Узбекский математический журнал, 1993, № 1

SEPARETELY SUBHARMONIC FUNCTIONS

Urban Cegrell, A. Sadullaev

(Summary)

In the present paper new propositions in the theory of separately subharmonic functions are given.

УДК 517.98

А. А. СЕДАЕВ, Ф. А. СУКОЧЕВ, В. И. ЧИЛИН

СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Мақолада Λ_φ Лоренц фазоларидаги қисм тўпламларнинг нисбий $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$ компактлилиги учун мезонлар олинган, бу ерда E — Λ'_φ -нинг φ'-ни ўз ичига олувчи симметрик қисм фазоси.

Пусть E — банахово идеальное пространство (сокращенно БИП) измеримых функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с непрерывной σ-конечной мерой, E' — ассоциированное пространство для E. Хорошо известен следующий общий критерий слабой компактности множеств из E' [1]: подмножество $H \subset E'$ относительно $\sigma(E', E)$ компактно тогда и только тогда, когда $\int\limits_{Q_n} xy d\mu \to 0$ равномерно по $y \in H$ для любых $x \in E$ и $Q_n \in \Sigma$, $Q_{n+1} \subset Q_n$, $n = 1, 2, \ldots$, с $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n\right) = 0$ (такую последовательность множеств Q_n будем называть системой стягивающихся множеств).

В случае, когда $E = L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, $E' = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, имеется более удобный критерий Данфорда — Петтиса (см., например [2]): множество $H \subset L_1$ относительно $\sigma(L_1, L_\infty)$ компактно тогда и только тогда, когда $\|y\chi_{Q_n}\|_{L_1} \to 0$ равномерно по $y \in H$ для любой системы стягивающихся множеств $\{Q_n\}$, где χ_Q — характеристическая функция множества $Q \in \Sigma$.

Цель настоящей работы — получение аналогичных критериев $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$-компактности для подмножеств из пространства Лоренца Λ_φ в случае, когда E — произвольный замкнутый идеал в Λ'_φ, содержащий φ' (предполагается, что $\Omega = [0, l)$, $l \leq \infty$, Σ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств на $[0, l)$ и μ — мера Лебега на Σ). Эти критерии и соответствующие связи между пространствами Лоренца и общими симметричными пространствами [3] позволяют установить новые полезные свойства слабо компактных множеств в симметричных пространствах. Используются терминология и обозначения теории симметрических пространств из [3] и теории БИП из [1], [4].

Пусть $\Omega = [0, l)$, $l \leq \infty$, m — мера Лебега на Ω. БИП $(E, \|\cdot\|_E)$ на (Ω, m) называется симметричным пространством, если из $x^* = y^*$, $y \in E$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$, где x^* обозначает невозрастающую непрерывную справа перестановку модуля измеримой функции, т. е. $x^*(t) = \inf\{s \geq 0 : m(\{|x| > s\}) \leq t\}$, $t > 0$.

Для любого симметричного пространства E справедливы непрерывные вложения $L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty$ [3]. Через E' будем обозначать симметричное пространство, ассоциированное с E. Известно, что $E' \subset E^*$ и $E' = E^*$ тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|_E$ порядково непрерывна, т. е. из $x_n \in E$, $x_n \downarrow 0$ вытекает, что $\|x_n\|_E \to 0$ [3, 4] (в нашем случае, порядковая непрерывность нормы $\|\cdot\|_E$ равносильна сепарабельности пространства $(E, \|\cdot\|_E)$. На $L_1 + L_\infty$ будем рассматривать частичный порядок, порожденный K-функционалом Ж. Питре:

$$x \prec y \Leftrightarrow \int_0^t x^*(s)\,ds \leqslant \int_0^t y^*(s)\,ds \text{ для всех } t > 0.$$

Напомним, что если $(E, \|\cdot\|_E)$ — интерполяционное пространство пары (L_1, L_∞) с интерполяционной константой единица, то неравенство $x \prec y$, $y \in E$ влечет $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. Для каждого симметричного пространства E определяется фундаментальная функция $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0, t)}\|_E$, $t > 0$. Если пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ сепарабельно, то $\varphi_E(+0) = 0$ и $\varphi_E(\infty) = \infty$ (в случае, когда $l = \infty$).

Пусть Φ — множество всех вогнутых непрерывных неубывающих функций φ на $[0, l)$, для которых $\varphi(0) = 0$. Для каждого $\varphi \in \Phi$ рассмотрим симметричное пространство Лоренца [3]:

$$\Lambda_\varphi = \left\{ x \in L_1 + L_\infty : \|x\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^l x^*(s)\,\varphi'(s)\,ds < \infty \right\}.$$

Если $E = \Lambda_\varphi$, то $\varphi_E = \varphi$ и условия $\varphi(+0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ достаточны для сепарабельности E [3]. Ассоциированным к Λ_φ пространством является пространство Марцинкевича [3]:

$$M_\varphi = \left\{ x \in L_1 + L_\infty : \|x\|_{M_\varphi} = \sup_{0 < t < l} \frac{\int_0^t x^*(s)\,ds}{\varphi(t)} < \infty \right\}.$$

Очевидно, что $\varphi' \in M_\varphi$. Пространства Λ_φ и M_φ являются интерполяционными для пары (L_1, L_∞) с интерполяционной константой единица [3]. Нами неоднократно будет использоваться следующее свойство пространства Λ_φ: для любого $x \in \Lambda_\varphi$ существует такое $y \in M_\varphi$ с $\operatorname{supp} y \subset \operatorname{supp} x$, что

$$|y| \sim \varphi' \chi_{[0, m(\operatorname{supp} x)}) \quad \text{и} \quad \|x^*\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^l xy\,dm$$

(запись $y \sim z$ означает, что измеримые функции $|y|$ и $|z|$ равноизмеримы, т. е. $m\{|y| > s\} = m\{|z| > s\}$ для всех s или $y^* = z^*$).

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \Phi$ и E — замкнутый симметричный идеал в M_φ, содержащий φ'. Тогда:

1. Если $l < \infty$ или $l = \infty$ и $\varphi(\infty) < \infty$, то множество $H \subset \Lambda_\varphi$ — относительно $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$-компактно тогда и только тогда, когда

$$\left\| x \chi_{Q_n} \right\|_{\Lambda_\varphi} \to 0 \text{ равномерно по } x \in H$$

$m\{|y| > s\}$

для любой последовательности $Q_n \in \Sigma$ с $m(Q_n) \to 0$. (1)

2. Если $l = \infty$ $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} > 0$, то $H \subset \Lambda_\varphi$ — относительно $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$ — компактно тогда и только тогда, когда

$$\left\| x\chi_{Q_n} \right\|_{\Lambda_\varphi} \to 0 \text{ равномерно по } x \in H$$

для любой системы стягивающихся множеств $\{Q_n\}$. (2)

3. Если $l < \infty$ или $l = \infty$, $\varphi(\infty) = \infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$, то $H \subset \Lambda_\varphi$ относительно $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\left\| x^*\chi_{Q_n} \right\|_{\Lambda_\varphi} \to 0 \text{ равномерно по } x \in H$$

для любой системы стягивающихся множеств $\{Q_n\}$. (3)

Замечания 1. Свойство (1) равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\| x^*\chi_{[0,\delta)} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon$ для всех $x \in H$.

2. Если $l = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} > 0$ и $H = \{\chi_{[n, n+1)}\}_{n=1}^{\infty}$, то для H выполнено свойство (3), но не выполнено (2) при $Q_n = [n, \infty)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Из сделанных замечаний и теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 1 во всех случаях, кроме $l = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} > 0$, множество $H \subset \Lambda_\varphi$ относительно $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$ компактно тогда и только тогда, когда таковым является множество $H^* = \{x^* : x \in H\}$. В случае $l = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} > 0$ это условие является необходимым, но не достаточным.

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы и одно предложение.

Лемма 1. Пусть $x \in \Lambda_\varphi$, $e \subsetneq \operatorname{supp} x$, $me < \infty$. Тогда найдется такое $y \in M_\varphi$, что $\operatorname{supp} y = \operatorname{supp} x \setminus e$, $y \sim \varphi'\chi_{[me,\, m(\operatorname{supp} x)]}$ и $\int\limits_0^l xy\,dm \geqslant \|x\|_{\Lambda_\varphi} - \|x^*\chi_{[0,\, me]}\|_{\Lambda_\varphi}$.

Доказательство. Пусть $\psi(t) = \varphi(t + me) - \varphi(me)$, $0 \leqslant t < m(\operatorname{supp} x \setminus e)$. Тогда $\psi' \sim \varphi'\chi_{[me,\, m(\operatorname{supp} x)]}$ и в силу соотношения $x^*\chi_{[me,\, m(\operatorname{supp} x)]} \prec x\chi_{(\operatorname{supp} x)\setminus e} = z$ имеем

$$\|x\|_{\Lambda_\varphi} = \|x^*\chi_{[0,\, me]}\|_{\Lambda_\varphi} + \|x^*\chi_{[me,\, m(\operatorname{supp} x)]}\|_{\Lambda_\varphi} \leqslant \|x^*\chi_{[0,\, me]}\|_{\Lambda_\varphi} + \|z^*\|_{\Lambda_\psi},$$

т. е.

$$\|z^*\|_{\Lambda_\psi} \geqslant \|x\|_{\Lambda_\varphi} - \|x^*\chi_{[0,\, me]}\|_{\Lambda_\varphi}.$$

Искомым y является функция из M_ψ, для которой $|y| \sim \psi'$,

$$\operatorname{supp} y = \operatorname{supp} z \quad \text{и} \quad \|z^*\|_{\Lambda_\psi} = \int\limits^{l} zy\,dm.$$

Лемма 2. Если для последовательности $\{x_n\}$ из нормированного идеального пространства F найдутся $\alpha>0$ и последовательность дизъюнктных элементов $y_n \in E \subset F'$, $\operatorname{supp} y_n = A_n$, $n=1, 2, \ldots$, такие, что

$i)$ сумма $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ принадлежит E;

$ii)$ $\int\limits_0^l x_n y_n dm > 3\alpha$;

$iii)$ для $z_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i \to \left|\int\limits_0^l x_n z_n dm\right| < \alpha$, $n=2, 3, \ldots$;

$iv)$ $\| x_n \chi_{B_n} \|_F < \frac{\alpha}{\| y \|_{F'}}$, где $B_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k$,

тогда $x_n \not\to 0$ в топологии $\sigma(F, E)$.

Доказательство. Для $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} y_k$ имеем $\| y \|_{F'} \geqslant \| u_n \|_{F'}$ и

$$\left|\int\limits_0^l x_n y dm\right| \geqslant \int\limits_0^l x_n y_n dm - \left|\int\limits_0^l x_n z_n dm\right| - \left|\int\limits_0^l x_n u_n dm\right| >$$
$$> 3\alpha - \alpha - \| u_n \|_{F'} \| x_n \chi_{B_n} \|_F > \alpha.$$

Предложение 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. $x_n \in \Lambda_\varphi$ и $\{x_n\} - \sigma(\Lambda_\varphi, E)$ — сходится к нулю. Тогда:

1. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\| x_n \chi_e \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon$, $n=1,2,\ldots$ ..., если только $me < \delta$.

2. Если $l=\infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} > 0$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $A \in \sum$ с $m(A) < \infty$, что $\| x_n \chi_{cA} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon$ для всех $n=1, 2, \ldots$, где $cA = \Omega \setminus A$;

3. Если $l=\infty$ и $\varphi(\infty)=\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $r>0$, такое, что $\| x_n^* \chi_{(r,\infty)} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon$ для всех $n=1, 2, \ldots$.

Доказательство. 1. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{supp} x_n = \Omega$, $n=1, 2, \ldots$. Предположим, что существует $\alpha>0$, последовательность множеств e_n с $me_n < 2^{-n}$, $n=1, 2, \ldots$, и подпоследовательность $\{a_n\} \subset \{x_n\}$, такие, что $\| a_n \chi_{e_n} \|_{\Lambda_\varphi} > 4\alpha$. Положим $p_n = \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} e_i$. Ясно, что

$$p_{n+1} \subset p_n, \ m(p_n) \to 0 \text{ и } \| a_n \chi_{p_n} \|_{\Lambda_\varphi} > 4\alpha.$$

Теперь с помощью индуктивного процесса построим подпоследовательность $\{a_{n_i}\}$, удовлетворяющую условиям леммы 2, что будет противоречить слабой сходимости $\{x_n\}$ к нулю. Пусть $n_1=1$ и пусть уже построены a_{n_j}, y_j, z_j так что $y_j^* \sim \varphi' \chi_{[mp_{s_j}, mp_{n_j}]}$, $s_j < n_j$, причем $\operatorname{supp} y_j = p_{n_j} \setminus p_{s_j} = A_j$ и $z_j = \sum\limits_{s=1}^{j-1} y_s$, $j=1, 2, \ldots, i-1$. В силу слабой сходимости x_n к нулю найдется такое $n_i > s_{i-1}$, что $\left|\int_0^l a_{n_i} z_i\,dm\right| < \alpha$. Затем выбираем $s_i > n_i$ так, чтобы $\|a^*_{n_i}\chi_{[0, md_{s_i}]}\|_{\Lambda_\varphi} < \alpha$. Тогда по лемме 1 существует такой y_i, что

$$\operatorname{supp} y_i = p_{n_i} \setminus p_{s_i},\quad |y| \sim \varphi'\chi_{[mp_{s_i},\, mp_{n_i}]}$$

и

$$\int_0^l a_{n_i} y_i \geqslant \|a_{n_i}\chi_{p_{n_i}}\|_{\Lambda_\varphi} - \|a^*_{n_i}\chi_{[0,\, mp_{s_i}]}\|_{\Lambda_\varphi} > 3\alpha.$$

Ясно, что

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i < \sum_{i=1}^{\infty} \varphi'\chi_{[mp_{n_{i+1}},\, mp_{n_i}]} = \varphi'\chi_{[0,\, mp_1]} \in E.$$

Выполнение остальных условий леммы 2 очевидно.

2. Предположим, что для некоторого $\varepsilon>0$ найдется возрастающая последовательность множеств A_n, $mA_n < \infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, l)$, и подпоследовательность $\{a_n\} \subset \{x_n\}$, такие, что $\|a_n\chi_{Q_n}\|_{\Lambda_\varphi} > 5\varepsilon$, где $Q_n = cA_n$. Из условия $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t} > c > 0$ следует, что $\varphi'(t) > c$ и потому $\chi_{[0,l)} \in E$. Кроме того, в силу п. 1 существует такое $\delta > 0$, что $\|x^*_n\chi_{[0,\delta)}\|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\alpha = \min(\varepsilon, \varepsilon/\varphi'(\delta))$, $n_1 = 1$ и для $j = 1, \ldots, i-1$ уже построены a_{n_j}, $y_j = \operatorname{sign} a_{n_j}\chi_{A_j}$, где $A_j = Q_{n_j} \setminus Q_{s_j}$, $n_j < s_j$. В силу слабой сходимости x_n к нулю можно выбрать так $n_i > s_{i-1}$, что $\left|\int_0^l a_{n_i} z_i\,dm\right| < \alpha$, где $z_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j$. Затем подберем $s_i > n_i$ так, чтобы $\|a_{n_i}\chi_{Q_{s_i}}\|_{\Lambda_\varphi} < \alpha/\|\chi_{[0,l)}\|_{M_\varphi}$, и положим $y_i = \operatorname{sign} a_{n_i}\chi_{A_i}$. Из построения α, $\{a_{n_i}\}$, $\{y_i\}$ следует, что выполняются условия леммы 2 и потому $a_{n_i} \not\to 0$ в топологии $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$.

3. Так как x_n слабо сходится к нулю, то $\sup\|x_n\|_{\Lambda_\varphi} = c < \infty$ и потому

$$x^*_n(t) \leqslant \|x_n\|_{\Lambda_\varphi}/\varphi(t) \leqslant c/\varphi(t),\quad n = 1, 2, \ldots,\quad t > 0. \tag{4}$$

Предположим теперь, что существуют $\alpha>0$, последовательность $r_n \uparrow \infty$ и подпоследовательность $\{a_n\} \subsetneq \{x_n\}$, такие, что $\|a^*_n\chi_{[r_n,\infty)}\|_{\Lambda_\varphi} > 6\alpha$. Используя порядковую непрерывность нормы в Λ_φ, выберем $q_n > 0$ так, чтобы $\|a^*_n\chi_{[r_n,\, q_n+r_n]}\|_{\Lambda_\varphi} > 5\alpha$. Выберем измеримые множества

$\omega_n \subset e_n \subset [0, l]$, для которых $|a_n \chi_{\omega_n}| \sim a_n^* \chi_{[r_n, r_n+q_n]}$, а $|a_n \chi_{e_n}| \sim$ $\sim a_n^* \chi_{[0, q_n+r_n]}$. Пусть $n_1 = 1$ и для $j = 1, \ldots, i-1$ уже построены a_{n_j}, $y_j = u_j \chi_{A_j}$, где $u_j \sim \varphi' \chi_{[q_{n_{j-1}}, q_{n_j}]}$, $q_{n_0} = 0$, а $A_j = \omega_{n_j} \setminus \bigcup_{s=1}^{j-1} e_{n_s}$. Для $z_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j$ выберем n_i так, чтобы $\left| \int_0^l a_{n_i} z_i dm \right| < \alpha$, $r_{n_i} > q_{n_{i-1}}$ и

$$c\varphi(q_{n_{i-1}})/\varphi(r_{n_i}) < \alpha,$$
$$c\varphi'(q_{n_{i-1}})\, m\left(\bigcup_{s=1}^{i-1} e_{n_s}\right)/\varphi(r_{n_i}) < \alpha. \tag{5}$$

Имеем

$$5\alpha \leqslant \left\| a_{n_i}^* \chi_{[r_{n_i}, q_{n_i}+r_{n_i}]} \right\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^{q_{n_{i-1}}} a_{n_i}^* \left(t + r_{n_i}\right) \varphi'(t)\, dt +$$
$$+ \int_{q_{n_{i-1}}}^{q_{n_i}} a_{n_i}^* \left(t + r_{n_i}\right) \varphi'(t)\, dt \leqslant a_{n_i}^* \left(r_{n_i}\right) \varphi\left(q_{n_{i-1}}\right) +$$
$$+ \left\| a_{n_i}^* \chi_{[q_{n_{i-1}}+r_{n_i}, q_{n_i}+r_{n_i}]} \right\|_{\Lambda_\psi},$$

где $\psi' \sim \varphi' \chi_{[q_{n_{i-1}}, q_{n_i}]}$. Отсюда и из (4), (5) получаем, что

$$\left\| a_{n_i}^* \chi_{[q_{n_{i-1}}+r_{n_i}, q_{n_i}+r_{n_i}]} \right\|_{\Lambda_\psi} \geqslant 4\alpha.$$

Выберем теперь u_i так, чтобы $|u_i| \sim \varphi' \chi_{[q_{n_{i-1}}, q_{n_i}]}$, $\operatorname{supp} u \subset \omega_{n_i}$ и $\int_{\omega_{n_i}} a_{n_i} u_i dm \geqslant 4\alpha$. Положим $A_i = \omega_{n_i} \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} e_{n_s}$ и $y_i = u\, \chi_{A_i}$. Непосредственная проверка показывает, что α, $\{a_{n_i}\}$, $\{y_i\}$ удовлетворяют требованиям леммы 2 и потому $a_{n_i} \not\to 0$ в топологии $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$, что не так.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $H \subset \Lambda_\varphi$ относительно $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$ — компактное множество. Поскольку E содержит счетное множество, тотальное на Λ_φ, то топология $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$ метризуема на H [4, лемма V. 7.1] и потому H относительно секвенциально $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$ — компактно. Следовательно, если условие (1) не выполнено, то можно найти такие $\{x_n\} \subset H$, $\varepsilon > 0$, последовательность множеств $\{Q_n\}$ с $m(Q_n) \to 0$, что $\|x_n \chi_{Q_n}\|_{\Lambda_\varphi} > \varepsilon$, при этом $x_n - \sigma(\Lambda_\varphi, E)$ сходится к некоторому $x \in \Lambda_\varphi$. Поскольку $\left\| x\chi_{Q_n} \right\|_{\Lambda_\varphi} < \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно больших n, то в силу предложения 1 п. 1 получим, что $\left\| x_n \chi_{Q_n} \right\|_{\Lambda_\varphi} \leqslant$

$\leqslant \| (x_n - x) \chi_{Q_n} \|_{\Lambda_\varphi} + \| x \chi_{Q_n} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon$ при достаточно больших n, что противоречит выбору x_n, Q_n, ε. Поэтому условие (1) выполнено. Предположим теперь, что выполнено условие (1). Пусть $y \in M_\varphi$. Поскольку $\varphi(\infty) < \infty$, то $\int\limits_0^\infty y^*(t)\, dt < \infty$ и $\lim\limits_{t \to \infty} y^*(t) = 0$. Кроме того, $y < c\varphi'$, где $c = \| y \|_{M_\varphi}$. По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\| x^* \chi_{[0, \delta]} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon / c$ для всех $x \in H$. Для произвольной системы стягивающихся множеств $\{Q_n\}$ имеем $(y \chi_{Q_n})^* \downarrow 0$, $(y \chi_{Q_n})^* < y^* \in L_1$, и потому $\int\limits_0^\infty (y \chi_{Q_n})^* dt \downarrow 0$, откуда $(y \chi_{Q_n})^* < c\, \varphi' \chi_{[0, \delta]}$, начиная с некоторого номера n_0.

Таким образом,

$$\left| \int\limits_{Q_n} xy\, dm \right| \leqslant \int\limits_0^\infty x^* (y \chi_{Q_n})^* dt \leqslant \int\limits_0^\infty x^* c \varphi' \chi_{[0, \delta]}\, dt =$$

$$= c \| x^* \chi_{[0, \delta]} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0$, т. е. выполняется достаточное условие из общего критерия компактности [1], что влечет относительную $\sigma(\Lambda_\varphi, M_\varphi)$-компактность множества H.

Пункты 2 и 3 теоремы 1 доказываются аналогично.

Замечания 3. В [5] показано, что в случае, когда $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} = 1$, пространство M_φ содержит замкнутые симметричные идеалы, содержащие φ' и не совпадающие с M_φ.

4. Из утверждения теоремы 1 вытекает, что относительная $\sigma(\Lambda_\varphi, M_\varphi)$-компактность множества $H \subset \Lambda_\varphi$ совпадает с относительной $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$-компактностью H для любого замкнутого симметричного идеала E в M_φ, содержащего φ'.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, $l < \infty$ или $l = \infty$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\varphi(t)}{t} > 0$, x_n, $x \in \Lambda_\varphi$, $x_n \xrightarrow{\sigma(\Lambda_\varphi, E)} x$ и $x_n \to x$ по мере на множествах конечной меры. Тогда $\| x_n - x \|_{\Lambda_\varphi} \to 0$.

Доказательство. По заданному $\varepsilon > 0$, используя предложение 1, найдем $\delta > 0$ и $A \in \sum$, $m(A) < \infty$ так, чтобы $\| x_n \chi_{cA} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon/5$, $\| x \chi_{cA} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon/5$, $\| x_n \chi_e \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon/5$, $\| x \chi_e \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon/5$ как только $me < \delta$. В силу сходимости x_n к x по мере на множестве A найдется номер n_0, начиная с которого $m(e_{\tau, n}) < \delta$, где $e_{\tau, n} = \{ |x_n - x| > \tau \} \cap A$, $\tau = \varepsilon / 5 \| \chi_A \|_{\Lambda_\varphi}$. Тогда при $n \geqslant n_0$

$$\| x - x_n \|_{\Lambda_\varphi} \leqslant \| x \chi_{cA} \|_{\Lambda_\varphi} + \| x_n \chi_{cA} \|_{\Lambda_\varphi} + \| (x - x_n) \chi_A \|_{\Lambda_\varphi} <$$

$$< 2\varepsilon/5 + \| (x - x_n) \chi_{e_{\tau, n}} \|_{\Lambda_\varphi} + \| (x_n - x) \chi_{A / e_{\tau, n}} \|_{\Lambda_\varphi} < \varepsilon.$$

Замечание 5. Если $l=\infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=0$, то $x_n=\chi_{[n,\,n+1]}\to 0$ по мере на множествах конечной меры и $x_n \xrightarrow{\sigma(\Lambda_\varphi\ E)} 0$ (см. теорему 1 п. 3), но $\|x_n\|_{\Lambda_\varphi}=\varphi(1)\not\to 0$.

Приведем еще одно полезное следствие из теоремы 1 для произвольного симметричного пространства F. Напомним сначала некоторые известные обозначения. Солидной оболочкой $\mathrm{sol}(H)$ множества $H\subset F$ называется множество $\{x\in F:|x|\leqslant|y|$ для некоторого $y\in H\}$. Через $\mathrm{cosol}(H)$ обозначается выпуклая оболочка множества $\mathrm{sol}(H)$. Множество $\mathrm{Orb}(H)=\{y\in L_1+L_\infty: y\prec x$ для некоторого $x\in H\}$ называется орбитой H. Оно совпадает с орбитой множества H под действием полугруппы линейных операторов, одновременно действующих в L_1 и L_∞ с нормой, не превосходящей единицы [3]. Положим $\Phi(F)=\{\varphi\in\Phi:\varphi'\in F\}$.

Теорема 2. Пусть F — симметричное пространство на $[0,l]$, $l\leqslant\infty$ и $H\subset F'$. Если $l<\infty$ или $l=\infty$ и $\varphi_F(\infty)=\infty$, то равносильны следующие утверждения:

(а) H относительно $\sigma(F',F)$ компактно;

(б) $\int\limits_{Q_n} xydm\to 0$ равномерно по $y\in H$ для любого $x\in F$ и любой системы стягивающихся множеств $\{Q_n\}$;

в) $\mathrm{cosol}\,(H)$ относительно $\sigma(F',F)$ компактно;

(г) H относительно $\sigma(\Lambda_\varphi, M_\varphi)$ компактно в любом Λ_φ, $\varphi\in\Phi(F)$;

(д) $H^*=\{y^*;y\in H\}$ относительно $\sigma(F',F)$ компактно;

(е) $Q(H)=\mathrm{cosol}\{z:z\sim y$ для некоторого $y\in H\}$ относительно $\sigma(F',F)$ компактно;

(ж) $\mathrm{Orb}(H)$ относительно $\sigma(F',F)$ компактно.

Доказательство. Эквивалентность (а), (б), (в) — известный факт [1], справедливый для любого БИП F.

(б)$\Rightarrow$(г). Пусть $\varphi\in\Phi(F)$. Тогда $F'\subset\Lambda_\varphi$ и $\Lambda_\varphi'=M_\varphi\subset F''$. Обозначим через E замыкание в M_φ симметричного идеала $F\cap M_\varphi$, содержащего φ'. Так как (б)$\Rightarrow$(а), то H ограничено в F', а значит, и в Λ_φ. Пусть $x\in E$, $\varepsilon>0$ и $\{Q_n\}$ — система стягивающихся множеств. Выберем $z\in F\cap M_\varphi$ так, чтобы $\|x-z\|_{M_\varphi}<\varepsilon/2c$, где $c=\sup\limits_{y\in H}\|y\|_{\Lambda_\varphi}$. Согласно (б) выберем n_0, для которого $\left|\int\limits_{Q_n} zydm\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $y\in H$ и $n\geqslant n_0$. Тогда

$$\left|\int\limits_{Q_n} xy\,dm\right|\leqslant\|x-z\|_{M_\varphi}\|y\|_{\Lambda_\varphi}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

для $y\in H$ и $n\geqslant n_0$, что и доказывает относительную $\sigma(\Lambda_\varphi, E)$-компактность H в Λ_φ. В силу замечания 4 к теореме 1 это означает относительную $\sigma(\Lambda_\varphi, M_\varphi)$-компактность H в Λ_φ.

(г)$\Rightarrow$(б). Если $x\in F$, то $x\in M_\varphi$ для $\varphi(t)=\int\limits_0^t x^*(s)\,ds$, $\varphi\in\Phi$. Поэтому из (г) и общего критерия слабой компактности вытекает (б).

Покажем теперь, что в условиях теоремы 2 выполнены предположения следствия 1 для всех Λ_φ, $\varphi\in\Phi(F)$. Действительно, по условию либо $l<\infty$, либо $l=\infty$ и $\varphi_F(\infty)=\infty$. В последнем случае для $\varphi\in\Phi(F)$ имеем

$$\frac{\varphi(t)}{t}=\frac{\int\limits_0^t\varphi'(s)\,ds}{t}\leqslant\frac{\|\varphi'\|_F\,\|\chi_{[0,\,t]}\|_{F'}}{t}=$$

$$=\frac{\|\varphi'\|_F\,\varphi_{F'}(t)}{t}=\frac{\|\varphi'\|_F}{\varphi_F(t)}\longrightarrow 0\quad\text{при}\quad t\to\infty.$$

Поэтому, в силу следствия 1, множества H и H^* одновременно $\sigma(\Lambda_\varphi,\ M_\varphi)$-компактны в Λ_φ, $\varphi\in\Phi(F)$, что доказывает эквивалентность (г) и (д).

Импликации (ж)$\Rightarrow$(е)$\Rightarrow$(д) следуют из вложений $H^*\subset Q(H)\subset\subset\mathrm{Orb}(H)$.

(а)$\Rightarrow$(ж). Достаточно показать, что для $\mathrm{Orb}(H)$ выполнено (б). В силу условия теоремы, из неравенства $x^*(t)\leqslant\|x\|_F/\varphi_F(t)$ вытекает, что $\lim\limits_{t\to\infty}x^*(t)=0$ для $x\in F$, и поэтому $(x\chi_{Q_n})^*(t)\to 0$ при любых $t>0$ и стягивающей системе множеств $\{Q_n\}$. Пусть $\varphi(t)=\int\limits_0^t x^*(s)\,ds$. Тогда $\varphi\in\Phi(F)$, $\|x\|_{M_\varphi}=1$. Так как (а)$\Rightarrow$(г), то используя предложение 1 и повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, получаем для произвольного $\varepsilon>0$ существование $\delta>0$, а если $\varphi(\infty)=\infty$, то и $r>0$, таких, что $\|y^*\chi_{[0,\,\delta)}\|_{\Lambda_\varphi}<\varepsilon/3$, $\|y^*\chi_{[r,\,\infty)}\|_{\Lambda_\varphi}<\varepsilon/3$ для всех $y\in H$. Выберем n_0 так, чтобы $(x\chi_{Q_n})^*(\delta)\|y^*\chi_{[0,\,r]}\|_{L_1}<\varepsilon/3$ при всех $n\geqslant n_0$ и $y\in H$. Это возможно, ибо H ограничено в F' и, значит,

$$\|y^*\chi_{[0,\,r]}\|_{L_1}\leqslant\|y\|_{F'}\|\chi_{[0,\,r]}\|_F\leqslant c\varphi_F(r),$$

где $c=\sup\limits_{y\in H}\|y\|_{F'}$. Пусть $z\in\mathrm{Orb}(H)$ и y из H таков, что $z\prec y$. Тогда

$$\left|\int\limits_{Q_n}xz\,dm\right|\leqslant\int\limits_0^l(x\chi_{Q_n})^*y^*\,dt\leqslant\int\limits_0^l(x\chi_{Q_n})^*y^*\,dt=\int\limits_0^\delta(x\chi_{Q_n})^*y^*\,dt+$$

$$+\int\limits_\delta^r(x\chi_{Q_n})^*y^*\,dt+\int\limits_r^l(x\chi_{Q_n})^*y^*\,dt\leqslant\|x\|_{M_\varphi}\|y^*\chi_{[0,\,\delta]}\|_{\Lambda_\varphi}+$$

$$+(x\chi_{Q_n})^*(\delta)\|y^*\chi_{[0,\,r]}\|_{L_1}+\|x\|_{M_\varphi}\|y^*\chi_{[r,\,\infty]}\|_{\Lambda_\varphi}<\varepsilon,$$

что означает выполнение (б) для $\mathrm{Orb}(H)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 6. В условиях теоремы 2 орбиты $\mathrm{Orb}(y)$ любого $y\in F'-\sigma(F',\ F)$ — компактна, так как $\mathrm{Orb}(y)$ замкнута в F' [3], а $\{y\}$ — компактное множество.

7. Условие $\varphi_F(\infty)=\infty$ в теореме 2 отбросить нельзя, ибо для $F=L_\infty$, $F'=L_1$ и $y=\chi_{[0,\,1]}$ орбита $\mathrm{Orb}(y)$ содержит $\chi_{[n,\,n+1]}$ и, следовательно, не является относительно $\sigma(L_1,\ L_\infty)$-компактной.

8. В случае, когда F — симметричное пространство, обладающее свойством мажорантности (т. е. $x \prec y$, $y \in F \Rightarrow x \in F$), эквивалентность утверждений (а), (д), (ж) из теоремы 2 получена Фремлином в [6]. Взяв за F пространство E из теоремы 1 в случае, когда $E \neq M_{\varphi}$, получаем пример топологии $\sigma(F', F)$, для которой результаты Фремлина не действуют, а теорема 2 верна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я.//УМН. 1979. Т. 34. В. 2(206). С. 137.
2. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир. 1969. 1072 с.
3. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука. 1978. 400 с.
4. Канторович А. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1977. 744 с.
5. Браверман М. Ш., Меклер А. А.//СМЖ. 1977. Т. 18. № 3. С. 522.
6. Fremlin D. H.//Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968. V. 64. N 3. P. 625.

Воронежский инженерно-строительный институт,

Ташкентский государственный университет,
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступила
04. 09. 91

WEAK COMPACTNESS IN THE LORENTZ SPACES

A. A. Sedaev, Ph. A. Sukochev, V. I. Chilin

(Summary)

Let Λ_{φ} be a Lorentz space and E be a rearrangement invariant subspace of Λ' such tha $\varphi' \in E$. Criteria of (Λ_{φ}, E)—relatively compactness of subsets of Λ_{φ} are established.

УДК 519.21

Р. Т. ТУРСУНОВ

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА МАРТИНГАЛ РАЗНОСТИ

Мақолада тасодифий сондаги мартингал фарқи йиғиндилари учун инвариантлик принципида яқинлашиш тезлиги аниқланди.

Пусть (τ_i, ξ_i), $i \geqslant 1$ — последовательность двухмерных векторов, $\tau_i \geqslant 0$ п. н. Предположим, что находящаяся в момент времени $t=0$ в точке 0 блуждающая частица совершает скачки величиной ξ_k в момент времени $t_k = \tau_1 + \ldots + \tau_k$ соответственно. Тогда в момент времени $t \geqslant 0$ частица находится в точке

$$\xi(t) = \sum_{i \leqslant \nu(t)} \xi_i, \tag{1}$$

где $\nu(t) = \max(k \geqslant 0 : t_k \leqslant t)$.

Процессы такого вида часто встречаются, например, в теории массового обслуживания и носят название обобщенных процессов восста-