МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Е. М. СЕМЕНОВ

ШКАЛЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СОЕДИНЯЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА L_1 и L_∞

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор технических наук
профессор С. Г. Крейн

ВОРОНЕЖ 1964

Понятие шкалы банаховых пространств впервые было введено С. Г. Крейном [1, 2]. Им были выделены важные классы шкал, для которых справедливы интерполяционные теоремы типа известной теоремы М. Рисса [3]. С. Г. Крейном и Ю. И. Петуниным был решен вопрос о возможности соединения непрерывной нормальной шкалой двух банаховых пространств [4] (критерий родственности банаховых пространств).

Одним из типов шкал, для которых справедлива интерполяционная теорема, является максимальная нормальная шкала пространств. С. Г. Крейном и автором была построена максимальная нормальная шкала пространств, соединяющая L_1 и L_∞. Оказалось, что эта шкала состоит из пространств $\Lambda(\alpha)$, введенных в рассмотрение Г. Г. Лоренцем [5, 6] в 1950 году. Им же изучались сопряженные к $\Lambda(\alpha)$ пространства $M(\alpha)$.

Автором было показано, что $\Lambda(\alpha)$ в свою очередь сопряжены к пространствам $M_0(\alpha)$, которые образуют непрерывную нормальную шкалу пространств, соединяющую L_1 и L_∞. Изучению различных свойств функциональных пространств $M_0(\alpha)$, $\Lambda(\alpha)$, $M(\alpha)$ и некоторых операторов в них посвящена основная часть работы. Эти пространства могут быть изучены столь же детально, как и пространства L_p; в некоторых случаях они обладают даже «лучшими» свойствами, чем пространства L_p.

Первая глава работы посвящена некоторым общим вопросам теории шкал банаховых пространств.

Определение. *Семейство банаховых пространств* E_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ *называется непрерывной нормальной шкалой пространств, если*

1) *при* $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ *пространство* E_β *плотно вложено в* E_α *и*

$$\|x\|_{E_\alpha} \leqslant \|x\|_{E_\beta};$$

2) *при* $x \in E_\beta$ $\|x\|_{E_\alpha}$ *как функция параметра* α *логарифмически выпукла на* $[0, \beta]$;

3) *при* $x \in E_1$

$$\|x\|_{E_1} = \lim_{\alpha \to 1} \|x\|_{E_\alpha}.$$

Банаховы пространства E_0 и E_1 называются родственными, если существует такое семейство пространств E_α $(0<\alpha<1)$, что пространства E_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ образуют непрерывную нормальную шкалу пространств.

В § 1 изложены основные положения теории шкал банаховых пространств, примеры и дается ряд уточнений этой теории.

В § 2 рассматриваются функциональные банаховские пространства E, для которых выполнены следующие условия:

A) если $x(t) \in E$, то всякая равноизмеримая с $x(t)$ функция $y(t) \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$;

B) функция $x(t) \equiv 1 \in E$;

C) множество конечнозначных функций плотно в E.

Основным результатом § 2 является

Теорема 1. 4. *Пусть* E_1 *и* E_2 *— банаховы пространства, для которых выполнены* A), B), C); *пусть* E_2 *нормально вложено в* E_1. *Тогда* E_1 *и* E_2 *родственны.*

В § 3 рассматривается вопрос о наиболее естественной в некотором смысле нумерации пространств данной шкалы. Шкала пространства E_α называется уплотненной, если из условий:

1) $\omega(\alpha)$ вогнута на $[0, 1]$, $\omega(0)=0$, $\omega(1)=1$,

2) $E_{\omega(\alpha)}$—шкала вытекает $\omega(\alpha) \equiv \alpha$.

В теореме 1.5′ доказывается, что всякой шкале E_α соответствует такая выпуклая функция $\Omega(\alpha)$, $\Omega(0)=0$, $\Omega(1)=1$ и такая уплотненная шкала F_α, что $E_\alpha = F_{\Omega(\alpha)}$. Затем находится необходимое и достаточное условие уплотненности шкалы пространств.

В § 1 главы 2 рассматриваются пространства $\Lambda(\alpha)$:

$$\| x \|_{\Lambda(\alpha)} = \alpha \int_0^1 x^*(t)\, t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1),$$

где $x^*(t)$ — невозрастающая равноизмеримая с $|x(t)|$ функция. Доказывается, что

$$\| x \|_{\Lambda(\alpha)} = \int_0^\infty n_x^\alpha(\tau)\, d\tau,$$

где $n_x(\tau) = mE(|x(t)| > \tau)$. Через $\varkappa_e(t)$ обозначается характеристическая функция множества $e \subset [0, 1]$.

Лемма 2. 2. *Функции* $(me \cup g)^{-\alpha} [\varkappa_e(t) - \varkappa_g(t)]$, *где* $e, g \subset \subset [0, 1]$, $e \cap g = \varnothing$, *и только они являются экстремальными точками единичного шара пространства* $\Lambda(\alpha)$.

Пространства $\Lambda(\alpha)$ обладают одним важным свойством, не имеющим аналога для пространств L_p, а именно, справедлива

Теорема 2. 2. *Пусть на* $\Lambda(\alpha)$ *определена полунорма* Φ *такая, что для любой характеристической функции* $\varkappa_e(t)$ *справедливо*

$$\Phi(\varkappa_e) \leqslant M \| \varkappa_e \|_{\Lambda(\alpha)},$$

где M *не зависит от* $e \subset [0, 1]$. *Тогда для всех конечнозначных функций* $x(t)$

$$\Phi(x) \leqslant 2^{1-\alpha} M \| x \|_{\Lambda(\alpha)}.$$

Следствие 1. *Имеет место вложение* $\Lambda(\alpha) \subset L_{\frac{1}{\alpha}}$ *и*

$$\| x \|_{L_{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant \| x \|_{\Lambda(\alpha)} \quad (x \in \Lambda(\alpha)).$$

Следствие 2. *Пространства* $\Lambda(1-\alpha)$ *образуют максимальную шкалу, соединяющую* L_1 *и* L_∞.

Приводится некоторое усиление теоремы 2. 2 при дополнительных ограничениях на Φ.

В § 2 рассматриваются пространства $M(\alpha)$ $\left(\| x \|_{M(\alpha)} = \right.$

$$= \sup_{e \subset [0,1]} \left. \frac{\int_e | x(t) | dt}{(me)^\alpha} \right),$$ сопряженные к $\Lambda(\alpha)$.

Теорема 2. 5. *Для того, чтобы* $x(t) \in M(\alpha)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $x^*(t) t^{1-\alpha}$ *была ограничена на* $(0, 1]$, *при этом*

$$\sup_{0<t\leqslant 1} x^*(t) t^{1-\alpha} \leqslant \| x \|_{M(\alpha)} \leqslant \frac{1}{\alpha} \sup_{0<t\leqslant 1} x^*(t) t^{1-\alpha}.$$

Показывается, что пространства $M(\alpha)$ не образуют шкалу на $[0, 1]$.

В связи с этим в § 3 изучаются пространства $M_0(\alpha)$, получающиеся путем замыкания множества ограниченных функций в $M(\alpha)$. Приводятся два условия эквивалентные принадлежности $x(t)$ пространству $M_0(\alpha)$. Доказывается, что пространства $M_0(\alpha)$ образуют шкалу пространств, соединяющую L_1 и L_∞.

Теорема 2. 7. *Формула*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt,$$

где $y(t) \in M(\alpha)$, *дает общий вид линейного функционала на* $M_0(\alpha)$, *причем*

$$\| f \| = \| y \|_{\Lambda(\alpha)}.$$

Приводятся две формулы для вычисления расстояния от элемента $x(t) \in M(\alpha)$ до подпространства $M_0(\alpha)$.

В первом пункте § 4 доказывается, что билинейный оператор $A(x_1, x_2) = x_1 x_2$ действует из $M(\alpha_1) \times M(\alpha_2)$ в $M(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)$, если $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, и из $\Lambda(\alpha_1) \times M(\alpha_2)$ в $\Lambda(1 + \alpha_1 - \alpha_2)$, если $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. Приводятся следствия из этих утверждений. Во втором пункте § 4 рассматривается нелинейный оператор

$$A_\alpha x = (x^* t^\alpha)^* t^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Теорема 2. 11. *Оператор* A_α *действует ограниченно из* L_1 *в* L_1 *и*

$$\| A_\alpha \| = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}.$$

С помощью этой теоремы доказывается

Теорема 2. 12. *Всякую суммируемую функцию* $x(t)$ *можно представить в виде* $x(t) = x_1(t)\, x_2(t)$, *где* $x_1(t) \in \Lambda(\alpha)$, $x_2(t) \in M(\alpha)$ *и*

$$\| x_1 \|_{\Lambda(\alpha)} \| x_2 \|_{M(\alpha)} \leqslant \frac{\pi(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha} \| x \|_{L_1}.$$

В главе 3 доказываются новые интерполяционные теоремы. Линейный оператор A будем называть оператором типа (α, β) (максимального типа (α, β), минимального типа (α, β), почти минимального типа (α, β)), если A ограниченно действует из $L_{\frac{1}{\alpha}}$ в $L_{\frac{1}{\beta}}$ ($\Lambda(\alpha)$ в $\Lambda(\beta)$, $M(1-\alpha)$ в $M(1-\beta)$, $M_0(1-\alpha)$ в $M_0(1-\beta)$) и слабого типа (α, β), если для всех $x \in L_{\frac{1}{\alpha}}$.

$$mE(|Ax(t)| > \tau) \leqslant C \left(\frac{\| x \|_{L_{\frac{1}{\alpha}}}}{\tau} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Определение типа и слабого типа операторов было введено А. Зигмундом [7] в связи с теоремой Марцинкевича [8]. Из теоремы 2. 5 вытекает

Теорема 3. 1. *Для того, чтобы A был оператором слабого типа* (α, β), *необходимо и достаточно, чтобы A действовал ограниченно из* $L_{\frac{1}{\alpha}}$ *в* $M(1-\beta)$.

Теорема 3. 2. *Пусть* $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \leqslant 1$ $(i = 0, 1)$, $\beta_0 \neq \beta_1$, A — *линейный оператор, определенный на множестве конечнозначных функций. Если для всякого измеримого множества* $e \subset [0, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\| A\varkappa_e \|_{M(1-\beta_i)} \leqslant C_i (me)^{\alpha_i},$$

то A *может быть расширен до оператора типа* $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$, *максимального типа* $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$, *минимального типа* $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$, *почти минимального типа* $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$, *где* $\alpha_\tau = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1$, $\beta_\tau = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1$.

Затем доказывается аналог интерполяционной теоремы Марцинкевича для пространств $\Lambda(\alpha)$, причем оказывается, что теорема справедлива для всех операторов, в то время как теорема Марцинкевича справедлива только для «улучшающих».

Теорема 3. 5. *Пусть* $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $\beta_0 \neq \beta_1$ *и* $0 < \tau < 1$. *Тогда следующие условия эквивалентны*

1. A *есть оператор типа* $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$.

2. A *есть оператор максимального типа* $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$.

3. A *есть оператор минимального типа* $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$.

4. A *есть оператор почти минимального типа* $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$.

Доказывается, что условия $\beta_i \leqslant \alpha_i$ нельзя отбросить как в теореме 3. 5, так и в теореме Марцинкевича. Указывается некоторый класс линейных интегральных операторов, монотонных по конусу неотрицательных функций [9], для которых легко проверяется ограниченность в пространствах $M(\alpha)$ и для которых применима теорема 3. 5.

В заключение этой главы приводятся наиболее важные в анализе примеры операторов, для которых применима теорема 3. 5, и приводится обобщение одной интерполяционной теоремы С. Г. Крейна [2].

В главе 4 решается вопрос о представлении сингулярным интегралом функций из $\Lambda(\alpha)$.

Точка $x_0 \in [0, 1)]$ называется точкой Лебега—Лоренца для функции $f(x) \in \Lambda(\alpha)$, если

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau^\alpha} \int_0^1 \left\{ |f(x) - f(x_0)| \varkappa_{[x_0, x_0+\tau]} \right\}^* x^{\alpha-1}\, dx = 0.$$

По схеме С. Г. Крейна, Б. Я. Левина [10, 11] и Д. В. Салехова [12] доказывается

Теорема 4. 2. *Для представимости любой функции* $f(x) \in \Lambda(\alpha)$, *имеющей точку* $x=0$ *точкой Лебега—Лоренца, формулой*

$$f(0) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \varphi_n(t, 0) f(t)\, dt,$$

где $\varphi_n(t, 0)$ — *последовательность сингулярных ядер, необходимо и достаточно:*

1) *чтобы* $\varphi_n(t, 0)$ *допускал представление*

$$\varphi_n(t, 0) = \psi_{n,1}(t)\, \psi_{n,2}(t)$$

где $\psi_{n,1}(t)$ — *невозрастающая функция из* $\Lambda(\alpha)$, $\psi_{n,2}(t) \in M(\alpha)$,

2) *существование такого типа числа* H, *что*

$$\|\psi_{n,1}\|_{\Lambda(\alpha)} \leqslant H, \quad \|\psi_{n,2}\|_{M(\alpha)} \leqslant H.$$

Теорема 4. 3. *Если* $f(x) \in \Lambda(\alpha)$, *то почти каждая точка из* [0, 1] *есть точка Лебега—Лоренца.*

Эта теорема является аналогом теоремы Лебега для пространств $\Lambda(\alpha)$.

Результаты работы докладывались на семинарах при Воронежском госуниверситете, на семинарах по теории функций в Днепропетровске. Основные результаты опубликованы в трех статьях [13—15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. ДАН СССР, 130. № 3 (1960).
2. Крейн С. Г. ДАН СССР, 132, № 3 (1960).
3. Riesz M. Acta Math., 49, (1926), 465—497.
4. Крейн С. Г. и Петунин Ю. И. ДАН СССР, 139, № 6 (1961).
5. Lorentz G. G. Ann. Math., 2, 51 (1950), 37—55.
6. Lorentz G. G. Pacific J. Math., 1, (1951), 411—429.
7. Zygmund A. J. Math, Pures et Appl., 35, 223 (1956).
8. Marcinkiewicz I. C. R. Acad. Sc., 208, 405 (1939), 1272—1273.
9. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1962.
10. Крейн С. Г. и Левин Б. Я. ДАН СССР, 60, № 1 (1948).
11. Крейн С. Г. и Левин Б. Я. ДАН СССР, 60, № 2 (1948).
12. Салехов Д. В. УМЖ, том XIII, № 4 (1961), 34—50.
13. Крейн С. Г. и Семенов Е. М. ДАН СССР, 138, № 4 (1961).
14. Семенов Е. М. ДАН СССР, 148, № 5 (1963).
15. Семенов Е. М. Труды семинара по функциональному анализу, вып. 7 (1963), ВГУ.