b)$  stark konvergent bezüglich  $L_p(b)$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  derart bestimmt werden kann, daß für alle  $n > N, m > N$ :

$$\int_J \frac{|d(f_n - f_m)|^p}{d b^{p-1}} \leq \varepsilon, \quad (46)$$

so konvergiert jede stark konvergente Folge  $f_1, f_2, \dots$  stark gegen eine Grenze  $f$ .

Aus der Möglichkeit, die letzte Ungleichung zu sichern und aus (31) folgt die Existenz einer Zahl  $M$ , so daß:

$$\int_J \frac{|d f_n|^p}{d b^{p-1}} \leq M^p.$$

Daher ergibt der zuletzt bewiesene Satz die Existenz einer konvergenten Teilfolge  $f_1^*, f_2^*, \dots$

$$\lim_{n=\infty} f_n^* = f.$$

Läßt man in (46)  $f_m$  die Reihe der  $f_m^*$  durchlaufen, so folgt:

$$\overline{\lim}_{m=\infty} \int_J \frac{|d(f_n - f_m^*)|^p}{d b^{p-1}} \leq \varepsilon \quad (\text{für } n > N)$$

und nach (40'):

$$\int_J \frac{|d(f_n - f)|^p}{d b^{p-1}} \leq \varepsilon, \quad n > N.$$

Das heißt aber,  $f_n$  konvergiert für  $n = \infty$  stark gegen  $f$ .

**VI. Die beschränkte lineare Funktionaloperation im Gebiete der Klasse  $L_p(b)$ . Weiteres über die im Kapitel V betrachteten Operationen.**

1. Es sei jeder Mengenfunktion der Klasse  $L_p(b)$  eine Zahl  $L(f)$  zugeordnet und es sei:

$$L(f+g) = L(f) + L(g)$$

$$|L(f)| \leq M, \quad \text{sobald} \quad \int_J \frac{|df|^p}{d b^{p-1}} \leq 1. \quad (47)$$

Dann heie  $L(f)$  eine beschränkte lineare Funktionaloperation im Gebiete der Klasse  $L_p(b)$  oder kurz eine Linearoperation vom Typus  $\left\{ \frac{p}{b} \right\}$ ,  $M$  eine Schranke von  $L$ . Die kleinstmögliche Schranke von  $L$  werde als die Maximalzahl von  $L$  bezeichnet.

Man schließt zunächst sofort:

$$|L(f) - L(g)| \leq M \left[ \int_J \frac{|d(f-g)|^p}{d b^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}},$$

woraus die Stetigkeitseigenschaft folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n) = L(f),$$

wenn  $f_n$  stark gegen  $f$  konvergiert.

Ferner muß offenbar:

$$L\left(\frac{m}{n} f\right) = \frac{m}{n} L(f)$$

sein für ganzzahliges  $m$  und  $n$  und wegen der letzten Stetigkeitseigenschaft ist auch für jedes reelle  $c$ :

$$L(cf) = cL(f)$$

und allgemein:

$$L\left(\sum_1^n c_k f_k\right) = \sum_1^n c_k L(f_k). \quad (48)$$

Wir setzen jetzt:

$$u_{\bar{E}}(E) = b(E\bar{E}).$$

In der absolut additiven Mengenfunktion  $u_E$  spielt  $E$  die Rolle eines Parameters und soll natürlich zum Definitionsgebiete  $T$  von  $b$  gehören.

Es ist dann ersichtlich:

$$\int_J \frac{|du_{\bar{E}}(E)|^p}{db^{p-1}} = b(\bar{E}). \quad (49)$$

Wir setzen weiter:

$$L(u_E) = l(E).$$

Sind  $E_1, E_2, \dots$  disjunkte Mengen von  $T$ , so ist:

$$l(E_1 + E_2 + \dots) = L(u_{E_1 + E_2 + \dots}) = L(u_{E_1} + u_{E_2} + \dots).$$

Nun konvergiert  $u_{E_1} + u_{E_2} + \dots + u_{E_n} = v_n$  für  $n = \infty$  stark gegen  $u_{E_1} + u_{E_2} + \dots = v$ ; denn es ist nach (49):

$$\int_J \frac{|d(v_n - v)|^p}{db^{p-1}} = \int_J \frac{|du_{E_{n+1} + E_{n+2} + \dots}|^p}{db^{p-1}} = b(E_{n+1} + E_{n+2} + \dots).$$

Daraus folgt aber:

$$l(E_1 + E_2 + \dots) = \lim_{n=\infty} L(u_{E_1} + \dots + u_{E_n}) = \sum_1^{\infty} l(E_k).$$

$l$  ist daher eine absolut additive Mengenfunktion. Aus  $b(E) = 0$  folgt ferner  $l(E) = 0$ , also ist  $b$  auch Basis von  $l$ .

Es sei nun  $\Pi$  eine beliebige Teilung von  $J$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} L(f^{(M)}) &= L\left(\sum_{\Pi} \frac{b(E\Delta J)}{\Delta b} \Delta f\right) \\ &= \sum_J \frac{\Delta f}{\Delta b} L(b(E\Delta J)) = \sum_J \frac{\Delta f \Delta l}{\Delta b}. \quad (50) \end{aligned}$$

Setzen wir hierin für  $f$ :

$$f = f^{(\text{II})} = \sum_J \frac{b(E \Delta J)}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \frac{|\Delta l|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \Delta l}{\left[ \sum_J \frac{|\Delta l|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{1}{p}}},$$

wo natürlich nur solche Summenglieder zu berücksichtigen sind, für welche  $b \neq 0$ , so folgt:

$$\Delta f = f(\Delta J) = \frac{|\Delta l|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \Delta l}{\left[ \sum_J \frac{|\Delta l|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{\Delta b^{\frac{2-p}{p-1}}}$$

$$\sum_J \frac{|\Delta f|^p}{\Delta b^{\frac{p}{p-1}}} = \int_J \frac{|df|^p}{d b^{\frac{p}{p-1}}} = 1,$$

also:

$$|L(f)| = \left( \sum_J \frac{|\Delta l|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq M.$$

$l(E)$  gehört daher zur Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$ .

Läßt man in (50)  $\Pi$  gegen Null konvergieren, so folgt wegen der starken Konvergenz von  $f^{(\text{II})}$ :

$$L(f) = \lim_{\Pi=0} L(f^{(\text{II})}) = \lim_{\Pi=0} \sum_J \frac{\Delta f \cdot \Delta l}{\Delta b} = \int_J \frac{df \cdot dl}{db}. \quad (51)$$

Jede Linearoperation des Typus  $\left\{ \begin{smallmatrix} p \\ b \end{smallmatrix} \right\}$  läßt sich folglich durch den in V, 4 eingeführten Grenzprozeß darstellen.

$l$  ist durch (51) eindeutig bestimmt, wie man sofort sieht, wenn man rechts  $f = u_{\bar{E}}$  einsetzt.

Ferner ergibt (51) zusammen mit (45), daß die Maximalzahl von  $L$

$$\leq \left[ \int_J \frac{|dl|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

ist.

Es sei nun  $f_1, f_2, \dots$  eine Folge von Mengenfunktionen, die bezüglich  $L_p(b)$  gegen  $f$  konvergiert:

$$\lim_{n=\infty} f_n = f.$$

Darin liegt nach der Definition der Konvergenz (V, 3) die Existenz einer Zahl  $M$ , so daß:

$$\int_J \frac{|df_n|^p}{db^{p-1}} \leq M^p.$$

Bedeutet dann  $\Pi$  eine Teilung von  $J$ , so ist:

$$\begin{aligned} |L(f) - L(f_n)| &= \left| \int_J \frac{dl d(f-f_n)}{db} \right| \\ &\leq \left| \int_J \frac{d(f-f_n) dl^{(\Pi)}}{db} \right| + \left| \int_J \frac{df d(l-l^{(\Pi)})}{db} \right| + \\ &\quad + \left| \int_J \frac{df_n d(l^{(\Pi)} - l)}{db} \right| \\ &\leq \left| \sum_{\Pi} \frac{(\Delta f - \Delta f_n) \cdot \Delta l}{\Delta b} \right| + \\ &\quad + \left[ \int_J \frac{|d(l-l^{(\Pi)})|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \left( \left[ \int_J \frac{|df|^p}{db^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int_J \frac{|df_n|^p}{db^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} \right), \end{aligned}$$

also weiter:

$$\overline{\lim}_{n=\infty} |L(f) - L(f_n)| \leq 2M \left[ \int_J \frac{|d(l-l^{(\Pi)})|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

Da aber für  $\lim \Pi = 0$  die rechte Seite gegen Null konvergiert, so ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n) = L(f).$$

Wenn also  $f_1, f_2, \dots$  bezüglich  $L_p(b)$  gegen  $f$  konvergieren, so konvergiert auch  $L(f_n)$  gegen  $L(f)$ .

Diese Eigenschaft von  $L(f)$  bezeichnen wir als die Vollstetigkeit<sup>1</sup> der beschränkten Linearoperation in  $L_p(b)$ .

2. Neben den in V eingeführten Integraloperationen betrachten wir nun noch einige weitere. Es sei  $f$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$  angehörig und  $1 < p < 2$ , also  $\frac{p}{p-1} > 2$ . Es sei ferner  $\Pi$  eine Teilung von  $J$  in die Mengen  $\Delta_i J$  und  $\Pi'$  eine Unterteilung von  $\Pi$ , bei welcher die Mengen  $\Delta_i J$  in die Mengen  $\Delta_{ik} J$  zerfallen. Wir behalten bei den folgenden Summierungen wieder nur solche  $\Delta_{ik} J$  bei, für welche  $b > 0$  und setzen in der Ungleichung (34):

$$a = B_{ik} = \frac{|\Delta_{ik} f|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \Delta_{ik} f}{(\Delta_{ik} b)^{\frac{2-p}{p-1}}}$$

$$\begin{aligned} b = A_{ik} - B_{ik} &= \\ &= \Delta_{ik} b \cdot \frac{|\Delta_i f|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \Delta_i f}{(\Delta_i b)^{\frac{1}{p-1}}} - \frac{|\Delta_{ik} f|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \Delta_{ik} f}{(\Delta_{ik} b)^{\frac{2-p}{p-1}}}. \end{aligned}$$

Nach Division durch  $(\Delta_{ik} b)^{p-1}$  und Summierung über  $k$  folgt:

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta_i f|^{\frac{p}{p-1}}}{(\Delta_i b)^{\frac{1}{p-1}}} &\geq \sum_k \frac{|\Delta_{ik} f|^{\frac{p}{p-1}}}{(\Delta_{ik} b)^{\frac{1}{p-1}}} + \\ &+ p \left\{ \frac{|\Delta_i f|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \Delta_i f}{(\Delta_i b)^{\frac{1}{p-1}}} \cdot \Delta_i f - \sum_k \frac{|\Delta_{ik} f|^{\frac{p}{p-1}}}{(\Delta_{ik} b)^{\frac{1}{p-1}}} \right\} \\ &+ (2^p - p - 1) \left( \sum_k' \frac{|A_{ik} - B_{ik}|^p}{(\Delta_{ik} b)^{p-1}} + \sum_k'' \frac{(A_{ik} - B_{ik})^2}{(\Delta_{ik} b)^{p-1} \cdot |B_{ik}|^{2-p}} \right). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Vgl. die analoge Definition bei Hilbert, Gött. Nachr., 1906, p. 200.

$\Sigma'$  faßt jene Glieder zusammen, in welchen  $|A_{ik} - B_{ik}| \geq \cong |B_{ik}|$ ,  $\Sigma''$  die übrigen. Nach einfacher Umordnung der Glieder folgt:

$$\sum_k' + \sum_k'' \cong \frac{p-1}{2^p - p - 1} \left\{ \sum_k \frac{|\Delta_{ik} f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta_{ik} b^{\frac{1}{p-1}}} - \frac{|\Delta_i f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta_i b^{\frac{1}{p-1}}} \right\}.$$

Summiert man noch über  $i$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{i,k}' \frac{|A_{ik} - B_{ik}|^p}{(\Delta_{ik} b)^{p-1}} + \sum_{i,k}'' \frac{(A_{ik} - B_{ik})^2}{(\Delta_{ik} b)^{p-1} |B_{ik}|^{2-p}} &\cong \\ &\cong \frac{p-1}{2^p - p - 1} \left\{ \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} - \sum_J \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right\}. \quad (52) \end{aligned}$$

In den Gliedern von  $\Sigma''$  ist  $|B_{ik}| > |A_{ik} - B_{ik}|$ , also  $B_{ik} \neq 0$ , also auch  $\Delta_{ik} f \neq 0$ . Man kann schreiben:

$$\sum_{i,k}'' = \sum_{i,k}'' \frac{\left( \frac{|A_{ik} - B_{ik}|^p}{(\Delta_{ik} b)^{p-1}} \right)^{\frac{2}{p}}}{\left( \frac{|B_{ik}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} \right)^{\frac{2}{p-1}}} = \sum_{i,k}'' \frac{|\alpha_{ik}|^{\frac{2}{p}}}{\gamma_{ik}^{\frac{2}{p-1}}}.$$

Da  $\frac{2}{p} > 1$ , folgt nach (20):

$$\sum_{i,k}'' \cong \frac{|\Sigma'' \alpha_{ik}|^{\frac{2}{p}}}{(\Sigma'' \gamma_{ik})^{\frac{2}{p-1}}} = \frac{\left( \sum'' \frac{|A_{ik} - B_{ik}|^p}{(\Delta_{ik} b)^{p-1}} \right)^{\frac{2}{p}}}{\left( \sum'' \frac{|B_{ik}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} \right)^{\frac{2}{p-1}}}$$

und weiter, da

$$\sum_{i,k}'' \frac{|B_{ik}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} \cong \sum_{i,k} \frac{|B_{ik}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} = \sum_J \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \cong \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}},$$



$$\sum'' \geq \frac{\left( \sum'' \frac{|A_{ik} - B_{ik}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} \right)^{\frac{2}{p}}}{\left( \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{2}{p} - 1}}. \quad (53)$$

Aus (52) und (53) folgt aber:

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} \frac{|A_{ik} - B_{ik}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} &\leq A \cdot \left\{ \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} - \sum_J \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right\} \\ &+ B \left( \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \left\{ \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} - \sum_J \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right\}^{\frac{p}{2}} \\ &(1 < p < 2), \end{aligned} \quad (54 a)$$

wo  $A, B$  nur von  $p$  abhängende positive Konstante sind.

Daraus folgt aber:

$$\lim_{\Pi=0} \sum_{i,k} \frac{|A_{ik} - B_{ik}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} = 0,$$

wenn die Summenbildung mit einer beliebigen Unterteilung  $\Pi'$  von  $\Pi$  geschieht. Im Falle  $p \geq 2$  erhält man dasselbe Resultat mit Hilfe der aus (32 a) analog zu (34) folgenden Ungleichung. An Stelle von (54 a) erhält man dabei:

$$\sum_{i,k} \frac{|A_{ik} - B_{ik}|^p}{\Delta_{ik} b^{p-1}} \leq C \left\{ \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} - \sum_J \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right\} \\ (p \geq 2), \quad (54 b)$$

wo  $C > 0$  wieder nur von  $p$  abhängt.

Wir definieren jetzt für eine jede Teilung  $\Pi$  von  $J$  eine absolut additive Mengenfunktion wie folgt:

$$f_{\Pi}(E) = \sum_J b(E \Delta J) \frac{|\Delta f|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \Delta f}{(\Delta b)^{\frac{1}{p-1}}},$$

wo wieder nur solche Glieder zu berücksichtigen sind, in denen  $b \neq 0$ . Dann wird ersichtlich:

$$\begin{aligned} A_{ik} &= f_{\Pi'}(\Delta_{ik} J) = \Delta_{ik} f_{\Pi'} \\ B_{ik} &= \Delta_{ik} f_{\Pi} \end{aligned}$$

und die letzte Limesgleichung lautet:

$$\lim_{\Pi=0} \sum_{\Pi'} \frac{|\Delta_{ik}(f_{\Pi} - f_{\Pi'})|^p}{(\Delta_{ik} b)^{p-1}} = \lim_{\Pi=0} \int_J \frac{|d(f_{\Pi} - f_{\Pi'})|^p}{d b^{p-1}} = 0.$$

Dabei ist also stets  $\Pi'$  eine Unterteilung von  $\Pi$ .

Ist  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  eine Folge von Teilungen von  $J$ , derart, daß  $\Pi_n$  Unterteilung von  $\Pi_{n-1}$  und  $\lim_{n=\infty} d(\Pi_n) = 0$  ist, so ergibt sich sofort nach V, 5, daß die  $f_{\Pi_n}$  stark bezüglich  $L_p(b)$  gegen eine Grenze  $f^*$  konvergieren und man sieht, daß für eine beliebige, gegen Null konvergente Teilungsfolge  $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots$  dasselbe gelten muß, weil:

$$\begin{aligned} \left( \int_J \frac{|d(f_{\Pi'_n} - f_{\Pi'_m})|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \int_J \frac{|d(f_{\Pi'_n} - f_{\Pi'_n \Pi'_m})|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left( \int_J \frac{|d(f_{\Pi'_m} - f_{\Pi'_n \Pi'_m})|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

und nach den bewiesenen Tatsachen zu jedem  $\varepsilon > 0$   $N$  so bestimmt werden kann, daß jedes Glied rechts  $< \frac{\varepsilon}{2}$  wird, sobald  $n > N$  und  $m > N$ . Es ist also auch  $f^*$  unabhängig von der Wahl der Folge  $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots$ .

Läßt man in (54 a), beziehungsweise (54 b)  $\Pi'$  eine gegen Null konvergente Folge von Teilungen durchlaufen, so ergibt

sich, weil  $f_{\Pi}$  stark gegen  $f^*$  und folglich  $f_{\Pi} - f_{\Pi'}$  stark gegen  $f_{\Pi} - f^*$  konvergiert:

$$\int_J \frac{|d(f_{\Pi} - f^*)|^p}{d b^{p-1}} \leq \mathfrak{A} \left[ \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{d b^{\frac{1}{p-1}}} - \sum_J \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right] \\ + \mathfrak{B} \left( \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{d b^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \left[ \int_J \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{d b^{\frac{1}{p-1}}} - \sum_J \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \quad (55)$$

Jeder Funktion  $f$  von  $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$  ist daher ein  $f^*$  von  $L_p(b)$  zugeordnet und es ist:

$$a) \int_E \frac{|df^*|^p}{d b^{p-1}} = \lim_{\Pi=0} \int_E \frac{|df_{\Pi}|^p}{d b^{p-1}} = \\ = \lim_{\Pi=0} \sum_E \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} = \int_E \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{d b^{\frac{1}{p-1}}}$$

$$b) \int_E \frac{df df^*}{d b} = \lim_{\Pi=0} \int \frac{df df_{\Pi}}{d b} = \\ = \lim_{\Pi=0} \sum_E \frac{|\Delta f|^{\frac{p}{p-1}}}{\Delta b^{\frac{1}{p-1}}} = \int_E \frac{|df|^{\frac{p}{p-1}}}{d b^{\frac{1}{p-1}}}$$

c) Bildet man  $f^{**}$  aus  $f^*$  analog wie  $f^*$  aus  $f$ , wobei natürlich  $p$  und  $\frac{p}{p-1}$  ihre Rolle vertauschen, so gilt:

$$f^{**} = f.$$

Um dies zu beweisen, zeigen wir erst die Richtigkeit von:

d) Konvergiert  $f_1 f_2 \dots$  bezüglich  $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$  stark gegen  $f$ , so konvergiert auch  $f_1^* f_2^* \dots$  bezüglich  $L_p(b)$  stark gegen  $f^*$ .

Es ist nämlich:

$$\left( \int_J \frac{|d(f_n^* - f^*)|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_J \frac{|d(f^* - f_{\Pi})|^p}{d b} \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left( \int_J \frac{|d(f_n^* - (f_n)_{\Pi})|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_J \frac{|d(f_{\Pi} - (f_n)_{\Pi})|^p}{d b^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

und man kann für jedes  $\varepsilon > 0$  infolge (55) eine Teilung  $\Pi$  so bestimmen, daß die Summe der beiden ersten Glieder  $< \varepsilon^{\frac{1}{p}}$  ausfällt. Da das letzte Glied, wie leicht zu sehen, mit  $\frac{1}{n}$  gegen Null konvergiert, so folgt:

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \int_J \frac{|d(f_n^* - f^*)|^p}{d b^{p-1}} \leq \varepsilon,$$

woraus wegen der Willkür von  $\varepsilon$  die Behauptung folgt. Um nun *c)* zu beweisen, bemerken wir: Es folgt aus

$$g(E) = \sum_J c_k \frac{b(E \Delta_k J)}{\Delta_k b}$$

für  $g^*$  der Ausdruck:

$$g^*(E) = \sum_J |c_k|^{p-1} \operatorname{sgn} c_k \frac{b(E \Delta_k J)}{\Delta_k b}.$$

Um das zu erkennen, braucht man bei der Bildung von  $g^*$  nur Unterteilungen von  $\Pi$  zu benutzen.

Daher ist:

$$(f_{\Pi})^* = f^{(\Pi)}$$

und weil die  $f_{\Pi}$  stark gegen  $f^*$  konvergieren, wenn  $\Pi$  eine gegen Null konvergente Folge durchläuft, so konvergieren nach *d)* die  $f^{(\Pi)}$  stark gegen  $f^{**}$ ; da sie aber bekanntlich gegen  $f$  konvergieren, so folgt die Behauptung.

Wegen der starken Konvergenz der  $f_{\Pi}$  gegen  $f^*$  gilt:

$$\int_E \frac{df^* dg}{db} = \lim_{\Pi=0} \int_E \frac{df_{\Pi} dg}{db} = \lim_{\Pi=0} \sum_E \frac{|\Delta f|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta b^{\frac{2-p}{p-1}}}$$

oder, wenn man  $\frac{p}{p-1}$  durch  $p$  ersetzt:

$$\int_E \frac{df^* dg}{db} = \lim_{\Pi=0} \sum_E \frac{|\Delta f|^{p-1} \operatorname{sgn} \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta b^{p-2}}$$

Dabei gehören  $f$  und  $g$  zur Klasse  $L_p(b)$ .

Es empfiehlt sich daher bisweilen die Schreibweise:

$$\int_E \frac{df^* dg}{db} = \int_E \frac{|df|^{p-1} \operatorname{sgn} df \cdot dg}{db^{p-2}}$$

Setzt man in (51) an Stelle von  $f$ :

$$f = \frac{l^*}{\left[ \int_J \frac{|dl|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{1}{p}}},$$

so erhellt mit Rücksicht auf eine auf p. 78 gemachte Bemerkung, daß die Maximalzahl von  $L(f)$  durch

$$\left( \int_J \frac{|dl|^{\frac{p}{p-1}}}{db^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

dargestellt wird.

### 3. Fassen wir die Operation

$$\int_{E_0} \frac{|df|^p}{db^{p-1}}$$

bei festem  $E_0$  als eine Funktionaloperation an  $f$  auf, so hat sie ein erstes Differential:

$$\delta \int_{E_0} \frac{|df|^p}{db^{p-1}} = p \int_{E_0} \frac{|df|^{p-1} \operatorname{sgn} df \cdot d\delta f}{db^{p-2}} = p \int_{E_0} \frac{df^* d\delta f}{db} \quad (56)$$

Darunter versteht man nach Fréchet:<sup>1</sup>

Für jedes  $\delta f$  der Klasse  $L_p(b)$  ist:

$$\int_{E_0} \frac{|d(f+\delta f)|^p}{db^{p-1}} = \int_{E_0} \frac{|df|^p}{db^{p-1}} + p \int_{E_0} \frac{df^* d\delta f}{db^{p-1}} + \left[ \int_{E_0} \frac{|d\delta f|^p}{db^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} \cdot A,$$

wo  $A$  eine mit  $\left[ \int_{E_0} \frac{|d\delta f|^p}{db^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}}$  gleichmäßig gegen Null konvergente Größe bedeutet, d. h. eine Größe, deren Betrag kleiner als eine beliebig vorgeschriebene Größe  $\varepsilon > 0$  bleibt, sobald der letztere Ausdruck eine geeignet bestimmte Schranke  $\delta$  nicht überschreitet.

In unserem Falle ist überdies  $A$  positiv und kann nur für  $\delta f = 0$  verschwinden, so daß man hat:

$$\int_{E_0} \frac{|d(f+\delta f)|^p}{db^{p-1}} > \int_{E_0} \frac{|df|^p}{db} + p \int_{E_0} \frac{df^* d\delta f}{db} \quad (\delta f \neq 0) \quad (57)$$

Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Ungleichung (19) und den aus (32 b), (33 b) analog zu (34) gebildeten Ungleichungen,<sup>2</sup> indem man darin

$$a = \Delta f, \quad b = \Delta \delta f$$

setzt. Die Schlußbemerkung folgt durch analoge Behandlung von (32 a) und (33 a).

<sup>1</sup> Vgl. Comptes Rendues (Paris), Bd. 152 (1911), p. 846.

<sup>2</sup> Die bei (32 b) auftretende Spaltung in verschiedenen gebaute Glieder erledigt sich analog wie früher bei (33 a).

Aus diesen Resultaten folgt insbesondere die Existenz des Differentialquotienten:

$$\left( \frac{d}{d\varepsilon} \int_{E_0} \frac{|d(f+\varepsilon g)|^p}{db^{p-1}} \right)_{\varepsilon=0} = p \int_{E_0} \frac{df^* dg}{db}$$

Ferner erhält man leicht:

Setzt man:

$$\int_{E_0} \frac{|d(f+\varepsilon g)|^p}{db^{p-1}} = F(\varepsilon),$$

wo  $g$  nicht identisch Null ist, so hat  $F$  eine beständig zunehmende Ableitung, also  $F(\varepsilon)$ , das mit  $|\varepsilon|$  über jede Grenze wächst, ein und nur ein Minimum, aber kein Maximum.

## VII. Die beschränkte Bilinearoperation.

1. Es seien  $a, b$  zwei monotone, absolut additive Mengenfunktionen. Wir betrachten die beiden Klassen  $L_p(a)$  und  $L_q(b)$ , wo  $p > 1, q > 1$ , nebeneinander. Jedem Funktionenpaare  $\varphi, \psi$ , wo  $\varphi$  zu  $L_p(a)$ ,  $\psi$  zu  $L_q(a)$  gehört, sei eine Zahl:

$$B(\varphi, \psi)$$

zugeordnet und diese Zuordnung erfülle die Bedingungen:

$$\begin{aligned} 1. \quad B(\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2) &= \\ &= B(\varphi_1 \psi_1) + B(\varphi_2 \psi_1) + B(\varphi_1 \psi_2) + B(\varphi_2, \psi_2). \end{aligned}$$

2.  $|B(\varphi, \psi)| \leq M$ , sobald:

$$\int_J \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \leq 1, \quad \int_J \frac{|d\psi|^q}{db^{q-1}} \leq 1.$$

Dann heiÙe  $B$  eine beschränkte bilineare Funktionaloperation im Bereiche der Klassen  $L_p(a)$  und  $L_q(b)$  oder kurz eine Bilinearoperation vom Typus  $\left\{ \begin{matrix} p, q \\ a, b \end{matrix} \right\}$ . Jede Zahl  $M$ ,

für welche 2. gilt, heiÙe eine Schranke von  $B$ , die kleinstmögliche Schranke werde als Maximalzahl von  $B$  bezeichnet.

Es seien  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  und  $\psi_1, \psi_2, \dots$  zwei Folgen von Mengenfunktionen der Klasse  $L_p(a)$ , beziehungsweise  $L_q(b)$ , welche

stark bezüglich der betreffenden Klasse gegen Grenzfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$  konvergieren. Dann folgt aus 1. und 2.:

$$\begin{aligned} |B(\varphi_m \psi_m) - B(\varphi, \psi)| &= |B(\varphi_m - \varphi, \psi_m) + B(\varphi, \psi_m - \psi)| \\ &\leq M \left\{ \left( \int_J \frac{|d(\varphi_m - \varphi)|^p}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_J \frac{|d\psi_m|^q}{d b^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_J \frac{|d\varphi|^p}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_J \frac{|d(\psi_m - \psi)|^q}{d b^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

und wegen der vorausgesetzten starken Konvergenz folgt:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} B(\varphi_n, \psi_m) = B(\varphi, \psi),$$

wobei der doppelte Grenzübergang ganz beliebig vollzogen werden kann.

Bei festgehaltenem  $\psi$  ist  $B$  offenbar eine Linearoperation im Sinne von VI an  $\varphi$  mit der Schranke:

$$M \left( \int_J \frac{|d\psi|^q}{d b^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Daher gestattet es die Darstellung:

$$B(\varphi, \psi) = \int_J \frac{d\varphi d l_\psi}{d a}.$$

$l_\psi$  ist für jedes  $\psi$  von  $L_q(b)$  eine absolut additive Mengenfunktion der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  und es gilt:

$$\int_J \frac{|d l_\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \leq M^{\frac{p}{p-1}} \left( \int_J \frac{|d\psi|^q}{d b^{q-1}} \right)^{\frac{p}{(p-1)q}}, \quad (58)$$

da die  $\frac{p-1}{p}$ -te Potenz der linken Seite die Maximalzahl der Linearoperation darstellt.  $l_\psi$  hat die Bedeutung:

$$l_\psi(E) = B(u_E, \psi), \quad (59)$$



wenn wir analog zu VI, 1

$$u_E(\bar{E}) = a(E\bar{E})$$

setzen. Ebenso ist aber  $B$  auch bei festgehaltenem  $\varphi$  eine Linearoperation vom Typus  $\left\{ \begin{smallmatrix} q \\ b \end{smallmatrix} \right\}$  an  $\psi$  und gestattet folglich die Darstellung:

$$B(\varphi, \psi) = \int_J \frac{d\psi d l'_\varphi}{d b},$$

wo  $l'_\varphi$  der Klasse  $L_{\frac{q}{q-1}}(b)$  angehört, die Ungleichung

$$\int_J \frac{|d l'_\varphi|^{\frac{q}{q-1}}}{d b^{\frac{1}{q-1}}} \leq M^{\frac{q}{q-1}} \left( \int_J \frac{|d\varphi|^p}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{q}{(q-1)p}} \quad (58 a)$$

erfüllt und durch

$$l'_\varphi(E) = B(\varphi, v_E) \quad (59 a)$$

erklärt ist, wenn man

$$v_E(\bar{E}) = b(E\bar{E})$$

setzt. Die zweite Darstellung von  $B$ , auf (59) angewendet, ergibt:

$$l_\psi(E) = \int_J \frac{d\psi d l'_{u_E}}{d b}$$

und  $l'_{u_E}(E')$  hat den Wert:

$$l'_{u_E}(E') = B(u_E, v_{E'}) = \mathfrak{B}(E, E').$$

Ähnlich ergibt sich:

$$l'_\varphi(E) = \int_J \frac{d\varphi d l_{v_E}}{d a}, \quad l_{v_E}(E') = \mathfrak{B}(E', E).$$

$\mathfrak{B}(E, E')$  ist infolgedessen bezüglich  $E$  zur Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ , bezüglich  $E'$  zur Klasse  $L_{\frac{q}{q-1}}(b)$  gehörig mit:

$$\left( \int_J \frac{|d \mathfrak{B}|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq b(E')^{\frac{1}{q}} \cdot M,$$

$$\left( \int_J \frac{|d' \mathfrak{B}|^{\frac{q}{q-1}}}{d b^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq a(E)^{\frac{1}{p}} \cdot M,$$

wie aus (24 a) hervorgeht.

Durch (59) ist jeder Mengenfunktion der Klasse  $L_q(b)$  eine solche der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  zugeordnet. Den Übergang von  $\phi$  zu  $l_\phi$  bezeichnen wir als die zu  $B(\varphi, \phi)$  gehörige beschränkte lineare Funktionaltransformation  $l_\phi = B[\phi]$ . Es ist also:

$$B[\phi] = \int_J \frac{d\phi d' \mathfrak{B}(E, E')}{d b},$$

$$\int_J \frac{|d B[\phi]|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \leq M^{\frac{p}{p-1}} \left( \int_J \frac{|d\phi|^q}{d b^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{p-1}}, \quad (60)$$

$$B[\phi_1 + \phi_2] = B[\phi_1] + B[\phi_2],$$

$$B(\varphi, \phi) = \int_J \frac{d\varphi d B[\phi]}{d a}.$$

Ist umgekehrt eine Zuordnung derart festgelegt, daß jedem  $\phi$  aus  $L_q(b)$  ein  $B[\phi]$  aus  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  derart entspricht, daß bei geeigneter Wahl von  $M$  die zweite und dritte der obenstehenden Relationen erfüllt sind, so sieht man leicht ein, daß

$$\int_J \frac{d\varphi d B[\phi]}{d a}$$

eine beschränkte Bilinearoperation vom Typus  $\left\{ \begin{matrix} p, q \\ a, b \end{matrix} \right\}$  darstellt.

Die Zuordnung von  $l'_\varphi$  zu  $\varphi$  bezeichnen wir als die zu  $B(\varphi, \phi)$  gehörige transponierte lineare beschränkte Funktionaltransformation  $\bar{B}[\varphi]$  und es ist entsprechend:

$$\bar{B}[\varphi] = \int_J \frac{d\varphi d' \mathfrak{B}(E', E)}{da},$$

$$\int_J \frac{|d\bar{B}[\varphi]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \leq M^{\frac{q}{q-1}} \left( \int_J \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{q}{q-1}} \quad (60 a)$$

$$\bar{B}[\varphi_1 + \varphi_2] = \bar{B}[\varphi_1] + \bar{B}[\varphi_2], \quad B(\varphi, \psi) = \int_J \frac{d\psi d\bar{B}[\varphi]}{db}.$$

Es sei jetzt  $C$  eine Bilinearoperation vom Typus:  $\left\{ \begin{array}{cc} \frac{q}{q-1} & r \\ b & c \end{array} \right\}$

mit der Schranke  $N$ . Die Mengenfunktionen der Klasse  $L_r(c)$  sollen mit  $\chi$  bezeichnet werden. Dann ist  $C[\chi]$  eine Mengenfunktion der Klasse  $L_q(b)$  und demnach die Bildung gestattet:

$$B(\varphi, C[\chi]).$$

Es erhellt, daß dies eine Bilinearoperation  $BC$  vom Typus  $\left\{ \begin{array}{cc} p & r \\ a & c \end{array} \right\}$  ist mit der Schranke  $MN$ . Es läßt sich daher schreiben:

$$\begin{aligned} B(\varphi, C[\chi]) &= BC(\varphi, \chi) = \int_J \frac{d\varphi dBC[\chi]}{da} = \\ &= \int_J \frac{d\chi d\bar{BC}[\varphi]}{dc} \quad (61) \end{aligned}$$

und man erhält für die zugehörigen Funktionaltransformationen aus der Definition von  $BC$  die Ausdrücke:

$$BC[\chi] = B[C[\chi]], \quad \bar{BC}[\varphi] = \bar{C}[\bar{B}[\varphi]] = \bar{C}\bar{B}[\varphi]. \quad (62)$$

Daraus folgt weiter, daß  $BC$  die zweite Darstellung gestattet:

$$BC(\varphi, \chi) = C(\bar{B}[\varphi], \chi), \quad (61 a)$$

denn es läßt sich in die Form bringen:

$$BC(\varphi, \chi) = \int_J \frac{d\bar{B}[\varphi] \cdot dC[\chi]}{db}.$$

$BC$  heie die Faltung<sup>1</sup> der Bilinearoperationen  $B$  und  $C$ . Der Faltungsprozeß ist assoziativ; ist nämlich  $A$  eine dritte

Bilinearoperation vom Typus  $\left\{ \begin{matrix} s & p \\ d & a \end{matrix} \right\}$ , so wird:

$$\begin{aligned} A(BC) \cdot (\omega, \phi) &= BC(\bar{A}[\omega], \phi) = B(\bar{A}[\omega], C[\phi]) \\ &= AB(\omega, C[\phi]) = (AB) \cdot C(\omega, \phi). \end{aligned}$$

2. Die Hauptfragestellung dieser Theorie ist die nach der Lösung der Funktionalgleichung:

$$B[\phi] = \Psi, \quad (63)$$

wo  $B[\phi]$  die zu einer Bilinearoperation vom Typus  $\left\{ \begin{matrix} p & q \\ a & b \end{matrix} \right\}$  gehörige Funktionaltransformation und  $\Psi$  eine gegebene Mengenfunktion der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  bedeutet,  $\phi$  aber eine zu bestimmende Mengenfunktion der Klasse  $L_q(b)$  darstellt.

Ist  $\varphi$  eine beliebige Mengenfunktion der Klasse  $L_p(a)$ , so folgt aus (63):

$$\begin{aligned} \int_J \frac{d\varphi d\Psi}{da} &= \int_J \frac{d\varphi dB[\phi]}{da} = \int_J \frac{d\phi d\bar{B}[\varphi]}{db}, \\ \left| \int_J \frac{d\varphi d\Psi}{da} \right| &\leq \left( \int_J \frac{|d\phi|^q}{db^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_J \frac{|\bar{B}[\varphi]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned}$$

Hat also (63) eine Lösung  $\phi$ , so existiert eine Zahl  $M$  von der Beschaffenheit, daß für jedes  $\varphi$  der Klasse  $L_p(a)$ :

$$\left| \int_J \frac{d\varphi d\Psi}{da} \right| \leq M \left( \int_J \frac{|\bar{B}[\varphi]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \quad (64)$$

<sup>1</sup> Vgl. Hilbert, Göttinger Nachr., 1906, p. 179.

Diese für die Lösbarkeit notwendige Bedingung ist aber, wie sich zeigen wird, auch hinreichend.

Wir denken uns vorher in (64) die kleinstmögliche Zahl für  $M$  gewählt. Aus der vorangehenden Ungleichung folgert man dann leicht, daß für jede Lösung  $\phi$  von (63):

$$\int \frac{|d\phi|^q}{db^{q-1}} \geq M^q \quad (65)$$

sein muß. Es sei nun  $h$  eine positive Zahl. Wir bilden den Ausdruck:<sup>1</sup>

$$\int_J \frac{|d\bar{B}[\varphi]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} + h \int_J \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \quad (66)$$

und bezeichnen die untere Grenze der Werte, die dieser Ausdruck annehmen kann, wenn  $\varphi$  eine der Bedingung

$$\int_J \frac{d\varphi d\Psi}{da} = 1 \quad (67)$$

genügende, sonst willkürliche Mengenfunktion der Klasse  $L_p(a)$  ist, mit  $V_h$ . Dann ist:

$$V_h \geq M^{-1} + \frac{h}{\left( \int_J \frac{|d\Psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-1}}$$

wegen (64) und weil:

$$\int_J \frac{d\varphi d\Psi}{da} = 1 \leq \left( \int_J \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_J \frac{|d\Psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

und ferner:

$$V_h > V_k, \text{ wenn } h > k.$$

<sup>1</sup> Das Folgende ist eine Modifikation einer Beweismethode von F. Riesz a. a. O. [II], p. 471 ff.), die den Vorteil hat, mit einem Schlage den Beweis vollständig zu erledigen.

Es sei nun  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  eine Folge von der Art, daß (67) für alle  $n$  erfüllt ist und daß (66) für  $n = \infty$  den Grenzwert  $V_h$  erhält. Dann müssen die Größen

$$\int_J \frac{|d\varphi_n|^p}{da^{p-1}}$$

offenbar beschränkt sein und man kann nach V, 5 eine Teilfolge  $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots$  bestimmen, welche bezüglich  $L_p(a)$  gegen eine Grenze  $\bar{\varphi}_h$  konvergiert. Da ferner

$$\bar{B}[\varphi] = B(\varphi, v_E)$$

bei festem  $E$  eine Linearoperation an  $\varphi$  vorstellt, so ist (nach VI, 1) wegen der Vollstetigkeitseigenschaft:

$$\lim \bar{B}[\varphi'_n] = \bar{B}[\bar{\varphi}_h]$$

und, da wegen der Bedeutung von  $V_h$  die Zahlen:

$$\int_J \frac{|d\bar{B}[\varphi'_n]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}}$$

auch beschränkt sind, so konvergieren die  $\bar{B}[\varphi'_n]$  bezüglich  $L_{\frac{q}{q-1}}(b)$  gegen  $\bar{B}[\bar{\varphi}_h]$  und (40') ergibt:

$$\begin{aligned} & h \int_J \frac{|d\bar{\varphi}_h|^p}{da^{p-1}} + \int_J \frac{|d\bar{B}[\bar{\varphi}_h]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \\ & \leq \lim_{n=\infty} \left\{ h \int_J \frac{|d\varphi'_n|^p}{da^{p-1}} + \int_J \frac{|d\bar{B}[\varphi'_n]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke ist aber nur das Gleichheitszeichen gestattet, weil sonst (66) für  $\varphi = \bar{\varphi}_h$  einen Wert  $< V_h$  erhalten würde, denn wegen der Vollstetigkeit der Linearoperation ist auch:

$$\int_J \frac{d\bar{\varphi}_h d\Psi}{da} = \lim_{n=\infty} \int_J \frac{d\varphi'_n d\Psi}{da} = 1.$$

Der Ausdruck (66) erreicht daher für  $\varphi = \bar{\varphi}_h$  sein Minimum  $V_h$ .

Es seien jetzt  $\chi$  und  $\chi'$  zwei Funktionen der Klasse  $L_p(a)$ , derart, daß

$$\int_J \frac{d\Psi}{da} d\chi' \neq 0.$$

Die Funktion

$$V(\varepsilon, \varepsilon') = \int_J \frac{|d\bar{B}[\bar{\varphi}_h + \varepsilon\chi + \varepsilon'\chi']|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} + h \int_J \frac{|d(\bar{\varphi}_h + \varepsilon\chi + \varepsilon'\chi')|^p}{da^{p-1}}$$

muß dann unter allen der Bedingung:

$$\varepsilon \int \frac{d\Psi}{da} d\chi + \varepsilon' \int \frac{d\Psi}{da} d\chi' = 0$$

genügenden Zahlwerten  $\varepsilon, \varepsilon'$  für  $\varepsilon = \varepsilon' = 0$  ihr Minimum ( $V_h$ ) erreichen. Da nach VI, 3 die Differentialquotienten nach  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  sich bilden lassen, so folgt die Existenz einer Zahl  $\lambda$ , für welche, bei völlig willkürlichem  $\chi$  aus  $L_p(a)$ :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon'=0} = \lambda \int_J \frac{d\Psi}{da} d\chi$$

oder ausgeführt:

$$\begin{aligned} \frac{q}{q-1} \int_J \frac{d\bar{B}[\bar{\varphi}_h]^* \cdot d\bar{B}[\chi]}{db} + hp \int_J \frac{d\bar{\varphi}_h^* d\chi}{da} &= \\ &= \lambda \int_J \frac{d\Psi}{da^{p-1}} d\chi. \end{aligned} \quad (68)$$

Setzt man hierin  $\chi = \bar{\varphi}_h$ , so ergibt sich:

$$\frac{q}{q-1} \int_J \frac{|d\bar{B}[\bar{\varphi}_h]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} + hp \int_J \frac{|d\bar{\varphi}_h|^p}{da^{p-1}} = \lambda. \quad (69)$$

Da  $\bar{\varphi}_h$  nicht beständig Null sein kann, ist  $\lambda > 0$ .

Schreibt man das erste Glied von (68) in der Form:

$$\frac{q}{q-1} \int_J \frac{d\chi dB[\bar{B}[\bar{\varphi}_h]^*]}{da}$$

und setzt hierauf in (58)  $\chi(E') = u_E(E') = a(E'E')$ , so folgt:

$$\frac{q}{q-1} B[\bar{B}[\bar{\varphi}_h]^*] + hp \bar{\varphi}_h^* = \lambda \Psi.$$

Setzen wir jetzt:

$$\psi_h = \bar{B}[\bar{\varphi}_h]^* \cdot \frac{q}{(q-1)\lambda},$$

so geht die letzte Gleichung über in:

$$B[\psi_h] + \frac{hp}{\lambda} \bar{\varphi}_h^* = \Psi. \quad (70)$$

Für  $\psi_h$  gilt:

$$\int_J \frac{|d\psi_h|^q}{db^{q-1}} = \frac{1}{\lambda^q} \left( \frac{q}{q-1} \right)^q \int_J \frac{|d\bar{B}[\bar{\varphi}_h]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}}.$$

Ersetzt man hierin  $\lambda$  durch den aus (69) folgenden Wert, so wird erhalten:

$$\begin{aligned} \int_J \frac{|d\psi_h|^q}{db^{q-1}} &= \\ &= \frac{\int_J \frac{|d\bar{B}_h|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}}}{\left[ \int_J \frac{|d\bar{B}_h|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} + hp \frac{q-1}{q} \int \frac{|d\bar{\varphi}_h|^p}{da^{p-1}} \right]^q} \leq \frac{1}{\left[ \int_J \frac{|d\bar{B}_h|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right]^{q-1}}. \end{aligned}$$

Dabei ist statt  $\bar{B}[\bar{\varphi}_h]$  zur Abkürzung  $\bar{B}_h$  gesetzt.

Da aber die  $\bar{\varphi}_h$  der Bedingung (67) unterliegen, so ist wegen der Bedeutung von  $M$ :

$$\int_J \frac{|d\bar{B}_h|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \geq \frac{1}{M^{\frac{q}{q-1}}},$$



so daß wir erhalten:

$$\int_J \frac{|d\psi_n|^q}{d b^{q-1}} \leq M^q. \quad (71)$$

Es können nun zwei Fälle eintreten:

a)  $\lim_{h=0} \int_J \frac{|d\bar{\varphi}_h|^p}{d a^{p-1}}$  hat einen endlichen Wert. Dann kann

man  $h_1 > h_2 > \dots \lim_{n=\infty} h_n = 0$  und  $K > 0$  so wählen, daß:

$$\int_J \frac{|d\bar{\varphi}_{h_n}|^p}{d a^{p-1}} < K \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Daher bleiben (nach 24 a) auch die  $\bar{\varphi}_h^*$  beschränkt.

Da ferner die Ungleichung (71) besteht, kann man aus den  $\psi_{h_k}$  eine bezüglich  $L_q(b)$  konvergente Teilfolge  $\psi'_k$  herausgreifen, deren Grenze  $\psi$  sei. Nach (70) ist für  $\psi$ :

$$B[\psi] = \Psi,$$

da die  $\lambda$  wegen (69) und der letzten Ungleichung vor (71) oberhalb einer positiven Schranke bleiben. Es ist also in diesem Falle eine Lösung von (63) gefunden.

b) Es sei nun:

$$\lim_{h=0} \int_J \frac{|d\bar{\varphi}_h|^p}{d a^{p-1}} = \infty.$$

Dann kann man wegen (71)  $h_1 > h_2 > \dots \lim_{n=\infty} h_n = 0$ , so bestimmen, daß die  $\psi_{h_n}$  für  $n = \infty$  gegen eine Grenze  $\psi$  konvergieren. Setzen wir:

$$\chi_h = \frac{h p}{\lambda} \bar{\varphi}_h^*,$$

so wird, wie aus (69) erhellt:

$$|\chi_{h_n}| < \frac{|\bar{\varphi}_{h_n}^*|}{\int_J \frac{|d\bar{\varphi}_{h_n}|^p}{d a^{p-1}}}$$

und folglich:

$$\int_J \frac{|d\chi_{h_n}|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} < \left( \int_J \frac{|d\bar{\varphi}_{h_n}|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Die  $\chi_{h_n}$  konvergieren also stark gegen Null und es ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n p}{\lambda_{h_n}} \varphi_{h_n} = 0,$$

so daß auch in diesem Falle aus (70):

$$B[\phi] = \Psi,$$

also eine Lösung von (63) folgt.

In beiden Fällen folgt aus (24 a) und (71):

$$\int_J \frac{|d\phi|^q}{db^{q-1}} \leq M^q.$$

Nach (65) kann hier nur das Gleichheitszeichen gelten und es ist daher die gefundene Lösung diejenige, für welche

$$\int_J \frac{|d\phi|^q}{db^{q-1}}$$

den kleinsten Wert hat.

Aus den Endbemerkungen von VI kann man leicht erkennen, daß  $\phi$  durch diese Minimalforderung eindeutig bestimmt ist.

Es ist also  $B[\phi] = \Psi$  dann und nur dann durch ein  $\phi$  der Klasse  $L_q(b)$ , für welches:

$$\int_J \frac{|d\phi|^q}{db^{q-1}} \leq M^q$$

lösbar, wenn für diesen Wert von  $M$  und alle  $\varphi$  der Klasse  $L_p(a)$  die Ungleichung (64) erfüllt ist.

3. Wir fragen jetzt:

Wann ist (63) für alle  $\Psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  lösbar? Um auf diese Frage eine präzise Antwort zu erhalten, stellen wir

noch die weitere Forderung, daß für alle  $\Psi$  die Lösung  $\phi$  der Forderung genügen soll:

$$\int_J \frac{|d\phi|^q}{db^{q-1}} \leq M^q \left( \int_J \frac{|d\Psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p} \cdot q}, \quad (72)$$

worin  $M$  eine geeignet, aber unabhängig von  $\Psi$  gewählte Zahl bezeichnet. Wir bringen dies dadurch zum Ausdruck, daß wir sagen, die Lösung von (63) solle gleichmäßig beschränkt sein.

Denken wir uns  $\Psi$  fest gewählt, so muß nach dem letzten Resultat für alle  $\phi$  der Klasse  $L_p(a)$  gelten:

$$\left| \int_J \frac{d\phi d\Psi}{da} \right| \leq M \left( \int_J \frac{|d\Psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left( \int_J \frac{|d\bar{B}[\phi]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \quad (73)$$

und das Erfülltsein dieser Bedingung sichert die gewünschte Lösung.

Setzen wir hierin für  $\phi$  die spezielle Funktion  $\Psi^*$  der Klasse  $L_p(a)$ , so geht sie über in:

$$\left( \int_J \frac{|d\Psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left( \int_J \frac{|d\bar{B}[\Psi^*]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Diese Ungleichung muß also für jedes  $\Psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  bestehen. Da aber durch den Übergang von  $\Psi$  zu  $\Psi^*$  die Klassen  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  und  $L_p(a)$  in ein-eindeutiger Beziehung stehen, weil aus  $\Psi^* = \phi$  wieder  $\Psi = \phi^*$  folgt (vgl. VI, 2), so kann man die Forderung der letzten Ungleichung durch folgende ersetzen:

Es muß für alle  $\phi$  der Klasse  $L_p(a)$  gelten:

$$\left( \int_J \frac{|d\phi|^p}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left( \int_J \frac{|d\bar{B}[\phi]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q}}. \quad (74)$$

Wenn aber (74) erfüllt ist, so folgt sofort, wenn  $\Psi$  wieder irgendeine Funktion aus  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  bezeichnet:

$$\left| \int_J \frac{d\varphi d\Psi}{da} \right| \leq \left( \int_J \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_J \frac{|d\Psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \\ \leq M \left( \int_J \frac{|d\Psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left( \int_J \frac{|dB[\varphi]|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q}},$$

d. h. es ist (73) für alle  $\varphi$  und  $\Psi$  erfüllt.

Soll also (63) für alle  $\Psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  eine im Sinne von (72) gleichmäßig beschränkte Lösung haben, so ist dafür das Erfülltsein von (74) für alle  $\varphi$  der Klasse  $L_p(a)$  notwendig und hinreichend.

Für die zu (63) »transponierte« Funktionalgleichung

$$\bar{B}(\varphi) = \Phi \quad (63a)$$

gelten natürlich die entsprechenden Resultate:

Soll (63a) für ein bestimmtes  $\Phi$  der Klasse  $L_{\frac{q}{q-1}}(b)$  eine Lösung  $\varphi$  der Klasse  $L_p(a)$  haben, für welche:

$$\int_J \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \leq M^p,$$

so ist dazu notwendig und hinreichend, daß für alle  $\phi$  der Klasse  $L_q(b)$  die Ungleichung gilt:

$$\left| \int_J \frac{d\phi d\Phi}{db} \right| \leq M \left( \int_J \frac{|dB[\phi]|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Soll ferner (63 a) für alle  $\Phi$  von  $L_{\frac{q}{q-1}}(b)$  eine gleichmäßig beschränkte Lösung haben, d. h. soll die Lösung für ein gewisses  $M$  der Bedingung genügen:

$$\int_J \frac{|d\phi|^p}{d a^{p-1}} \leq M^p \left( \int_J \frac{|d\Phi|^{\frac{q}{q-1}}}{d b^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q}},$$

so ist hierfür notwendig und hinreichend das Bestehen der Ungleichung:

$$\left( \int_J \frac{|d\phi|^q}{d b^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M \left( \int_J \frac{|dB[\phi]|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (75)$$

für alle  $\phi$  aus  $L_q(b)$ .

Es liege nun der erste Fall dieser Nummer vor, so daß also  $B[\phi] = \Psi$  für alle  $\Psi$  aus  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  eine gleichmäßig beschränkte Lösung hat. Es sei ferner irgendwie nachgewiesen, daß die spezielle Gleichung:

$$B[\phi] = 0$$

nur die Lösung  $\phi = 0$  aus  $L_q(b)$  zuläßt. Dann hat (63) für jedes  $\Psi$  offenbar eine einzige Lösung und diese erfüllt (72). Wir können dann den Übergang von  $\Psi$  zu  $\phi$  als eine lineare Funktionaltransformation<sup>1</sup>  $\phi = B^{-1}[\Psi]$  ansehen, welche zu der Bilinearoperation gehört:

$$B^{-1}(\Phi, \Psi) = \int \frac{d\Phi dB^{-1}[\Psi]}{d b}$$

Der Typus dieser Bilinearoperation ist  $\left\{ \begin{array}{cc} \frac{q}{q-1} & \frac{p}{p-1} \\ b & a \end{array} \right\}$

und  $M$  stellt wegen (72) eine Schranke derselben vor.

<sup>1</sup> Im Falle  $p = 2$  kann man diesen Schluß auch machen, ohne die Eindeutigkeit der Lösung zu fordern, wenn man eben jene Lösung nimmt, die der Minimalforderung von p. 98 genügt. Man kommt dann zum Analogon der Toeplitz'schen »hinteren Reziproken« (vgl. etwa Math. Ann., Bd. 69, p. 311 f.).

Da wegen der Definition von  $B^{-1}$  die Identität besteht:

$$B[B^{-1}[\Psi]] = B \cdot B^{-1}[\Psi] = \Psi,$$

so ergibt Faltung von  $B$  mit  $B^{-1}$ :

$$B B^{-1}(\varphi, \Psi) = \int_J \frac{d\varphi d\Psi}{da} = U(\varphi, \Psi)$$

und die zu  $U$  (das den Typus  $\begin{Bmatrix} p & p \\ a & a \end{Bmatrix}$  hat) gehörige Funktionaltransformation ist die Identität  $U[\Psi] = \Psi$ . Bilden wir jetzt die Faltung:

$$B^{-1}B(\Phi, \phi),$$

welche ersichtlich den Typus  $\begin{Bmatrix} q & q \\ q-1 & b \\ b & b \end{Bmatrix}$  hat. Es ist wegen des assoziativen Charakters der Faltung:

$$BC(\varphi, \phi) = B B^{-1}B(\varphi, \phi) = UB(\varphi, \phi) = B(\varphi, \phi),$$

da offenbar Faltung mit  $U$  nichts ändert. Setzt man ferner die

bilineare Operation vom Typus  $\begin{Bmatrix} q & q \\ q-1 & b \\ b & b \end{Bmatrix}$  an:

$$U'(\Phi, \phi) = \int_J \frac{d\Phi d\phi}{db},$$

so ist offenbar:

$$B U'(\varphi, \phi) = B(\varphi, \phi).$$

Es folgt daraus:

$$B \cdot (U' - C)(\varphi, \phi) = 0.$$

Es sei nun  $\varphi$  eine beliebige Mengenfunktion der Klasse  $L_p(a)$ . Dann schreibt die letzte Identität sich folgendermaßen:

$$\int_J \frac{d\varphi \cdot dB(U' - C)[\phi]}{da} = 0$$

und wenn man darin:

$$\varphi(E) = u_{E'}(E) = a(EE')$$

einführt, so erhält man, daß für jede Menge  $E'$ :

$$B[(U' - C)[\phi]] = 0.$$

Die Gleichung  $B[\bar{\phi}] = 0$  hat also die Lösung:

$$\bar{\phi} = U'[\phi] - C[\phi],$$

wenn  $\phi$  irgendeine Funktion von  $L_q(b)$  ist.

Da aber voraussetzungsgemäß die einzige Lösung dieser Gleichung durch  $\bar{\phi} = 0$  gegeben ist, so folgt, daß für alle  $\phi$  von  $L_q(b)$ :

$$C[\phi] = U'[\phi] = \phi$$

oder:

$$B^{-1}B[\phi] = \phi.$$

Die Transformation  $B^{-1}B$  ist also die Identität und es ist:

$$B^{-1}B(\Phi, \phi) = U'(\Phi, \phi) = \int_J \frac{d\Phi d\phi}{db}.$$

Übergang zu den transponierten Substitutionen ergibt:

$$\bar{B}\bar{B}^{-1}[\Phi] = \Phi, \quad \bar{B}^{-1}.\bar{B}[\varphi] = \varphi.$$

Aus der ersten Beziehung folgt, daß  $\bar{B}[\varphi] = \Phi$  eine gleichmäßig beschränkte Lösung zuläßt, die durch  $\varphi = \bar{B}^{-1}[\Phi]$  gegeben wird. Ferner folgt aus:

$$\bar{B}[\varphi] = 0, \quad \varphi = \bar{B}^{-1}.\bar{B}[\varphi] = \bar{B}^{-1}[0] = 0,$$

so daß die transponierte Gleichung auch eindeutig lösbar ist. Es gilt also:

Hat  $B[\phi] = \Psi$  für alle  $\Psi$  aus  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  eine beschränkte Lösung  $\phi$  der Klasse  $L_q(b)$ , was dann und nur dann der Fall ist, wenn ein  $M$  so existiert, daß für jedes  $\varphi$  aus  $L_p(a)$  die Ungleichung (74) gilt, und hat  $B[\phi] = 0$  die einzige Lösung der Klasse  $L_q(b)$   $\phi = 0$ ,

so hat  $B$  eine Resolvente, d. h. es existiert eine beschränkte Bilinearoperation  $B^{-1}$ , so daß die Beziehungen bestehen:

$$BB^{-1}[\Psi] = \Psi, \quad B^{-1}B[\phi] = \phi$$

$$\overline{B^{-1}}\overline{B}[\varphi] = \varphi, \quad \overline{B}\overline{B^{-1}}[\Phi] = \Phi$$

wo  $\varphi, \phi, \Phi, \Psi$  irgendwelche Funktionen der Klassen  $L_p(a), L_q(b), L_{\frac{q}{q-1}}(b), L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  bedeuten. Bezüglich der Lösbarkeit der transponierten Gleichung  $\overline{B}[\varphi] = \Phi$  gilt dann, daß sie für jedes  $\Phi$  aus  $L_{\frac{q}{q-1}}(b)$  eine eindeutig bestimmte, beschränkte Lösung gestattet.

Obgenanntes  $M$  ist dabei eine Schranke für  $B^{-1}$  und daher gilt für die Lösung der transponierten Gleichung:

$$\varphi = \overline{B^{-1}}[\Phi]$$

die Ungleichung:

$$\int_J \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \leq M^p \left( \int \frac{|d\Phi|^{\frac{q}{q-1}}}{db^{\frac{1}{q-1}}} \right)^{\frac{q-1}{q} \cdot p}$$

Ein analoges Resultat gilt, wenn man von eindeutiger beschränkter Lösbarkeit der transponierten Gleichung ausgeht.

Aus diesen Sätzen folgt, daß das Bestehen von (74) zusammen mit der Bedingung, daß  $B[\phi] = 0$  nur durch  $\phi = 0$  befriedigt wird, das Bestehen von (75) nach sich zieht, mit demselben Werte von  $M$  und ebenso folgt aus (75) und der eindeutigen Lösbarkeit von  $\overline{B}[\varphi] = 0$  wiederum (74).

4. Wie schon oben (p. 94) bemerkt wurde, führt eine beschränkte lineare Funktionaltransformation konvergente Folgen von Mengenfunktionen wieder in konvergente über und auch die starke Konvergenz bleibt erhalten.

Eine ausgezeichnete Rolle spielen nun jene Transformationen, welche jede konvergente Folge in eine stark konvergente verwandeln. Diese wollen wir als vollstetig bezeichnen.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Das geht im wesentlichen auf F. Riesz zurück (a. a. O. [I], p. 487).



Es sei  $B(\varphi, \psi)$  eine Bilinearoperation vom Typus  $\begin{Bmatrix} p & q \\ a & b \end{Bmatrix}$  und  $B[\psi]$  vollstetig. Es sei ferner  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  eine bezüglich  $L_p(a)$  gegen  $\varphi$  und  $\psi_1, \psi_2, \dots$  eine bezüglich  $L_q(b)$  gegen  $\psi$  konvergente Folge. Es ist also für ein geeignet gewähltes  $K$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi, \quad (76)$$

$$\int_J \frac{|d\varphi_n|^p}{da^{p-1}} \leq K^p, \quad \int_J \frac{|d\psi_n|^q}{db^{q-1}} \leq K^q.$$

Dann folgt:

$$|B(\varphi_n \psi_n) - B(\varphi, \psi)| \leq |B(\varphi_n, \psi_n - \psi)| + |B(\varphi_n - \varphi, \psi)|$$

$$\leq K \left[ \int_J \frac{|dB(\psi_n - \psi)|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{p-1}{p}} + \left| \int_J \frac{d(\varphi_n - \varphi) dB[\psi]}{da} \right|$$

Für  $n = \infty$  konvergiert das erste Glied gegen Null, weil  $B[\psi_n]$  nach Voraussetzung stark gegen  $B[\psi]$  konvergieren muß und das zweite, weil die Linearoperation:

$$L(\varphi) = \int_J \frac{d\varphi \cdot dB[\psi]}{da}$$

als solche vollstetig ist (vgl. p. 79).

Ist also  $B[\psi]$  vollstetig, so folgt aus der Konvergenz von  $\varphi_n$  gegen  $\varphi$  [bezüglich  $L_p(a)$ ] und von  $\psi_n$  gegen  $\psi$  [bezüglich  $L_q(b)$ ], die Konvergenz von  $B(\varphi_n \psi_n)$  gegen  $B(\varphi, \psi)$  und das selbe folgt offenbar, wenn  $\bar{B}[\varphi]$  vollstetig ist. Diese Konvergenzeigenschaft von  $B(\varphi, \psi)$  wollen wir als Vollstetigkeit<sup>1</sup> der Bilinearoperation  $B$  bezeichnen, analog zu VI, 1.

Wir wollen jetzt nachweisen: Ist  $B(\varphi, \psi)$  in dem jetzt definierten Sinne vollstetig, so ist es auch die Transformation  $B[\psi]$  (und natürlich ebenso  $\bar{B}[\varphi]$ ).

Wir fordern also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \frac{d\varphi_n dB[\psi_n]}{da} = \int_J \frac{d\varphi dB[\psi]}{da},$$

<sup>1</sup> Dies ist der Hilbert'schen Definition für Funktionen unendlich vieler Variablen analog (Gött. Nachr., 1906, p. 200).

wenn  $\varphi_n$  gegen  $\varphi$ ,  $\psi_n$  gegen  $\psi$  konvergiert. Die Folge  $B[\psi_n]$  konvergiert gegen  $B[\psi]$  bezüglich  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  und es ist, wenn  $M$  eine Schranke von  $B$  vorstellt:

$$\left( \int_J \frac{|dB[\psi_n]|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq M \left( \int_J \frac{|d\psi_n|^q}{d b^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq MK.$$

$K$  hat dabei die nämliche Bedeutung wie in (76). Für  $\varphi_n$  nehmen wir jetzt die Folge:

$$\varphi_n = B[\psi_n]^*$$

(im Sinne von VI, 2).

Dann ist:

$$\int_J \frac{|d\varphi_n|^p}{d a^{p-1}} = \int_J \frac{|dB[\psi_n]|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \leq (MK)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Sollten daher die  $\varphi_n$  nicht konvergieren, so kann man durch Auswahl einer Teilfolge nach V, 5 Konvergenz gegen ein  $\varphi$  von  $L_p(a)$  erzwingen und es dabei noch so einrichten, daß die Unbestimmtheitsgrenze:

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \int_J \frac{|d\varphi_n|^p}{d a^{p-1}} = \overline{\lim}_{n=\infty} \int_J \frac{|dB[\psi_n]|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}}$$

für die Teilfolge als Grenzwert der analogen Folge erscheint. Wir wollen diese Auswahl bereits getroffen denken, ohne die Schreibweise deshalb zu ändern.

Dann ist aber:

$$\begin{aligned} \int_J \frac{d\varphi dB[\psi]}{d a} &= \lim_{n=\infty} \int_J \frac{d\varphi_n dB[\psi_n]}{d a} = \\ &= \lim_{n=\infty} \int_J \frac{|dB[\psi_n]|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \geq \int_J \frac{|dB[\psi]|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \\ \int_J \frac{d\varphi dB[\psi]}{d a} &= \lim_{n=\infty} \int_J \frac{|d\varphi_n|^p}{d a^{p-1}} \geq \int_J \frac{|d\varphi|^p}{d a^{p-1}}, \end{aligned}$$

also:

$$\left| \int_J \frac{d\varphi dB[\psi]}{da} \right| \geq \left( \int_J \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_J \frac{|dB[\psi]|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Hält man dies mit (45) zusammen, so folgt, daß in dieser und den beiden vorangehenden Ungleichungen nur das Gleichheitszeichen gelten kann. Also ist insbesondere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \frac{|dB[\psi_n]|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} = \int_J \frac{|dB[\psi]|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Geht man von der herausgegriffenen Teilfolge der  $\psi_n$  wieder zu der ursprünglich gegebenen zurück, so ist links zunächst der Grenzwert durch die obere Unbestimmtheitsgrenze zu ersetzen. Aus (40') ergibt sich aber, daß auch in diesem Falle die angeschriebene Grenzgleichung bestehen bleibt. Nach dem Kriterium von p. 41 ist aber dann  $B[\psi_n]$  stark gegen  $B[\psi]$  konvergent, w. z. b. w.

5. Der Typus einer Bilinearoperation heiße normal, wenn  $q = \frac{p}{p-1}$  und  $a = b$ . Die Bilinearoperationen, die denselben normalen Typus haben, bilden ein geschlossenes System in dem Sinne, daß durch Faltung und Resolventenbildung immer wieder Operationen desselben Typus entstehen. Die zugehörigen »normalen« Funktionaltransformationen führen die Klassen  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ , beziehungsweise  $L_p(a)$  wieder in dieselben Klassen über.

Es seien  $\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n$  Funktionen von  $L_p(a)$  und  $\Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_n$  Funktionen von  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ . Wir bilden mit einem beliebigen  $\psi$  von  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  den Ausdruck:

$$B[\psi] = \psi + \sum_{k=1}^n \Psi_k \int_J \frac{d\Phi_k d\psi}{da}. \quad (77)$$

Da man leicht nachweist:

$$\begin{aligned} & \left( \int_J \frac{|dB[\phi]|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \\ & \leq \left( \int_J \frac{|d\phi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[ 1 + \sum_1^n \left( \int_J \frac{|d\Phi_k|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_J \frac{|d\Psi_k|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right], \end{aligned}$$

so ist  $B[\phi]$  eine beschränkte lineare normale Funktionaltransformation.

Wir können dabei ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die  $\Psi_k$  linear unabhängig sind, d. h. daß zwischen ihnen keine lineare homogene Relation mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten:

$$c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots + c_n \Psi_n = 0$$

besteht und daß dasselbe von den  $\Phi$  gilt, da jede derartige Relation eines der  $\Psi$ , beziehungsweise der  $\Phi$  durch die übrigen auszudrücken gestattet, so daß sich (77) stets auf einen analog gebauten Ausdruck — mit eventuell geringeren Werte von  $n$  — reduzieren läßt, in welchem die  $\Psi$  und  $\Phi$  linear unabhängig sind.

Wie in 2. stellen wir jetzt die Frage nach der Lösbarkeit der Funktionalgleichung

$$B[\phi] = \Psi, \text{ d. h. } \phi + \sum_1^n \Psi_k \int_J \frac{d\Phi_k d\phi}{da} = \Psi \quad (78)$$

bei gegebenem  $\Psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ .

Offenbar muß  $\phi$  die Gestalt haben:

$$\phi = \Psi + \sum_1^n c_i \Psi_i$$

und dies gibt, in (71) eingetragen, wegen der linearen Unabhängigkeit der  $\Psi_i$  die  $n$  Gleichungen:

$$c_i + \sum_1^n c_k \int_J \frac{d\Phi_i d\Psi_k}{da} = - \int_J \frac{d\Phi_k d\phi}{da} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (79)$$

Es sind nun zwei Fälle möglich:

a) Die Determinante des Systems (79) ist nicht Null; dann ergibt sich ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem  $c_1 \dots c_n$  in der Gestalt:

$$c_i = \sum_1^n A_{ik} \int_J \frac{d\Phi_k d\Psi}{da},$$

wo die  $A_{ik}$  fixe Zahlen sind und damit:

$$\psi = \Psi + \sum_{i,k} A_{ik} \Psi_i \int_J \frac{d\Phi_k d\Psi}{da} = B^{-1}[\Psi].$$

Dies ist offenbar eine beschränkte lineare normale Funktionaloperation desselben Typus wie (77) und nach den früheren Resultaten reziprok zu  $B$ :  $\bar{B} \cdot B^{-1}[\psi] = B$ ,  $\bar{B} \cdot \bar{B}^{-1}[\varphi] = \varphi$ .

Es hat also in diesem Falle  $B$  eine Resolvente  $B^{-1}(\varphi, \psi)$  und es ist folglich auch die transponierte Gleichung:

$$\bar{B}[\varphi] = \varphi + \sum_1^n \Phi_k \int_J \frac{d\Psi_k d\varphi}{da} = \Phi$$

für jedes  $\Phi$  der Klasse  $L_p(a)$  eindeutig lösbar.

b) Die Determinante von (79) ist vom Range  $r < n$ . Dann haben das homogene System:

$$c_i + \sum_1^n c_k \int_J \frac{d\Phi_i d\Psi_k}{da} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und das entsprechende transponierte:

$$\gamma_i + \sum_1^n \gamma_k \int_J \frac{d\Psi_i d\Phi_k}{da} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

je  $n-r$  linear unabhängige Lösungssysteme:

$$c_i = c_i^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-r)$$

$$\gamma_i = \gamma_i^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-r).$$

Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit von (72) ist dann das Bestehen der  $n-r$  Relationen:

$$\sum_1^n \gamma_i^{(k)} \int_J \frac{d\Phi_i d\Psi}{da} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-r)$$

und die Lösung erscheint in der Form:

$$c_i = c_i^0 + \sum_1^{n-r} w_k c_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mit willkürlichen  $w_1 w_2 \dots w_{n-r}$ . Das gibt für die Lösung von (77) die Gestalt:

$$\phi = \phi^0 + \sum_1^{n-r} w_k \phi^{(k)},$$

wo  $\phi^{(1)} \dots \phi^{(n-r)}$  die aus den  $c_i^{(k)}$  hervorgehenden  $n-r$  linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung

$$B[\phi] = 0$$

sind. Für die transponierte homogene Gleichung:

$$\bar{B}[\varphi] = 0$$

ergeben sich mit Hilfe der  $\gamma_i^{(k)}$  ebenfalls  $(n-r)$  linear unabhängige Lösungen  $\varphi^{(k)}$  und die Lösbarkeitsbedingungen von (77) kann man mit ihrer Hilfe schreiben:

$$\int_J \frac{d\Psi d\varphi^{(k)}}{da} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-r.$$

Also ergibt sich:

Im Falle *b*) haben  $B[\phi] = 0$  und  $\bar{B}[\varphi] = 0$  je  $(n-r)$  linear unabhängige Lösungen  $\phi^{(1)} \dots \phi^{(n-r)}$ , beziehungsweise  $\varphi^{(1)} \dots \varphi^{(n-r)}$ . (77) ist dann und nur dann lösbar, wenn:

$$\int_J \frac{d\Psi d\varphi^{(k)}}{da} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-r)$$

und die Lösung hat die Gestalt:

$$\psi = \psi^{(0)} + \sum_1^{n-r} w_k \psi^{(k)}$$

mit willkürlichen  $w_k$ . Ebenso ist die transponierte Gleichung:

$$\bar{B}[\varphi] = \Phi$$

dann und nur dann lösbar, wenn:

$$\int_J \frac{d\Phi d\psi^{(k)}}{da} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-r)$$

und die Lösung schreibt sich:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \sum_1^{n-r} w_k \varphi^{(k)}$$

mit willkürlichen  $w_k$ .

Wir betrachten jetzt eine zweite spezielle Art von normalen Bilinearoperationen; es bezeichne wie oben  $U(\varphi, \psi)$  die

Bilinearoperation vom Typus  $\left\{ \begin{array}{c} p & \frac{p}{p-1} \\ a & a \end{array} \right\}$ :

$$U(\varphi, \psi) = \int_J \frac{d\varphi d\psi}{da}$$

und es sei  $A(\varphi, \psi)$  eine Bilinearoperation desselben Typus mit einer Maximalzahl  $M < 1$ . Dann wird behauptet:

Die Bilinearoperation

$$U+A$$

besitzt eine beschränkte Resolvente, welche sich wie folgt berechnet:

$$(U+A)^{-1} = U - A + A^2 - A^3 + \dots$$

$$(A^2 = A.A, A^{n+1} = A^n.A).$$

Die Maximalzahl von  $A^n$  ist nämlich  $\leq M^n$ . Sind daher  $\varphi, \psi$  zwei beliebige Mengenfunktionen der Klasse  $L_p(a)$ , beziehungsweise  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ , so konvergiert die Reihe:

$$C(\varphi, \psi) = U(\varphi, \psi) - A(\varphi, \psi) + A^2(\varphi, \psi) - \dots$$

und stellt eine beschränkte Bilinearoperation mit der Schranke

$$\frac{1}{1-M}$$

dar. Setzt man nun:

$$U - A + A^2 - \dots \pm A^n = C_n,$$

so ist:

$$(U+A)C = (U+A)(C_n + (C - C_n)).$$

$(U+A)(C - C_n)$  besitzt aber, wie man leicht sieht, die mit  $n = \infty$  gegen Null konvergierende Schranke  $M^{n+1} \cdot \frac{1+M}{1-M}$ .

Also wird:

$$(U+A).C = \lim_{n=\infty} (U+A)C_n = \lim_{n=\infty} [U + (-1)^n A^{n+1}].$$

Da ferner  $\lim_{n=\infty} A^{n+1} = 0$ , so folgt:

$$(U+A)C = 0$$

und ganz ebenso:

$$C(U+A) = 0.$$

$C$  ist also tatsächlich Resolvente von  $U+A$ .

6. Es sei jetzt  $K$  eine normale vollstetige Bilinearoperation.

Wir betrachten:

$$U(\varphi, \psi) + K(\varphi, \psi).$$

Die zugehörigen Funktionaltransformationen sind:

$$\psi + K[\psi], \quad \varphi + \bar{K}[\varphi].$$

Wir nennen sie die Fredholmtransformationen, weil ihre Theorie als speziellen Fall die der Fredholm'schen Integralgleichung umfaßt.

Wir setzen, wenn  $\Pi$  eine beliebige Teilung von  $J$  ist:

$$K(\varphi, \psi) = K(\varphi^{(1)}, \psi) + K(\varphi - \varphi^{(1)}, \psi) = K_0^{(1)}(\varphi, \psi) + K_1^{(1)}(\varphi, \psi).$$

Es wird behauptet:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  kann man ein  $\delta$  so bestimmen, daß für jede Teilung  $\Pi$ , deren Maximaldurchmesser  $< \delta$ , die Maximalzahl von  $K_1^{(1)} < \varepsilon$  ausfällt.



Nehmen wir das Gegenteil als richtig an, so existiert eine Folge von Funktionen  $\varphi_n$  aus  $L_p$ , von  $\psi_n$  aus  $L_{\frac{p}{p-1}}$ , von Teilungen  $\Pi_n$  und eine Zahl  $\rho > 0$ , so daß:

$$\int_J \frac{|d\varphi_n|^p}{d a^{p-1}} = \int_J \frac{|d\psi_n|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} = 1,$$

$$\lim_{n=\infty} d(\Pi_n) = 0, \quad K_1^{(\Pi_n)}(\varphi_n, \psi_n) > \rho.$$

Durch Auswahl einer Teilfolge kann man zunächst erreichen, daß:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n = \varphi \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \psi_n = \psi$$

existieren. Es ist nun:

$$K_1^{(\Pi_n)}(\varphi_n, \psi_n) = K(\varphi_n - \varphi_n^{(\Pi_n)}, \psi_n).$$

Wir werden nun zeigen:

$$\lim_{n=\infty} (\varphi_n^{(\Pi_n)} - \varphi_n) = 0,$$

was dann wegen der Vollstetigkeit von  $K$ :

$$\lim_{n=\infty} K_1^{(\Pi_n)}(\varphi_n, \psi_n) = 0$$

im Widerspruch zur Annahme nach sich zieht. Es sei  $E$  eine Menge des Definitionsbereiches von  $a$  und  $\varepsilon$  eine positive Zahl. Dann können wir in  $E$  eine abgeschlossene Menge  $E'$  bestimmen, derart, daß:

$$a(E) - a(E') < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

Nach (24 a) ist nun:

$$|\varphi_n(E - E')| = |\varphi_n(E) - \varphi_n(E')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bezeichnet man ferner die Vereinigung der Teilungsmengen von  $\Pi_n$ , welche Punkte von  $E'$  enthalten, mit  $E'_n$ , so ist:

$$\lim_{n=\infty} E'_n = E',$$

$$|\varphi_n(E'_n) - \varphi_n(E')| \leq a (E'_n - E')^{\frac{p-1}{p}}$$

und daher:

$$\lim_{n=\infty} |\varphi_n(E'_n) - \varphi_n(E')| = 0.$$

Es ist aber:

$$\varphi_n^{(\Pi_n)}(E'_n) = \varphi_n(E'_n)$$

$$|\varphi_n^{(\Pi_n)}(E') - \varphi_n^{(\Pi_n)}(E)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \lim_{n=\infty} |\varphi_n^{(\Pi_n)}(E'_n) - \varphi_n^{(\Pi_n)}(E')| = 0,$$

weil ja auch:

$$\int_J \frac{|d\varphi_n^{(\Pi_n)}|^p}{d a^{p-1}} \leq 1.$$

Sonach wird:

$$\begin{aligned} |\varphi_n^{(\Pi_n)}(E) - \varphi_n(E)| &\leq |\varphi_n^{(\Pi_n)}(E) - \varphi_n^{(\Pi_n)}(E')| + |\varphi_n^{(\Pi_n)}(E') - \varphi_n^{(\Pi_n)}(E'_n)| \\ &\quad + |\varphi_n^{(\Pi_n)}(E'_n) - \varphi_n(E')| + |\varphi_n(E') - \varphi_n(E)| \\ &< |\varphi_n^{(\Pi_n)}(E'_n) - \varphi_n^{(\Pi_n)}(E')| + \\ &\quad + |\varphi_n(E') - \varphi_n(E)| + \varepsilon, \end{aligned}$$

daher:

$$\overline{\lim}_{n=\infty} |\varphi_n^{(\Pi_n)}(E) - \varphi_n(E)| \leq \varepsilon,$$

was wegen der Willkür von  $\varepsilon$ :

$$\lim_{n=\infty} (\varphi_n^{(\Pi_n)}(E) - \varphi_n(E)) = 0$$

zur Folge hat, wie behauptet wurde.

Wir nehmen jetzt eine bestimmte Teilung  $\Pi$  her, für welche die Maximalzahl  $h$  von  $K_1^{(\Pi)}$  kleiner als 1 ist. Dann hat nach den zuvor erhaltenen Resultaten die Bilinearoperation:

$$U + K_1^{(\Pi)}$$

eine beschränkte Resolvente  $C$ :

$$(U + K_1)C = U, \quad C(U + K_1) = U.$$

Wir behandeln jetzt die Funktionalgleichungen, zu welchen die Fredholmoperationen Veranlassung geben:

$$\psi + K[\psi] = \Psi, \quad (70 a)$$

$$\varphi + \bar{K}[\varphi] = \Phi, \quad (70 b)$$

wo  $\Psi, \Phi$  gegebene Funktionen der Klassen  $L_{\frac{p}{p-1}}$ , beziehungsweise  $L_p$  sind.

Man kann die zugehörige Bilinearoperation schreiben:

$$U+K = U+K_0+K_1 = (U+K_1)(U+CK_0). \quad (71)$$

Es sei nun  $U+CK_0$  so beschaffen, daß es eine Resolvente  $R$  besitzt. Dann hat  $U+K$  offenbar die Resolvente

$$(U+K)^{-1} = RC.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} K_0(\varphi, \psi) &= K(\varphi^{(n)}, \psi) = K\left(\sum_J \frac{\Delta\varphi \cdot a(E\Delta J)}{\Delta a}, \psi\right) \\ &= \sum_J \frac{\Delta\varphi}{\Delta a} K(a(E\Delta J), \psi) = \sum_J \frac{\Delta\varphi}{\Delta a} \Delta K[\psi] \end{aligned}$$

$$K_0[\psi] = \sum_J \frac{a(E\Delta J)}{\Delta a} \Delta K[\psi]$$

$$CK_0[\psi] = \sum_J \frac{\Delta K[\psi] \cdot C[a(E\Delta J)]}{\Delta a}.$$

Es ist nun  $C[a(E\Delta J)]$  eine Mengenfunktion der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  und für  $\Delta K[\psi]$  kann geschrieben werden:

$$\Delta K[\psi] = K(a(E\Delta J), \psi) = \int_J \frac{d\psi d\bar{K}[a(E\Delta J)]}{da},$$

daher hat  $\psi + CK_0[\psi]$  genau den am Anfang dieser Nummer behandelten Typus. Im Falle a) hat demnach  $U+CK_0$  eine Resolvente, also auch  $U+K$ . Dieser Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die homogene Funktionalgleichung:

$$\psi + CK_0[\psi] = 0$$

nur die Lösung Null hat. Aus (71) sieht man, daß das gleichbedeutend damit ist, daß

$$\psi + K[\psi] = 0$$

nur die Lösung Null hat; denn ist  $\psi$  eine Lösung letzterer Gleichung, so ist  $C(U+K)[\psi] = C[\psi] + CK[\psi]$  eine Lösung ersterer Gleichung, die nur gleichzeitig mit  $\psi$  Null sein kann. Ist dagegen  $\psi$  eine von Null verschiedene Lösung der ersten Gleichung, so ergibt  $(U+K_1)[\psi] = \psi + K_1[\psi]$  eine von Null verschiedene Lösung der zweiten.

Im Falle (b) hat die homogene Gleichung

$$\psi + CK_0[\psi] = 0$$

$(n-r)$  linear unabhängige Lösungen  $\psi^{(k)}$ ; diese sind ebenso viele Lösungen von

$$\psi + K[\psi] = 0.$$

Ebenso hat die transponierte Gleichung:

$$\varphi + \bar{K}_0\bar{C}[\varphi] = 0$$

$(n-r)$  unabhängige Lösungen  $\sigma^{(k)}$ , denen die ebenso vielen linear unabhängigen Lösungen von:

$$\varphi + \bar{K}[\varphi] = 0: \quad \bar{C}[\sigma^{(k)}] = \varphi^{(k)}$$

entsprechen.

Für die Lösbarkeit von

$$\psi + K[\psi] = \Psi$$

ist notwendig und hinreichend die von:

$$C\psi + CK[\psi] = C\Psi$$

oder:

$$\psi + CK_0[\psi] = C\Psi,$$

also das Erfülltsein der Integralbedingungen:

$$\int_J \frac{dC[\Psi] d\sigma^{(k)}}{da} = \int_J \frac{d\Psi dC[\sigma^{(k)}]}{da} = \int_J \frac{d\Psi d\varphi^{(k)}}{da} = 0$$

und die Lösung erhält die Gestalt:

$$\psi = \psi^{(0)} + \sum_1^n w_k \psi^{(k)}.$$

Für die Lösbarkeit von

$$\varphi + \bar{K}[\varphi] = \Phi$$

ist dagegen notwendig und hinreichend die Lösbarkeit von:

$$\bar{\varphi} + \bar{K}_0 \bar{C} \bar{\varphi} = \Phi,$$

also die Integralbedingungen:

$$\int_J \frac{d\Phi \cdot d\psi^{(k)}}{da} = 0$$

und die Lösung erhält die Form:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^0 + \sum_0^{n-r} w_k \sigma^{(k)},$$

$$\varphi = C[\bar{\varphi}] = C[\bar{\varphi}^0] + \sum_0^{n-r} w_k \varphi^{(k)} = \varphi^{(0)} + \sum_1^{n-r} w_k \varphi^{(k)}.$$

All dies ergibt sich leicht mit Hilfe der aus (71) unmittelbar folgenden Gleichungen:

$$\psi + K[\psi] = (U + K_1)(U + CK_0)[\psi],$$

$$\psi + \bar{K}[\psi] = (U + \bar{K}_0 \bar{C})(U + \bar{K}_1)[\psi],$$

unter Beachtung, daß  $U + K_1$  die Resolvente  $C$  hat.

Schreibt man im Falle  $a$ ) die Resolvente in der Form  $U + D$ , so ergibt sich:

$$K + D + KD = 0,$$

$$K + D + DK = 0.$$

Da nun  $K$  vollständig und  $D$  beschränkt ist, so ist, wie leicht zu erkennen, auch  $KD$  vollständig, daher auch  $D$ .

Hätten wir statt  $U + K$  die Operation  $U + \lambda K$  betrachtet, wo  $\lambda$  ein komplexer Parameter ist (unter geeigneter Erweiterung

unserer Definitionen auf das komplexe Gebiet), so hätten wir leicht erkannt, daß die Resolvente  $R(\varphi, \psi)$  von  $U + \lambda K$  eine meromorphe Funktion von  $\lambda$  mit von  $\varphi, \psi$  unabhängigen Polen vorstellt.

Unter der Annahme  $p = 2$  läßt sich ferner in höchst einfacher Weise ein großer Teil der Resultate in Hilbert's »vierter Mitteilung«<sup>1</sup> auf unsere allgemeinere Fragestellung übertragen, so z. B. der Beweis für die orthogonale Transformation einer vollstetigen symmetrischen Bilinearform<sup>2</sup> etc.

### VIII. Einige Anwendungen.

1. Um aus den Betrachtungen des vorigen Kapitels Nutzen ziehen zu können, muß man die auftretenden Integraloperationen auf die in II. eingeführten verallgemeinerten Stieltjes'schen Integrale zurückführen.

Dazu ist folgendes zu bemerken:

Nach IV. ist  $\varphi(E)$ , wenn es zur Basis  $b$  gehört, in der Form darstellbar:

$$\varphi(E) = \int_E \Phi db.$$

Es werde zunächst  $\varphi(E)$  als monoton vorausgesetzt. Dann kann man offenbar  $\Phi$  als nicht negativ annehmen. Es sei nun  $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 \dots$  eine Fundamentalreihe (vgl. II., 2) mit der Maximaldifferenz  $\alpha$  und es sei  $E_k$  die Menge jener Punkte von  $E$ , für welche:

$$\gamma_k \leq \Phi^p < \gamma_{k+1}.$$

Dann ist:

$$\gamma_k b(E_k) \leq \left( \frac{\int_{E_k} \Phi db}{b(E_k)} \right)^p \cdot b(E_k) = \frac{\varphi(E_k)^p}{b(E_k)^{p-1}}.$$

Solche  $E_k$ , für welche  $b(E_k) = 0$ , schalten wir vorher aus. Dann folgt:

$$\sum_0^N \gamma_k b(E_k) = \sum_1^N \frac{\varphi(E_k)^p}{b(E_k)^{p-1}} \leq \int_J \frac{|d\varphi|^p}{db^{p-1}},$$

wenn  $\varphi$  zu  $L_p(b)$  gehört.

<sup>1</sup> Gött. Nachr., 1906, p. 157 ff.

<sup>2</sup> Ebenda, p. 201 ff.

Das zieht aber nach sich, daß  $\Phi^p$  summierbar ist. Dasselbe gilt offenbar, wenn wir die Monotonie von  $\varphi$  aufgeben und es wird:

$$\int_E |\Phi|^p db \leq \int_E \frac{|d\varphi|^p}{db^{p-1}}.$$

Es sei nun umgekehrt die Existenz von  $\int_E |\Phi|^p db$  ( $p > 1$ ) vorausgesetzt. Nehmen wir zunächst wieder  $\Phi$  als positiv an, so konvergiert die Reihe:

$$\sum_0^\infty y_k b(E_k),$$

wo  $y_k$  und  $E_k$  dasselbe wie oben bedeuten. Es sei nun  $\Pi$  eine beliebige Einteilung von  $E$ . Wir bilden:

$$\sum_{\Pi} \frac{\Delta \varphi^p}{\Delta b^{p-1}} = \sum_{\Pi} \frac{1}{\Delta b^{p-1}} \left( \sum_0^\infty \varphi(E_k \cdot \Delta E) \right)^p.$$

Nach (20) ist weiter:

$$\sum_{\Pi} \frac{\Delta \varphi^p}{\Delta b^{p-1}} \leq \sum_0^\infty \sum_{\Pi} \frac{\varphi(E_k \Delta E)^p}{b(E_k \Delta E)^{p-1}}.$$

Nun ist aber:

$$\varphi(\Delta E \cdot E_k) = \int_{\Delta E \cdot E_k} \Phi db \leq y_{k+1}^p b(\Delta E \cdot E_k),$$

$$\sum_{\Pi} \frac{\Delta \varphi^p}{\Delta b^{p-1}} \leq \sum_0^\infty y_{k+1}^p b(E_k).$$

Da für  $\lim \alpha = 0$  die rechte Seite den Grenzwert  $\int_E \Phi^p db$  hat, so folgt, wenn man noch den leichten Übergang auf nicht zeichenbeständiges  $\Phi$  macht:

Gleichzeitig mit  $\int_E |\Phi|^p db$  existiert auch:

$$\int_E \frac{|d\varphi|^p}{db^{p-1}} \leq \int_E |\Phi|^p db.$$

Daraus schließt man: Die Existenz jedes der beiden Integralausdrücke

$$\int_E \frac{|d\varphi|^p}{db^{p-1}}, \quad \int_E |\Phi|^p db$$

zieht die des anderen nach sich und beide haben denselben Wert.<sup>1</sup>

Wir wollen von diesem Resultate hier eine allerdings für das folgende belanglose Anwendung machen. Es sei  $b$  eine absolut additive monotone Mengenfunktion,  $\Phi$  eine auf einer Menge  $E$  bezüglich  $b$  meßbare Funktion. Es bezeichne  $E_A$  die Menge aller Punkte von  $E$ , für welche  $|\Phi| > A$ .  $b(E_A)$  kann bei zunehmendem  $A$  nicht wachsen. Die obere Grenze der Werte von  $A$ , für welche  $b(E_A) > 0$ , nennen wir das effektive Maximum  $|\overline{\Phi}|$  von  $\Phi$  bezüglich  $b$  auf  $E$ . Es ist dann klar, daß  $\Phi$  bezüglich  $b$  summierbar und:

$$\left| \int_E \Phi db \right| \leq |\overline{\Phi}| \cdot b(E)$$

ist, sobald  $|\overline{\Phi}|$  endlich ist. Es sei nun zunächst  $|\overline{\Phi}|$  als endlich vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\int_E |\Phi|^p db \leq |\overline{\Phi}|^p \cdot b(E) \quad (p > 0),$$

da das effektive Maximum von  $|\Phi|^p$  ersichtlich gleich  $|\overline{\Phi}|^p$  ist. Wir betrachten nun die Mengenfunktion:

$$\varphi(E) = \int_E \Phi db.$$

Aus der Ungleichung (23) erschließt man leicht:

$$\frac{\left( \int_E \frac{|d\varphi|^p}{db^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}}{b(E)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\left( \int_E \frac{|d\varphi|^q}{db^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}}}{b(E)^{\frac{1}{q}}},$$

<sup>1</sup> Dieses Resultat umfaßt als Spezialfall die von Hahn (Monatshefte für Math. und Physik, 1912, p. 161 ff.) geleistete Zurückführung der Hellinger'schen auf Lebesgue'sche Integrale.



wenn  $p > q > 1$ . Es bildet daher der Ausdruck:

$$M(p) = \left( \int_E |\Phi|^p db \right)^{\frac{1}{p}} \cdot b(E)^{-\frac{1}{p}} \quad (p > 1)$$

eine monoton wachsende Funktion von  $p$  und es ist ferner:

$$M(p) \leq |\overline{\Phi}|;$$

also auch:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M(p) \leq |\overline{\Phi}|.$$

Wir nehmen jetzt eine beliebige Zahl  $A$  zwischen Null und  $|\overline{\Phi}|$ . Dann ist:

$$\int_E |\Phi|^p db \geq \int_{E_A} |\Phi|^p db > A^p b(E_A),$$

also:

$$\left( \int_E |\Phi|^p db \right)^{\frac{1}{p}} > A \cdot b(E_A)^{\frac{1}{p}}$$

und  $b(E_A) > 0$ . Da nun offenbar:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} b(E)^{-\frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow \infty} b(E_A)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

so ergibt sich:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_E |\Phi|^p db \right)^{\frac{1}{p}} \geq A.$$

Da  $A$  beliebig zwischen Null und  $|\overline{\Phi}|$  gewählt werden konnte, so folgt hieraus die Darstellung des effektiven Maximums durch den Grenzwert:

$$|\overline{\Phi}| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \int_E |\Phi|^p db \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ist dagegen  $|\overline{\Phi}|$  unendlich, so haben entweder die in diesem Grenzwert auftretenden Integrale mindestens von einem bestimmten  $p$  an keinen Sinn, oder es ist doch ihr Grenzwert unendlich.

Wir bemerken ferner, anschließend an Kapitel IV, daß durch  $\varphi$  und  $b$   $\Phi$  im wesentlichen eindeutig bestimmt ist; denn offenbar kann, wenn zwei verschiedene  $\Phi$  dasselbe  $\varphi$  darzustellen gestatten, für die Punktmenge, auf der die  $\Phi$  verschieden sind,  $b$  nur Null sein.

Es seien jetzt  $\varphi, \psi$  zwei Mengenfunktionen der Klassen  $L_p(b)$  und  $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$ , die in  $J$  erklärt und monoton sind.  $E_k^{(n)}$  sei die Menge aller Punkte von  $J$ , für welche:

$$\frac{k}{n} \leq \Phi < \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, (n^2-1),$$

$E_n^{(n)}$  die Menge aller Punkte, wo:  $\Phi \geq n$ .  $\Phi$  ist dabei die zu  $\varphi$  gehörige Punktfunktion. Ersetzt man auf  $E_k^{(n)}$   $\Phi$  durch den Wert  $\frac{k}{n}$ , so erhält man eine Funktion  $\Phi_n$ , die für  $n = \infty$  offenbar monoton wachsend gegen  $\Phi$  konvergiert. Die Einteilung von  $J$  in  $E_0^{(n)}, E_1^{(n)}, \dots, E_{n^2}^{(n)}$  werde mit  $\Pi_n$  bezeichnet.

Von  $\Psi$  ausgehend, erhalten wir analoge Teilungen  $\Pi'_n$  von  $J$  in Mengen  $E_k^{(n)'}$  und dazugehörige monoton wachsend gegen  $\Psi$  konvergente  $\Psi_n$ . Es ist nun, wenn  $\Pi$  irgendeine Unterteilung von  $\Pi_n \cdot \Pi'_n$  ist:

$$\sum_J \frac{\Delta\varphi \cdot \Delta\psi}{\Delta b} \geq \sum_0^{n^2} \sum_0^{n^2} \frac{k}{n} \cdot \frac{i}{n} \cdot b(E_k^{(n)} E_i^{(n)'}) = \int_J \Phi^{(n)} \Psi^{(n)} db.$$

Da  $\Phi^{(n)} \Psi^{(n)}$  monoton gegen  $\Phi \Psi$  konvergiert, so folgt nach II., Satz IV die Existenz von:

$$\int_J \Phi \Psi db \leq \int_J \frac{d\varphi \cdot d\psi}{db}.$$

Wir denken uns jetzt  $\psi$  festgehalten und jedem  $\varphi$  der Klasse  $L_p(b)$  die Zahl:

$$\mathfrak{L}(\varphi) = \int_J \Phi \Psi db$$

zugeordnet. Da  $\Phi$  durch  $\varphi$  im wesentlichen eindeutig bestimmt ist, gehört zu jedem  $\varphi$  ein bestimmtes  $\mathfrak{L}(\varphi)$  und man erkennt

auf Grund der letzten Ungleichung leicht, daß man es mit einer beschränkten Linearoperation vom Typus  $\left\{ \begin{smallmatrix} p \\ b \end{smallmatrix} \right\}$  zu tun hat. Demnach ist:

$$\mathfrak{L}(\varphi) = \int_J \Phi \Psi db = \int_J \frac{d\varphi d\chi}{db}$$

und:

$$\chi(E') = \mathfrak{L}(u_{E'}) = \int_{E'} \Psi db = \phi(E'),$$

also:

$$\int_J \Phi \Psi db = \int_J \frac{d\varphi d\psi}{db},$$

da die zu  $u_{E'}(E) = b(EE')$  gehörige Punktfunktion offenbar auf  $E'$  gleich Eins, auf  $CE'$  gleich Null angenommen werden kann.

Damit ist zunächst für monotone  $\varphi, \psi$  und den Integrationsbereich  $J$ , aber, wie sofort ersichtlich, auch allgemein:

$$\int_E \Phi \Psi db = \int_E \frac{d\varphi d\psi}{db}.$$

In ähnlicher Weise kann man die in VI, 2. studierte Operation behandeln; natürlich ist:

$$\varphi^*(E) = \int_E |\Phi|^{p-1} \operatorname{sgn} \Phi \cdot db$$

(wenn  $\varphi$  der Klasse  $L_p(b)$  angehört).

2. Wir behandeln jetzt eine spezielle Art von Bilinearoperationen.

Es seien  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  eine Folge von Mengenfunktionen der Klasse  $L_p(a)$ ,  $b_1, b_2, \dots$  eine Folge positiver Zahlen mit konvergenter Summe:

$$\sum_1^{\infty} b_k,$$

$P_1, P_2, \dots$  eine abzählbare Punktmenge in  $J$  (deren Elemente sämtlich verschieden sind). Wir nehmen  $P_k$  als Grundmenge einer Mengenfunktion  $b$  vom Typus III (vgl. I, 6.), indem

wir  $b(P_k) = b_k$  setzen.  $b$  ist dann Basis für alle Mengenfunktionen vom Typus III mit derselben Grundmenge. Wir betrachten ferner die Mengenfunktionen der Klasse  $L_q(b)$ , diese sind vom Typus III, so daß  $c(P_k) = c_k$  und:

$$\sum_1^{\infty} \frac{|c_k|^p}{b_k^{p-1}} = \int_J \frac{|dc|^p}{db^{p-1}}$$

konvergiert. Es bezeichne schließlich  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  ein System positiver Konstanten, die folgender Bedingung genügen:

Die  $\alpha_1 \alpha_2 \dots$  sollen so beschaffen sein, daß der mit einer beliebigen Mengenfunktion  $c_1, c_2 \dots$  von  $L_q(b)$  und einem  $\psi$  von  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  gebildete Ausdruck:

$$B(c, \psi) = \sum_1^{\infty} c_k \alpha_k \int_J \frac{d\varphi_k d\psi}{da}$$

eine bilineare Funktionaloperation des Typus  $\left\{ \begin{matrix} q & \frac{p}{p-1} \\ b & a \end{matrix} \right\}$  dar-

stellt. Dazu ist notwendig und ausreichend, daß die obige Reihe für alle  $c$  von  $L_q(b)$  und alle  $\psi$  von  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  konvergiert und eine Zahl  $M$  existiert, für welche:

$$\left| \sum_1^{\infty} c_k \alpha_k \int_J \frac{d\varphi_k d\psi}{da} \right| \leq M \left( \sum_1^{\infty} \frac{|c_k|^q}{b_k^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_J \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Dafür ist wiederum erforderlich und ausreichend, daß die folgende Ungleichung besteht, die mit der Ungleichung in (60) identisch ist:

$$\left( \sum_1^{\infty} \alpha_k^{\frac{q}{q-1}} b_k \cdot \left| \int_J \frac{d\varphi_k d\psi}{da} \right|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq M \left( \int_J \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \quad (72)$$

und zwar für alle  $\psi$  von  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ . Die  $\alpha_k$  leisten z. B. sicher das Gewünschte, wenn sie entsprechend den Ungleichungen:

$$0 \leq \alpha_k^p \int_J \frac{|d\varphi_k|^p}{da^{p-1}} \leq 1, \quad \alpha_k > 0$$

gewählt werden.

Die zugehörige Funktionaltransformation lautet:

$$B[\psi] = \left\{ b_k \cdot \alpha_k \int_J \frac{d\varphi_k d\psi}{da} \right\},$$

wo der Klammerausdruck rechts eine Mengenfunktion der Klasse  $L_{\frac{q}{q-1}}(b)$  bedeutet, die auf  $P_k$  den angeschriebenen Wert hat. Die transponierte Transformation lautet:

$$\bar{B}[c] = \sum_1^{\infty} c_k \alpha_k \varphi_k;$$

es ist demnach die rechte Seite für alle  $c$  von  $L_q(b)$  konvergent und eine Mengenfunktion der Klasse  $L_p(a)$ . Im übrigen ist, wie aus der Ungleichung von (60a) folgt:

$$\left( \int_J \frac{\left| d \sum_1^{\infty} c_k \alpha_k \varphi_k \right|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left( \sum_1^{\infty} \frac{|c_k|^q}{b_k^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (72a)$$

Man erkennt daraus, daß  $\sum_1^n c_k \alpha_k \varphi_k$  für  $n = \infty$  stark gegen seine Grenze konvergiert.

An Stelle der Funktionalgleichung (63) tritt jetzt das System von abzählbar unendlich vielen Gleichungen:

$$b_k \cdot \alpha_k \int_J \frac{d\varphi_k d\psi}{da} = w_k, \quad (73)$$

wo

$$\sum_1^{\infty} \frac{|w_k|^{\frac{q}{q-1}}}{b_k^{\frac{q}{q-1}}}$$

konvergiert.

Als notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit ergibt sich nach VII., 2. die Existenz einer Zahl  $N$ , so daß:

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{w_k c_k}{b_k} \right| \leq N \left( \int_J \frac{\left| d \sum_1^{\infty} c_k \alpha_k \varphi_k \right|^p}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle  $c$ , für die:

$$\sum_1^{\infty} \frac{|c_k|^q}{b_k^{q-1}}$$

konvergiert und es gibt dann eine Lösung, für welche

$$\left( \int_J \frac{\left| d \psi \right|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq N.$$

Es genügt zunächst, das Erfülltsein obiger Ungleichung für solche Wertsysteme  $c_k$  zu fordern, bei denen nur eine endliche Zahl der  $c_k$  von Null verschieden ist. Denn, wie erwähnt, konvergiert

$$\sum_1^n c_k \alpha_k \varphi_k \quad \text{stark gegen} \quad \sum_1^{\infty} c_k \alpha_k \varphi_k.$$

Wäre daher für ein unendliches Wertsystem der  $c_k$  obige Ungleichung nicht erfüllt, so könnte sie auch nicht für alle endlichen Wertsysteme zu Recht bestehen.

Setzen wir noch  $c_k \alpha_k = \mu_k$ , so lautet die Auflösbarkeitsbedingung von (73):

$$\left| \sum_k \frac{w_k \mu_k}{\alpha_k b_k} \right| \leq N \left( \int_J \frac{\left| d \sum_k \mu_k \varphi_k \right|^p}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

wo die Summation über ein beliebiges System der  $\varphi_1 \varphi_2 \dots$  mit beliebigen Faktoren  $\mu_k$  behaftet, zu erstrecken ist.

Es seien nun die Gleichungen (73) in der Gestalt vorgelegt:

$$\int_J \frac{d\varphi_k d\psi}{da} = a_k, \quad (73a)$$

wo die  $a_1 a_2, \dots$  ein beliebiges Größensystem sind. Dann verfügen wir über die  $b_k$ , die ja der einzigen Bedingung unterliegen, positiv zu sein und eine konvergente Summe zu geben, so, daß die Reihe:

$$\sum_1^{\infty} |a_k|^{\frac{q}{q-1}} \cdot |\alpha_k|^{\frac{q}{q-1}} \cdot b_k$$

konvergiert und setzen:

$$w_k = a_k \alpha_k b_k.$$

Dann gehen die mit  $\alpha_k b_k$  multiplizierten Gleichungen (73a) in (73) über und es konvergiert tatsächlich, wie dort verlangt,

$$\sum_1^{\infty} \frac{|w_k|^{\frac{q}{q-1}}}{b_k^{\frac{q}{q-1}}}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (73a) ist folglich die Existenz einer Zahl  $N$ , so daß:

$$\sum_1^n |a_k \mu_k| \leq N \left( \int_J \frac{\left| d \sum_1^n \mu_k \varphi_k \right|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

für jedes System von Konstanten  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$  ( $n$  beliebig) und wenn die Bedingung erfüllt ist, gibt es eine Lösung, für welche:

$$\left( \int \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq N.$$

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von F. Riesz<sup>1</sup> dar.

Man kann aus diesem Satze, wie es F. Riesz in einem ähnlichen Falle<sup>1</sup> getan hat, und mit denselben Mitteln folgendes Approximationstheorem gewinnen:

Sind  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \Phi$  Mengenfunktionen der Klasse  $L_p(a)$ ,  $\varepsilon$  eine positive Zahl, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Reihe von Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , für welche:

$$\int_J \frac{\left| d \left( \Phi - \sum_1^n c_k \varphi_k \right) \right|^p}{da^{p-1}} \leq \varepsilon^p$$

dadurch gegeben, daß das Gleichungssystem:

$$\int_J \frac{d\Phi d\psi}{da} = 1, \quad \int_J \frac{d\varphi_k d\psi}{da} = 0$$

keine Lösung  $\psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  besitzt, für welche:

$$\left| \int_J \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{p-1}{p}}} \right|^{\frac{p-1}{p}} < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Soll insbesondere  $\Phi$  sich durch Linearkombinationen der  $\varphi_n$  beliebig approximieren lassen, in dem Sinne, daß in obiger Ungleichung für  $\varepsilon$  ein beliebiger Wert vorgeschrieben werden kann, so ist notwendig und hinreichend, daß das letzte Gleichungssystem überhaupt keine Lösung der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$

besitzt, d. h. es muß für jede Mengenfunktion  $\psi$  dieser Klasse, für welche die Integrale:

$$\int_J \frac{d\psi d\varphi_k}{da}$$

sämtlich Null sind, auch  $\int_J \frac{d\psi d\Phi}{da}$  verschwinden.

<sup>1</sup> A. a. O. (II.), p. 53.



Wir setzen in der Bilinearform  $B(c, \psi)$ :

$$\varphi_k = \frac{\chi_k}{\alpha_k \cdot b_k^{\frac{q}{q-1}}}.$$

Die  $\chi_k$  sind dann ein beliebiges System von Funktionen aus  $L_p(a)$ , für welches die aus (72) und (72a) für  $c_k = \gamma_k \cdot b_k^{\frac{q}{q-1}}$  hervorgehenden Ungleichungen für alle  $\gamma_k$  mit konvergenter  $\Sigma |\gamma_k|^q$  und alle  $\psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  Geltung haben:

$$\left( \int_J \frac{\left| d \sum_1^{\infty} \gamma_k \chi_k \right|^p}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left( \sum_1^{\infty} |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (74)$$

$$\left( \sum_1^{\infty} \left| \int_J \frac{d\psi d\chi_k}{d a} \right|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq M \left( \int_J \frac{\left| d\psi \right|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \quad (74)$$

wobei jede dieser Ungleichungen aus der anderen folgt.

Von der ersten dieser Ungleichungen braucht man nur zu fordern, daß sie für solche Wertsysteme  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  gilt, bei denen nur eine endliche Anzahl der  $\gamma_k$  von Null verschieden ist. Sie gilt dann auch allgemein und zwar konvergiert, wie sofort erhellt:

$$\sum_1^n \gamma_k \chi_k$$

für  $n = \infty$  stark gegen seine Grenze.

Wendet man jetzt die in VII. entwickelten Sätze über die Lösbarkeit von  $B[\psi] = \Psi$  und  $\overline{B}[\varphi] = \Phi$  an, so erhält man nach den nötigen Abänderungen in der Bezeichnung die folgenden Resultate:

A) Ist  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  ein System von Konstanten mit konvergenter  $\sum_1^{\infty} |\gamma_k|^{\frac{q}{q-1}}$ , so ist das Gleichungssystem:

$$\int_J \frac{d\psi d\chi_k}{da} = \gamma_k$$

dann und nur dann durch eine Funktion  $\psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ , für welche:

$$\left( \int_J \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq N$$

lösbar, wenn für alle Konstantensysteme  $\omega_k$  mit konvergenten

$\sum_1^{\infty} |\omega_k|^q$  die Ungleichung besteht:

$$\left| \sum_1^{\infty} \omega_k \gamma_k \right| \leq N \left( \int_J \frac{\left| d \sum_1^{\infty} \omega_k \chi_k \right|^{\frac{1}{p}}}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Das ist im wesentlichen schon vorhin abgeleitet worden.

B) Ist  $\Phi$  eine Mengenfunktion der Klasse  $L_p(a)$ , so ist die Gleichung:

$$\sum_1^{\infty} \omega_k \gamma_k = \Phi$$

durch Konstante  $\omega_1 \omega_2 \dots$  mit konvergenter  $\sum_1^{\infty} |\omega_k|^q \leq N^q$  dann

und nur dann lösbar, wenn für alle  $\psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  die Ungleichung gilt: \*

$$\left| \int_J \frac{d\Phi d\psi}{da} \right| \leq N \left( \sum_1^{\infty} \left| \int_J \frac{d\chi_k d\psi}{da} \right|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}}$$

C) Soll das Gleichungssystem:

$$\int_J \frac{d\psi d\chi_k}{da} = \gamma_k$$

für alle Größenreihen  $\gamma_k$ , für welche  $\sum_1^{\infty} |\gamma_k|^{\frac{q}{q-1}}$  konvergiert, durch ein  $\phi$  aus  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  lösbar sein, für welches:

$$\left[ \int_J \frac{|d\phi|^{\frac{p}{p-1}}}{d a^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \leq N \left( \sum |\gamma_k|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}},$$

so ist dazu notwendig und ausreichend, daß für jedes Wertsystem  $\omega_1, \omega_2, \dots$  für das  $\sum |\omega_k|^q$  konvergiert, die Ungleichung gilt:

$$\left( \sum_1^{\infty} |\omega_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq N \left( \int_J \frac{\left| d \sum_1^{\infty} \omega_k \chi_k \right|^p}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tritt dieser Fall ein und weiß man außerdem, daß das Gleichungssystem:

$$\int_J \frac{d\phi d\chi_k}{d a} = 0$$

die einzige Lösung  $\phi = 0$  aus  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  gestattet, so ist auch die Gleichung:

$$\sum_1^{\infty} \omega_k \chi_k = \Phi$$

für alle  $\Phi$  aus  $L_p(a)$  eindeutig durch ein Konstantensystem  $\omega_k$  lösbar, für welches:

$$\sum_1^{\infty} |\omega_k|^q \leq N \left( \int_J \frac{|d\Phi|^p}{d a^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D) Soll für jedes  $\Phi$  aus  $L_p(a)$  die Gleichung:

$$\sum_1^{\infty} \omega_k \chi_k = \Phi$$

durch Konstante  $\omega_1, \omega_2, \dots$  derart sich befriedigen lassen, daß:

$$\left( \sum_1^{\infty} |\omega_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq N \left( \int_J \frac{|d\Phi|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

so ist notwendig und ausreichend, daß für jedes  $\psi$  der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  die Ungleichung besteht:

$$\left( \int_J \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq N \left( \sum_1^{\infty} \left| \int_J \frac{d\gamma_k d\psi}{da} \right|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}}$$

Weiß man ferner, daß eine Darstellung:

$$\sum_1^{\infty} \omega_k \gamma_k = 0$$

mit konvergenter  $\sum_1^{\infty} |\omega_k|^q$  nur dann möglich ist, wenn sämtliche  $\omega_k$  Null sind, so ist gleichzeitig das Gleichungssystem:

$$\int_J \frac{d\gamma_k d\psi}{da} = \gamma_k$$

für beliebige  $\gamma_k$  mit konvergenter  $\sum |\gamma_k|^{\frac{q}{q-1}}$  eindeutig durch ein  $\psi$  von  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  lösbar und es ist:

$$\left( \int_J \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq N \left( \sum_1^{\infty} |\gamma_k|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}}$$

In jedem der am Ende von C), beziehungsweise D) gekennzeichneten Fälle existiert eine Resolvente  $B^{-1}$  von  $B$  vom Typus  $\left\{ \begin{matrix} p & \frac{q}{q-1} \\ a & b \end{matrix} \right\}$  mit der Schranke  $N$ . Sie muß die Gestalt haben:

$$B^{-1}(\varphi, w) = \sum_1^{\infty} w_k \int_J \frac{d\psi_k d\varphi}{da},$$

wo  $\varphi$  und  $w$  irgend zwei Mengenfunktionen der Klassen  $L_p(a)$ , beziehungsweise  $L_{\frac{q}{q-1}}(b)$  und  $\psi_1, \psi_2, \dots$  eine Folge solcher der Klasse  $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$  sind. Es ist dann:

$$BB^{-1}[w] = w$$

also:

$$w_k = b_k \alpha_k \sum_1^{\infty} w_h \int_J \frac{d\varphi_k d\psi_h}{da}.$$

Setzt man:

$$w_k = 0, \quad k \neq i, \quad w_i = 1,$$

so ergibt sich:

$$0 = \int_J \frac{d\varphi_k d\psi_i}{da} \quad (i \neq k),$$

$$\frac{1}{b_k \alpha_k} = \int_J \frac{d\varphi_k d\psi_k}{da}.$$

Geht man wieder von den  $\varphi_k$  zu den  $\chi_k$ , von den  $w_k$  zu den  $\gamma_k$  über und setzt:

$$\Psi_k = \frac{\rho_k}{b_k^{\frac{1}{q}}},$$

so gilt:

$$\int_J \frac{d\chi_k d\rho_i}{da} = 0 \quad (i \neq k), \quad \int_J \frac{d\chi_k d\rho_k}{da} = 1;$$

mit anderen Worten, die  $\chi_k$  einerseits und  $\rho_k$  andererseits bilden ein Biorthogonalsystem. Es ist ferner:

$$\left( \int_J \frac{\left| d \sum_k \gamma_k \rho_k \right|^{\frac{p}{p-1}}}{da^{\frac{p-1}{p}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq N \left( \sum_k |\gamma_k|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}}$$

$$\left( \sum_1^{\infty} \left| \int \frac{d\rho_k d\varphi}{da} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq N \left( \int \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle  $\gamma_k$  mit konvergenter  $\sum |\gamma_k|^{\frac{q}{q-1}}$ , beziehungsweise alle  $\varphi$  der Klasse  $L_p(a)$ . Endlich wird die Lösung der Gleichungen:

$$\int_J \frac{d\psi d\gamma_k}{da} = \gamma_k$$

gegeben durch:

$$\Psi = \sum_1^{\infty} \gamma_k \rho_k,$$

während die Gleichung:

$$\sum_1^{\infty} w_k \gamma_k = \Phi$$

durch

$$w_k = \int_J \frac{d\Phi d\rho_k}{da}$$

befriedigt wird.

Die als klassisch zu betrachtende Illustration dieser Verhältnisse bilden die Orthogonalsysteme. Um ihre Theorie aus dem Vorhergehenden abzuleiten, wird man zunächst  $p = q = 2$  annehmen. Eine Reihe von Funktionen  $\gamma_k$  von  $L_q(a)$  heiße dann ein (normiertes) Orthogonalsystem, wenn:

$$\int_J \frac{d\gamma_i d\gamma_k}{da} = 0, \quad i \neq k, \quad \int_J \frac{d\gamma_i^2}{da} = 1.$$

Durch direkte Rechnung bestätigt man sofort, daß die erste Ungleichung (74) in der Weise erfüllt ist, daß  $M = 1$  und nur das Gleichheitszeichen gilt. Daraus folgt sofort die zweite Ungleichung, in der man die sogenannte »Bessel'sche Ungleichung« erkennt.

Die Anwendung des Satzes *A*) ergibt, daß die dort gestellte Bedingung stets erfüllt ist, und zwar für  $N = \sqrt{\sum \gamma_k^2}$  (nach der Schwarz'schen Ungleichung). Es hat somit das System:

$$\int_J \frac{d\psi d\chi_k}{da} = \gamma_k$$

stets eine Lösung, für welche:

$$\sqrt{\int_J \frac{|d\psi|^2}{da}} \leq \sqrt{\sum \gamma_k^2}$$

und diese ist offenbar:

$$\psi = \sum_1^{\infty} \gamma_k \chi_k.$$

Da  $N = \sqrt{\sum \gamma_k^2}$  sich durch keine kleinere Schranke ersetzen läßt, haben wir hierin die, wie in VII, 2. bemerkt, eindeutig bestimmte Minimallösung vor uns.

Satz *B*) ergibt, daß die Gleichung:

$$\sum_1^{\infty} c_k \chi_k = \Phi$$

durch Konstante  $c_k$  mit konvergenter Quadratsumme  $\leq N^2$  dann und nur dann lösbar ist, wenn für alle  $\psi$  aus  $L_2(a)$  gilt:

$$\left| \int_J \frac{d\Phi d\psi}{da} \right| \leq N \cdot \sqrt{\sum_1^{\infty} \left( \frac{d\chi_k d\psi}{da} \right)^2}.$$

Dazu ist jedenfalls erforderlich, daß für jedes  $\psi$ , für welches:

$$\int_J \frac{d\psi d\chi_k}{da} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

auch:

$$\int_J \frac{d\Phi d\psi}{da} = 0.$$

Das sind aber die Bedingungen des Approximationsatzes, man kann daher  $\Phi$  durch Linearkombinationen der  $\chi_k$  unbeschränkt approximieren in dem Sinne, daß bei gegebenem  $\varepsilon > 0$ :

$$\int_J \frac{d \left( \Phi - \sum_1^n c_k \chi_k \right)^2}{d a} < \varepsilon.$$

Da die beste Approximation nach bekannten Schlußweisen durch:

$$c_k = \int_J \frac{d \Phi d \chi_k}{d a}$$

geliefert wird, so erhält man das Resultat, daß unter der obigen (Approximations-) Bedingung die Entwicklung gilt:

$$\Phi = \Sigma \chi_k \cdot \int_J \frac{d \Phi d \chi_k}{d a},$$

weil eben:

$$\lim_{n=\infty} \int_J \frac{d \left( \Phi - \sum_1^n c_k \chi_k \right)^2}{d a} = 0.$$

Satz C) ergibt, da die dort geforderte Ungleichung für  $N=1$  stets erfüllt ist, das Resultat, daß die Gleichungen:

$$\int_J \frac{d \psi d \chi_k}{d a} = \gamma_k$$

bei gegebenen  $\gamma_k$  mit konvergenter Quadratsumme stets lösbar sind. Da für die auf der Hand liegende Lösung:

$$\psi = \Sigma \gamma_k \chi_k$$

das Integral:

$$\int_J \frac{(d \psi)^2}{d a}$$

den Wert  $\Sigma \gamma_k^2$  erhält, so ist  $\psi$  die eindeutig bestimmte Lösung, für welches dieses Integral am kleinsten ist.



Ist außerdem sicher, daß die Gleichungen:

$$\int_J \frac{d\psi \, d\chi_k}{da} = 0$$

die einzige Lösung  $\psi = 0$  von  $L_2(a)$  haben, so ist auch die Gleichung:

$$\sum_1^{\infty} c_k \chi_k = \Phi$$

für jedes  $\Phi$  lösbar. Dann heie das Orthogonalsystem  $\chi_k$  vollständig. Satz D) ergibt noch für die Vollständigkeit eines Orthogonalsystems das Kriterium, daß für jedes  $\psi$  aus  $L_2(a)$  die Gleichung gelten muß:

$$\int_J \frac{d\psi^2}{da} = \sum_1^{\infty} \left( \int_J \frac{d\psi \cdot d\chi_k}{da} \right)^2.$$

Denn es ergibt sich zuerst, daß die dort auftretende Konstante  $N$  gleich Eins gesetzt werden darf und die Ungleichung ist dadurch von vornherein ausgeschlossen.

Ersetzt man die auftretenden Integralprozesse durch die in II. eingeführten Stieltjes'schen Integrale (nach 1.), so gelangt man zur unmittelbaren Verallgemeinerung der bekannten Sätze über orthogonale Funktionensysteme.

Nimmt man schließlich in den Entwicklungen dieser Nummer die Basis  $a$  auch vom Typus III an, so erhält man offenbar parallele Resultate für lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Variablen.

3. Wir behandeln noch einen ganz speziellen Fall der in VII., 6. besprochenen Fredholmoperation. Es handle sich um den eindimensionalen Fall; als Grundintervall nehmen wir  $0 \leq x < 1$  und die Basis  $a(E)$  sei mit dem Lebesgue'schen Inhaltsmaß  $m(E)$  identisch. Die betrachteten Integraloperationen reduzieren sich dann nach 1. auf gewöhnliche Lebesgue'sche Integrale. Jeder Mengenfunktion  $\varphi$  von  $L_p(m)$  entspricht dann eine Funktion  $\Phi(x)$ , so daß:

$$\varphi(E) = \int_E \Phi(x) dx, \quad \int_E \frac{|d\varphi|^p}{dm^{p-1}} = \int_E |\Phi|^p dx$$

und Analoges gilt von den Mengenfunktionen  $\psi$  aus  $L_{\frac{p}{p-1}}(m)$ .  
Wir führen jetzt eine Bilinearoperation ein:

$$B(\varphi, \psi) = \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) \Phi(x) \Psi(y) dx dy.$$

Über die Funktion  $F$  machen wir folgende Annahmen:

Es sei  $F(x, y)$  meßbar [natürlich bezüglich des zweidimensionalen Inhaltes  $m(E)$ ] im Integrationsbereich  $Q(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  und es sei:

$$|F(x, y)| < f(y-x),$$

wo  $f(t)$  eine zwischen  $-1$  und  $+1$  summierbare, positive Funktion bedeutet.

Zunächst müssen wir zeigen:

Wenn  $\int_0^1 |\Phi|^p dx$  und  $\int_0^1 |\Psi|^{\frac{p}{p-1}} dx$  beide existieren, so ist  $F(x, y) \Phi(x) \Psi(y)$  summierbar in  $Q$ .

Es sei zunächst  $E_n$  die Menge jener Punkte von  $Q$ , wo  $f(y-x) \leq n$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} \iint_{E_n} |F(x, y)| \cdot |\Phi(x)| \cdot |\Psi(y)| dx dy &\leq \\ &\leq \iint_{E_n} f(x-y) \cdot |\Phi(x)| \cdot |\Psi(y)| dx dy. \end{aligned}$$

Setzt man ferner:

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &= F(x, y), & \text{wenn } f(y-x) \leq n, \\ F_n(x, y) &= 0, & \text{wenn } f(y-x) > n, \end{aligned}$$

so konvergiert  $|F_n|$  für  $n = \infty$  monoton wachsend gegen  $|F|$  und man kann die letzte Ungleichung schreiben:

$$\iint_Q |F_n(x, y)| \cdot |\Phi(x)| \cdot |\Psi(y)| \cdot dx dy \leq \\ \leq \iint_{E_n} f(x-y) \cdot |\Phi(x)| \cdot |\Psi(y)| dx dy.$$

In dem zweiten Doppelintegral führen wir die Variablen ein:

$$s = \frac{y+x}{2}, \quad t = \frac{y-x}{2}$$

und bezeichnen den  $E_n$  entsprechenden Integrationsbereich in  $(s, t)$  mit  $E'_n$ . Dann wird:

$$\iint_Q |F_n(x, y)| \cdot |\Phi(x)| \cdot |\Psi(y)| dx dy \leq \\ \leq 2 \iint_{E'_n} f(2t) |\Phi(s-t)| \cdot |\Psi(s+t)| ds dt.$$

$E'_n$  ist völlig enthalten im Bereiche:

$$t \text{ in } K_n, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

wenn mit  $K_n$  die Menge jener Werte von  $t$  bezeichnet wird, für welche  $f(2t) \leq n$ . Definiert man ferner den Wert von  $\Phi(x)$  und  $\Psi(y)$  außerhalb  $(0, 1)$  als Null, so ergibt sich weiter:

$$\iint_Q |F_n(x, y)| \cdot |\Phi(x)| \cdot |\Psi(y)| dx dy \leq \\ \leq 2 \int_{K_n} \int_0^1 f(2t) |\Phi(s-t)| \cdot |\Psi(s+t)| dt ds.$$

Nach den Resultaten von Lebesgue<sup>1</sup> über mehrfache Integrale begegnet es keiner Schwierigkeit, in dem letzten Doppelintegral die Integration sukzessive zu vollziehen. Dann wird aber:

$$\int_0^1 |\Phi(s-t)| \cdot |\Psi(s+t)| ds \leq \left( \int_0^1 |\Phi|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\Psi|^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

<sup>1</sup> A. a. O., p. 426 ff.

wie man unter Zuhilfenahme der Ergebnisse von 1. leicht ein-  
sieht. Also folgt die Ungleichung:

$$\begin{aligned} \iint_Q |F_n(x, y)| \cdot |\Phi(x)| \cdot |\Psi(y)| dx dy &\leq \\ &\leq 2 \left( \int_0^1 |\Phi|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |\Psi|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \int_{K_n} f(2t) dt. \end{aligned}$$

Läßt man hierin  $n$  ins Unendliche wachsen, so folgt unter  
Anwendung des Satzes IV von II. die Summabilität von  $F \cdot \Phi \cdot \Psi$   
und die Ungleichung:

$$\begin{aligned} |B(\varphi, \psi)| &= \left| \iint_Q F(x, y) \Phi(x) \Psi(y) dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_{-1}^{+1} f(t) dt \cdot \left( \int_0^1 \frac{|d\varphi|^p}{dm^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{dm^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

$B$  ist daher eine beschränkte Bilinearoperation von nor-  
malelem Typus (VI., 5).

Es soll weiter gezeigt werden:  $B$  ist vollstetig, Wir be-  
merken vorher, daß dazu der Nachweis genügt, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\varphi_n, \psi_n) = 0,$$

wenn  $\varphi_n$  bezüglich  $L_p$  und  $\psi_n$  bezüglich  $L_{\frac{p}{p-1}}$  gegen Null kon-  
vergieren. Es seien also  $\varphi_n$  und  $\psi_n$ , wie verlangt, beschaffen;  
dann existiert (vgl. p. 67) eine Zahl  $K$ , so daß:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \frac{|d\varphi_k|^p}{dm^{p-1}} &= \int_0^1 |\Phi_k|^p dx \leq K^p, \\ \int_0^1 \frac{|d\psi_k|^{\frac{p}{p-1}}}{dm^{\frac{1}{p-1}}} &= \int_0^1 |\Psi_k|^{\frac{p}{p-1}} dx \leq K^{\frac{p}{p-1}} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots$$

Es sei wie oben  $E_n$  die Menge der Punkte von  $Q$ , wo  $f(x-y) \leq n$ . Dann setzen wir:

$$B(\varphi, \psi) = B_1(\varphi, \psi) + B_2(\varphi, \psi),$$

$$B_1(\varphi, \psi) = \iint_{E_n} F(x, y) \Phi(x) \Psi(y) dx dy,$$

$$B_2(\varphi, \psi) = \iint_{Q-E_n} F(x, y) \Phi(x) \Psi(y) dx dy.$$

Für  $B_2$  folgt aus der vorigen Untersuchung:

$$|B_2(\varphi, \psi)| \leq \left( \int \frac{|d\varphi|^p}{dm^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int \frac{|d\psi|^{\frac{p}{p-1}}}{dm^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \int_{J_n} f(t) dt,$$

wenn  $J_n$  die Menge aller Werte von  $t$  ist, wo  $f(t) > n$ .

Wir wählen nun  $n$  so groß, daß:

$$\int_{J_n} f(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{K^2},$$

also  $|B_2(\varphi_k, \psi_k)| \leq \varepsilon$  für alle  $k$ .

Es sei jetzt  $q$  die kleinere der Zahlen  $p$  und  $\frac{p}{p-1}$ ; dann ist  $1 < q \leq 2$  und aus (23) kann man schließen:

$$\int_0^1 |\Phi_n(x)|^q |\Psi_n(y)|^q dx dy = \int_0^1 \frac{|d\varphi|^q}{dm^{q-1}} \cdot \int_0^1 \frac{|d\psi|^q}{dm^{q-1}} \leq K^{2q}.$$

Bezeichnet nun  $\omega(E)$  irgend eine Mengenfunktion der Klasse  $L_q(m)$ , wo jetzt  $m$  den zweidimensionalen Inhalt bedeutet, so daß also:

$$\omega(E) = \int_E W(x, y) dx dy,$$

wo  $\int_Q |W|^q dx dy$  existiert, so stellt:

$$\mathfrak{L}(\omega) = \int_{E_n} F(x, y) W(x, y) dx dy = \int_Q F_n(x, y) W(x, y) dx dy$$

offenbar eine beschränkte Linearoperation des Typus  $\left\{ \begin{matrix} q \\ m \end{matrix} \right\}$  dar, da ja — weil  $F_n$  beschränkt ist —  $F_n$  zur Klasse  $L_{\frac{q}{q-1}}(m)$  gehört.

Als Linearoperation ist  $\mathfrak{L}(\omega)$  vollstetig (vgl. p. 79); d. h. falls  $\omega_n$  bezüglich  $L_q(m)$  gegen Null konvergiert, so konvergiert  $\mathfrak{L}(\omega)$  selbst gegen Null. Wir setzen nun:

$$\omega_n(E) = \int_E \Phi(x) \Psi(y) dx dy.$$

$\omega_n(E)$  gehört zur Klasse  $L_q(m)$  und es ist nach dem Obigen:

$$\int_Q \frac{|d\omega_n|^q}{dm^{q-1}} \leq K^{2q}.$$

Es ist ferner für jedes Intervall  $\alpha = \left[ \begin{matrix} c & d \\ a & b \end{matrix} \right]$ :

$$\omega_n(\alpha) = \int_a^c \Phi_n(x) dx \cdot \int_b^d \Phi_n(y) dy$$

und daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(\alpha) = 0.$$

Es sei  $E$  eine meßbare Menge in  $Q$ . Dann kann man sie in eine abzählbare Menge disjunkter Intervalle  $\alpha_k$  so einschließen, daß für ein gegebenes  $\eta > 0$ :

$$\Sigma m(\alpha_k) - m(E) < \eta.$$

Nach (24a) folgt dann:

$$\left| \sum_1^{\infty} \omega_n(\alpha_k) - \omega_n(E) \right| < K \cdot \eta^{\frac{q-1}{q}}$$

Die Reihe:

$$\sum_1^{\infty} \omega_n(\alpha_k)$$

konvergiert ferner gleichmäßig für alle  $n$ , weil [wieder wegen (24a)]:

$$\left| \sum_{N+1}^{\infty} \omega_n(\alpha_k) \right| < K \left[ \sum_{N+1}^{\infty} m(\alpha_k) \right]^{\frac{q-1}{q}}$$

Daraus erkennt man leicht, da ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(\alpha_k) = 0$ :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\omega_n(E)| < K \eta^{\frac{q-1}{q}},$$

also schließlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(E) = 0.$$

Daher konvergieren die  $\omega_n$  bezüglich  $L_q(m)$  gegen Null und es folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(\omega_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} F(x, y) \Phi_n(x) \Psi_n(y) dx dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} B_1(\varphi_n, \psi_n) = 0. \end{aligned}$$

Da aber  $|B_2(\varphi_n, \psi_n)| < \varepsilon$  war, wo  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden konnte, so folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\varphi_n, \psi_n) = 0,$$

d. h.  $B$  ist vollstetig, w. z. b. w.

Daher ist auf  $U(\varphi, \psi) + B(\varphi, \psi)$  die in VII., 6. entwickelte Theorie anwendbar und ergibt, daß für die Integralgleichung:

$$\Psi(x) + \int_0^1 F(x, y) \Psi(y) dy = f(x)$$

die Fredholm'schen Sätze gelten, wenn man  $\Psi(x)$  als Lösung betrachtet, sobald beide Seiten nur auf einer Menge vom Inhalt Null verschieden sind (vgl. F. Riesz, [I], p. 454).

Hat ferner  $F$  die weitere Eigenschaft, daß:

$$\int_0^1 F(x, y) \Psi(y) dy$$

für jedes  $|\Psi|$  mit summierbarer  $\frac{p}{p-1}$ ter Potenz eine stetige Funktion von  $x$  darstellt, so kann man, falls  $f$  stetig ist, auch die Lösung  $\Psi$  als stetig voraussetzen (vgl. F. Riesz, [I], p. 486).

Auf einen hierhergehörigen, sehr speziellen Fall hat Hilbert<sup>1</sup> aufmerksam gemacht; seine Behauptung läßt sich mit den zuletzt erlangten Resultaten sofort rechtfertigen.

---

<sup>1</sup> Gött. Nachr., 1906, p. 472.