МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Е.М. Семенов

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(функциональный анализ и теория функций - 002)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Воронеж
1968

Работа выполнена в Воронежском Государственном университете.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук В.Ф.Гапошкин,
доктор физико-математических наук, профессор И.Ц.Гохберг,
доктор физико-математических наук, профессор М.А.Красносельский.

Ведущее предприятие: институт математики им. В.А.Стеклова АН СССР.

Автореферат разослан июля 1968 г.

Защита диссертации состоится в октябре-ноябре 1968 года на заседании Ученого совета математико-механического факультета Воронежского Государственного университета (Воронеж, Университетская пл.,1).

Ученый секретарь совета

Теория интерполяции линейных операторов играет все большую роль в различных вопросах математического анализа, теории функций и дифференциальных уравнений. Развитие теории интерполяции идет в трех связанных друг с другом направлениях: интерполяционные теоремы для операторов в абстрактных пространствах, интерполяционные теоремы для операторов в пространствах суммируемых функций и интерполяционные теоремы для операторов в пространствах дифференцируемых функций.

Настоящая работа относится ко второму направлению, развитие которого началось со знаменитой работы М.Рисса (1926). Следующим этапом явилась важная интерполяционная теорема Ж.Марцинкевича (1939), доказательство которой было опубликовано А.Зигмундом (1956).

В конце пятидесятых годов начинается бурное развитие теории интерполяции во всех трех направлениях (Ж.Л.Лионс, Е.Гальярдо, А.П.Кальдерон, С.Г.Крейн и др.). Наиболее существенные результаты во втором направлении были получены в работах А.П.Кальдерона, Е.М.Стейна-Г.Вейсса, Б.С.Митягина, В.И.Мацаева-В.А.Дикарева.

Изучение банаховых пространств суммируемых функций началось с работ В.Орлича и продолжалось в работах многих исследователей (Г.Г.Лоренц, И.Гальперин, М.А.Красносельский, Я.Б.Рутицкий, В.А.Люксембург, А.С.Цаанен, Х.Накано и др.).
В работе выделяется класс банаховых пространств суммируемых функций, названных симметричными. Значительную часть работы занимает исследование различных свойств симметричных пространств, которое опирается на теорию пространств Г.Г.Лоренца. Перейдем к описанию основных результатов.

В первой главе диссертации вводится понятие симметричного пространства, играющее важную роль во всей работе.

Банахово пространство E измеримых на $[0,1]$ функций называется симметричным, если

1) из $y(t)\in E$ и $|x(t)|\le|y(t)|$ почти всюду на $[0,1]$ вытекает $x(t)\in E$ и $\|x\|_E\le\|y\|_E$;

2) из $y(t)\in E$ и равноизмеримости функций $|x(t)|$ и $|y(t)|$ вытекает $x(t)\in E$ и $\|x\|_E=\|y\|_E$.

Примерами симметричных пространств могут служить пространства L_p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича и др. Важной характеристикой симметричного пространства E является так называемая фундаментальная функция

$$\varphi_E(\tau)=\|\varkappa_{[0,\tau]}(t)\|_E$$

где $\varkappa_e(t)$ - характеристическая функция измеримого подмножества $e\subset[0,1]$.

Теорема I.I. Для того чтобы заданная на $[0,1]$ функция $\varphi(t)$ была фундаментальной функцией некоторого симметричного пространства необходимо и достаточно, чтобы

I) $\varphi(t)$ не убывала на $[0,1]$

2) $\frac{\varphi(t)}{t}$ не возрастала на $(0,1]$

Для любого симметричного пространства E справедливы непрерывные вложения $L_\infty\subset E\subset L_1$. Получены различные критерии сепарабельности симметричных пространств и изучены некоторые специфические свойства несепарабельных пространств.

Всякая возрастающая вогнутая на $[0,1]$ функция $\psi(t)$, $\psi(0)=0$, порождает пространства Лоренца и Марцинкевича - множество всех измеримых функций, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^*(t)\,d\psi(t) < \infty$$

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0<h\le 1} \frac{\int_0^h x^*(t)\,dt}{\psi(h)} < \infty$$

где $x^*(t)$ - невозрастающая функция, равноизмеримая с $|x(t)|$. Эти пространства обладают важными экстремальными свойствами в классе симметричных пространств. Найдено полное описание множества экстремальных точек единичного шара $\Lambda(\psi)$. С помощью этого утверждения получена

Теорема I.7. Если фундаментальная функция $\varphi_E(t)$ пространства E вогнута, то $E \supset \Lambda(\varphi_E)$ и

$$\|x\|_E \le \|x\|_{\Lambda(\varphi_E)}$$

Теорема I.8. Если $\psi_1(t) = \frac{t}{\varphi_E(t)}$, то $E \subset M(\psi_1)$ и

$$\|x\|_{M(\psi_1)} \le \|x\|_E$$

Заметим, пространства $\Lambda(\varphi_E)$ и $M(\psi_1)$ имеют ту же фундаментальную функцию, что и E. С помощью теорем I.7 и I.8 доказывается, что на симметричном пространстве можно ввести такую эквивалентную норму, что фундаментальная функция станет вогнутой. В дальнейшем весьма важна

Теорема I.10. Для того чтобы функционал

$$F(x) = \sup_{0<t\le 1} \frac{t}{\psi(t)} x^*(t)$$

был эквивалентен $\|x\|_{M(\psi)}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$$

Двойственным пространством E' называется множество всех измеримых функций, для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \le 1} \int_0^1 x(t)y(t)dt < \infty$$

Изучаются двойственные симметричные пространства и продолжается рассмотрение экстремальных свойств пространств $M(\Psi)$.

Семейство функционалов

$$f_\tau(x) = \frac{1}{\varphi_{E'}(\tau)} \int_0^\tau x(t)dt \quad (0<\tau\le 1)$$

обладает рядом интересных свойств. Находится критерий существования в E такой функции $\tilde{x}(t)$, что

$$\varliminf_{\tau\to 0} f_\tau(\tilde{x}) > 0$$

С помощью этого утверждения может быть получен критерий телесности конуса функций $K = \{x : \int_0^\tau x(t)dt \ge 0$ для всех $\tau \in [0,1]\}$ в симметричном пространстве E.

Обозначим через $Q(\mu,\nu)$ множество измеримых функций, для которых

$$\mu \int_0^\tau x^*(t)dt \le \int_0^{2\tau} x^*(t)dt \le \nu \int_0^\tau x^*(t)dt$$

при всех $\tau \in [0,\frac{1}{2}]$ и определим на E новую норму

$$\|x\|_1 = \sup_{\substack{\|y\|_{E'} \le 1 \\ y\in Q(\mu,\nu)}} \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

Важным моментом интерполяционного метода, развитого во второй главе диссертации, является

Теорема I.19. Если симметричное пространство E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному и

$$\mu < \underline{\lim_{t\to 0}} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}, \quad \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} < \nu .$$

то $\|x\|_1$ эквивалентна исходной норме пространства E.

Глава вторая посвящена разработке нового метода получения интерполяционных теорем в симметричных пространствах. Относительно пространства E предполагается, что оно сепарабельно или сопряжено к сепарабельному. В начале второй главы излагаются частные результаты: доказывается интерполяционная теорема в пространствах $\Lambda(\psi)$ с точной мультипликативной оценкой нормы оператора и приводится новое более простое доказательство интерполяционной теоремы Б.С.Митягина.

Затем рассматриваются три различные конкретные реализации интерполяционного метода, основная идея которого заключается в следующем. В первой главе показано, что без ограничения общности $\varphi_E(t)$ - вогнута на $[0,1]$, в дальнейшем мы будем предполагать это выполненным. Если E - симметричное пространство, то существует такое множество Ψ возрастающих вогнутых функций, что

$$\|x\|_E = \sup_{\psi\in\Psi} \|x\|_{\Lambda(\psi)} \qquad /I/$$

Поэтому, имея некоторые теоремы об интерполяции линейных операторов в пространствах $\Lambda(\psi)$, можно, вообще говоря, на основании /I/ получать интерполяционные теоремы в симметричных пространствах.

По заданному симметричному пространству E и числам $\alpha > 1$, $\beta > 0$ построим пространство $E_{\alpha\beta}$ - множество всех измеримых функций, для которых

$$\|x\|_{E_{\alpha,\beta}} = \|x^*(t^{\alpha})t^{-\beta}\|_E$$

Обозначим

$$\alpha_\tau = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1 , \quad \beta_\tau = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1$$

$$\delta = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\beta_0 - \beta_1} , \quad \Delta = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\beta_1 - \beta_0}$$

Теорема 2.3. Пусть линейный оператор A непрерывен из $\mathcal{L}_{\frac{1}{\beta_\tau}}$ в $\mathcal{L}_{\frac{1}{\alpha_\tau}}$ при каждом $\tau \in (0,1)$. Если $0 < \delta \leq 1$, $\Delta \geqslant 0$ и

$$2^{\beta_0} < \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} , \quad \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} < 2^{\beta_1} \qquad /2/$$

то A непрерывен из E в $E_{\frac{1}{\delta}, \frac{\Delta}{\delta}}$

С помощью теоремы 2.3 и специального изучения множества симметричных пространств, в которых непрерывен оператор Гильберта, доказывается

Теорема 2.6. Для того, чтобы всякий линейный оператор, непрерывно действующий в каждом $\mathcal{L}_p$ $(1 < p < \infty)$, был непрерывен в симметричном пространстве E , необходимо и достаточно, чтобы

$$1 < \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} , \quad \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} < 2$$

Рассмотрены важные частные случаи теоремы 2.3 и выяснен смысл условий /2/ в терминах расположения E в шкале пространств $\mathcal{L}_p$. Для интерполяции некоторых билинейных операторов важна

Теорема 2.8. Пусть E, F - симметричные пространства, $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}$ существует и

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\varphi_F(2t)}{\varphi_F(t)} < 2 , \quad \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_F(2t)}{\varphi_F(t)} > 2$$

Пусть линейный оператор A непрерывен из $\mathcal{L}_1$ в E и из E' в $\mathcal{L}_\infty$. Тогда A непрерывен из F в G, где

$$\|x\|_G = \|x^*(t) \frac{\varphi_E(t)}{t}\|_F$$

Следуя Н.Ароншайну и Е.Гальярдо, банахово пространство E называется интерполяционным по отношению к паре E_0, E_1, если всякий линейный оператор A, непрерывный в E_0 и E_1, непрерывен в E и

$$\|A\|_{E\to E} \le C \max_{i=0,1} \|A\|_{E_i\to E_i}$$

Теорема 2.9. Если E_0 и E_1 - симметричные пространства и E - интерполяционное пространство по отношению к E_0 и E_1, то с точностью до эквивалентной нормы E симметрично.

Предположим

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_{E_i}(2t)}{\varphi_{E_i}(t)} \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}$$

существуют и равны $\beta_i (i=0,1)$ и β соответственно.

Теорема 2.11. Условие

$$\beta_0 \le \beta \le \beta_1$$

необходимо, а условие

$$\beta_0 < \beta < \beta_1$$

достаточно для того, чтобы пространство E было интерполяционным по отношению E_0 и E_1

Следствие. Условие

$$\beta_0 \le \sqrt{2} \le \beta_1$$

необходимо, а условие

$$\beta_0 < \sqrt{2} < \beta_1$$

достаточно для того, чтобы существовало гильбертово интерполяционное по отношению E_0 и E_1 пространство.

В заключительной части второй главы рассматриваются пути возможного обобщения понятия симметричного пространства и интерполяционный метод для этих пространств.

Третья глава диссертации посвящена приложениям интерполяционных теорем к различным вопросам теории операторов и теории рядов Фурье.

Теорема 3.1. Для непрерывности в симметричном пространстве E оператора Гильберта

$$\mathcal{J}x(t) = \text{v. p.} \int_0^1 \frac{x(s)}{t-s}\,ds$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$1 < \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}, \quad \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} < 2$$

Точно такое же утверждение справедливо и для оператора, ставящего в соответствии функции её сопряженную .

Теорема 3.2. Для непрерывности в симметричном пространстве E оператора Харди

$$Bx(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} < 2$$

Свертку двух суммируемых функций

$$x * y(t) = \int_0^1 x(t-s)\, y(s)\, ds$$

можно рассматривать как билинейный оператор. Доказывается, что в предположениях теоремы 2.7 оператор свертки непрерывен из $F \times E$ в G, где

$$\|x\|_G = \left\| x^*(t) \frac{\varphi_E(t)}{t} \right\|_F$$

Аналогичное рассмотрение проводится и для оператора типа потенциала.

Интерполяционные теоремы находят применение и для изучения трансформаторов в симметрично нормированных идеалах операторов. Пусть $\mathfrak{S}$ - симметрично нормированный идеал кольца линейных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\Phi(\xi)$ - симметрично нормирующая функция и

$$\varphi_{\mathfrak{S}}(n) = \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$$

$A = A_R + iA_J$ - вольтерров оператор, A_R и A_J - его вещественная и мнимая компоненты.

Теорема 3.5. Для того, чтобы

$$\sup \frac{\|A_R\|_{\mathfrak{S}}}{\|A_J\|_{\mathfrak{S}}} < \infty$$

где supremum берется по всем вольтерровым операторам A, мнимая компонента которых принадлежит $\mathfrak{S}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$1 < \varliminf_{n \to \infty} \frac{\varphi_{\mathfrak{S}}(2n)}{\varphi_{\mathfrak{S}}(n)} \cdot \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\varphi_{\mathfrak{S}}(2n)}{\varphi_{\mathfrak{S}}(n)} < 2$$

Наиболее важные приложения интерполяционных теорем находятся в области оценок коэффициентов Фурье функций, принадлежащих различным банаховым пространствам. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана ортонормированная система равномерно ограниченных функций. Через $c_k = c_k(x)$ обозначим коэффициенты Фурье по этой системе функции $x(t)$, а через c_k^* обозначим перестановку последовательности $|c_k|$ в убывающем порядке.

Теорема 3.6. Если

$$\sqrt{2} < \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}, \quad \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} < 2$$

то

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^* \,\varkappa_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}(t) \Big\|_E \le C_1 \| x \|_E$$

где C_1 не зависит от $x(t)$.

Частным случаем этой теоремы является следующее утверждение. Пусть $M(u)$ N - функция и

$$2 < \underline{\lim}_{u\to\infty} \frac{M(2u)}{M(u)}, \quad \overline{\lim}_{u\to\infty} \frac{M(2u)}{M(u)} < 4$$

Если $x(t)$ принадлежит пространству Орлича $\mathcal{L}_M^*$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} M(k c_k^*) < \infty$$

Для того чтобы получить отсюда теорему Пэли, достаточно положить

$$M(u) = u^p \quad (1 < p < 2)$$

Пусть теперь ортонормированная система - тригонометрическая, $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$ и $a_k \downarrow 0$.

Теорема 3.7. Пусть E - симметричное пространство и

$$1<\varliminf_{t\to 0}\frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}\ ,\ \varlimsup_{t\to 0}\frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}<2$$

Для того чтобы $x(t)\in E$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \varkappa_{[\frac{1}{k+1},\ \frac{1}{k}]}(t)\in E$$

Частными случаями теоремы 3.7 являются теоремы Харди-Литтльвуда $(E=\mathcal{L}_p)$, Лоренца $(E=\Lambda(t^\alpha)$ или $E=M(t^\alpha))$, Дикарева и Мацаева.

С помощью интерполяционной теоремы 2.6 и одного результата А.М.Олевского доказывается

Теорема 3.9. Пусть E - симметричное пространство. Для того, чтобы в E существовал безусловный базис, необходимо и достаточно, чтобы E было сепарабельно и

$$1<\varliminf_{t\to 0}\frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}\ ,\ \varlimsup_{t\to 0}\frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}<2$$

Для пространств Орлича это утверждение было недавно доказано В.Ф.Гапошкиным.

Показывается также, что условия теоремы 3.9 необходимы и достаточны для того, чтобы тригонометрическая система была базисом в E

В последнем параграфе на примере одного оператора, порожденного разложением функции в ряд Фурье, доказывается неусиляемость в определенном смысле интерполяционной теоремы Штейна-Вейсса.

Четвертая глава посвящена изложению теории гипершкал, представляющей собою дальнейшее развитие теории шкал банаховых пространств, основы которой были заложены в работах С.Г.Крейна.

При рассмотрении шкал пространств, состоящих из измеримых функций, естественно пользоваться тем, что эти пространства в большинстве случаев являются банаховыми структурами по отношению к естественной полуупорядоченности. С этой точки зрения различные пространства измеримых функций детально изучались в работах В.А.Люксембурга, А.С.Заанена. Это позволяет выделить ряд шкал, обладающих важным дополнительным свойством, связанным с указанной полуупорядоченностью. Изучению таких шкал, которые мы назвали гипершкалами и посвящена в основном эта глава.

В § I изучаются некоторые свойства одного класса банаховых структур измеримых функций, которые названы здесь идеальными структурами. Эти свойства связаны в основном с операцией, которая ставит в соответствие паре функций $x_0(t)$ и $x_1(t)$ функции

$$|x_0(t)|^{1-\nu}\,|x_1(t)|^{\nu} \qquad (0 \le \nu \le 1)$$

В § 2 вводится основное понятие гипершкалы, соединяющей два пространства.

Среди гипершкал имеется максимальная. Изучаются свойства максимальных гипершкал. Оказывается, что шкала пространств $\mathcal{L}_p$

$$p = \frac{1}{1-\alpha}$$

является максимальной гипершкалой, соединяющей пространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_\infty$. Минимальная шкала всегда является гипершкалой.

В § 3 устанавливаются интерполяционные теоремы для однородных монотонных выпуклых операторов, действующих из максимальной гипершкалы.

В § 4 излагается конструкция, которая позволяет строить максимальную гипершкалу, соединяющую заданную идеальную структуру E измеримых функций с пространством $\mathcal{L}_\infty$. Эта конструкция осуществляется с помощью степенного преобразования нормы

$$\|x\|_\alpha = \| |x|^{\frac{1}{\alpha}} \|_E^\alpha$$

Для норм $\|x\|_\alpha$ справедлив аналог неравенства Гельдера.

Отметим, что степенное преобразование нормы в КВ-структурах ранее рассматривалось в работах Г.Я.Лозановского.

А.П.Кальдероном была предложена констфукция промежуточных пространств для двух идеальных структур измеримых функций. Оказывается, что эта конструкция при достаточно общих условиях приводит к построению максимальной гипершкалы, соединяющей эти две идеальные структуры. Детальному изучению кальдероновой гипершкалы посвящен § 5.

В § 6 рассматривается степенное преобразование с фиксированным показателем шкал идеальных структур. Исследуется, как при этом преобразовании изменяются свойства шкал. На базе этого исследования доказываются новые интерполяционные теоремы.

Автор выражает искреннюю благодарность С.Г.Крейну за постоянное внимание к работе.

Различные разделы работы докладывались автором на Международном конгрессе математиков (Москва,1966), на симпозиуме по теоремам вложения (Баку,1966), на семинаре Д.Е.Меньшова и П.Л.Ульянова в Московском университете, на семинаре В.И.Смирнова в Ленинградском университете, на семинаре И.Ц.Гохберга в институте математики АН МССР, а также на различных семинарах в Воронежском университете.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах.

1. Е.М.Семенов. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. ДАН СССР, 156, № 6 (1964).

2. Е.М.Семенов. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. ДАН СССР, 164, № 4 (1965).

3. С.Г.Крейн, Ю.И.Петунин, Е.М.Семенов. Гипершкалы банаховых структур. ДАН СССР, I70, № 2 (1966).

4. Е.М.Семенов. Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье. ДАН СССР, I76, № 6 (1967).

5. С.Г.Крейн, Ю.И.Петунин, Е.М.Семенов. Шкалы банаховых структур измеримых функций. Труды Московского математического общества, т.I7, стр.294-322 (1967).

6. Е.М.Семенов. Одна новая интерполяционная теорема. Функциональный анализ и его приложения, т.2, вып.2 (1968).

ЛЕ 04229 от 28.IУ.68г.Зак.I74, тираж I50, формат 60x90 I/I6, объем I пл.Отп. на ротапринте ВГУ