Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1940. Volume XXVII, № 7

MATHÉMATIQUES

SUR LA DÉRIVABILITÉ DE LA NORME DANS L'ESPACE DE BANACH

Par V. ŠMULIAN

(Présenté par A. N. Kolmogoroff, de l'Académie, le 16. III. 1940)

La présente Note est un développement ultérieur des résultats récemment publiés de l'auteur ([1],[2]). Dans la première partie on démontre que la condition suffisante pour la dérivabilité forte de la norme trouvée précédemment par l'auteur est en même temps nécessaire. La seconde partie est consacrée à la recherche des conditions pour la dérivabilité uniforme de la norme.

I. Soit Q un ensemble arbitraire. Désignons par $E(Q)$ un espace linéaire normé arbitraire ([3]) de fonctions bornées définies dans Q, où $\|x\| = \sup |x(q)|$.

La suite des points $\{q_n\} \subset Q$ est dite extrémale pour la fonction $x_0(q) \in E(Q)$, s'il existe

$$\lim_{n\to\infty} x_0(q_n)$$

et si l'on a l'égalité

$$\|x_0\| = |\lim_{n\to\infty} x_0(q_n)|.$$

L e m m e. Soit $x_0 \in E(Q)$, $\|x_0\| = 1$ et $\{q_n\} \subset Q$ une suite extrémale arbitraire de la fonction $x_0(q)$. Alors pour chaque élément $x \in E(Q)$ et pour chaque nombre $h > 0$ on a:

$$[x(q)x_0(q) - \lim_n x_0(q_n) \operatorname*{Lim}_n x(q_n)] \lim_n x_0(q_n) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - |x_0(q)|)\left(\frac{1}{h} + 2\|x\|\right) + \frac{\|x_0 + h[x \lim\limits_n x_0(q_n) - x_0 \operatorname*{Lim}\limits_n x(q_n)]\| - \|x_0\|}{h} \tag{1}$$

[le symbole $\operatorname*{Lim}_n$ désigne ici la limite introduite par S. Banach ([3])].

D é m o n s t r a t i o n. Pour $x \in E(Q)$ et $h > 0$ on a:

$$[x(q)x_0(q) - \lim_n x_0(q_n) \operatorname*{Lim}_n x(q_n)] \lim_n x_0(q_n) \leqslant$$
$$\leqslant [x(q) \operatorname{sign} x_0(q) - |x_0(q)| \lim_n x_0(q_n) \operatorname*{Lim}_n x(q_n)] \lim_n x(q_n) +$$
$$+ \|x\| \cdot |x_0(q) - \operatorname{sign} x_0(q)| + \|x\| \cdot |1 - |x_0(q)|| =$$
$$= [x(q) \lim_n x_0(q_n) - x_0(q) \operatorname*{Lim}_n x(q_n)] \operatorname{sign} x_0(q) + 2\|x\| \cdot (1 - |x_0(q)|) =$$

$$= 2\|x\|\cdot(1-|x_0(q)|)+\frac{1-|x_0(q)|}{h}+$$

$$+\frac{\{x_0(q)+h[x(q)\lim\limits_n x_0(q_n)-x_0(q)\,\mathrm{Lim}\limits_n x(q_n)]\}\operatorname{sign} x_0(q)-\|x_0\|}{h}\leqslant$$

$$\leqslant(1-|x_0(q)|)\left(\frac{1}{h}+2\|x\|\right)+\frac{\|x_0+h[x\lim\limits_n x_0(q_n)-x_0\,\mathrm{Lim}\limits_n x(q_n)]\|-\|x_0\|}{h}$$

Le lemme est démontré.

Théorème 1. *Soit* $x_0\in E(Q)$, $\|x_0\|=1$. *Alors pour la dérivabilité forte de la norme* $\|x\|$ *dans* $E(Q)$ *au point* x_0 *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée: pour chaque suite extrémale* $\{q_n\}\subset Q$ *de la fonction* $x_0(q)$ *et pour chaque* $x(q)\in E(Q)$ $(\|x\|\leqslant 1)$ *la suite*

$$\{x(q_n)\,x_0(q_n)\}\tag{2}$$

converge uniformément dans la sphère unitaire $(\|x\|\leqslant 1)$ *vers une limite qui ne dépend pas du choix de la suite extrémale* $\{q_n\}$.

La suffisance de cette condition a déjà été démontrée [2]. Démontrons qu'elle est nécessaire. En vertu de la dérivabilité forte de la norme $\|x\|$ au point x_0 il ne passe par ce point qu'un seul hyperplan d'appui par rapport à la sphère $\|x\|\leqslant 1$ [4]. L'équation de ce hyperplan est de la forme

$$\lim_n x(q_n)\,x_0(q_n)=1\tag{3}$$

où le premier membre ne dépend pas du choix de la suite extrémale $\{q_n\}$ [1]. Ainsi pour démontrer le théorème 1 il suffit d'établir la convergence uniforme de la suite (2) dans la sphère unitaire. Il suit d'un théorème de Mazur [4] que l'équation du hyperplan d'appui par rapport à la sphère $\|x\|\leqslant 1$ au point x_0 peut être écrite dans la forme

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x_0+hx\|-\|x_0\|}{h}=1.\tag{4}$$

Donc, en vertu de (3) et (4) nous avons:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x_0+hx\|-\|x_0\|}{h}=\lim_n x(q_n)\,x_0(q_n)\qquad(x\in E(Q)).$$

Il en résulte que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x_0+h[x\lim\limits_n x_0(q_n)-x_0\lim\limits_n x(q_n)]\|-\|x_0\|}{h}=0.$$

Ainsi, en vertu de la dérivabilité forte de la norme $\|x\|$ au point x_0 on a pour chaque $\varepsilon>0$ un $\delta_\varepsilon>0$, tel que $0<|h_\varepsilon|<\delta_\varepsilon$, et que pour tous les $x\in E(Q)$ et $\|x\|\leqslant 1$ on a la relation

$$\frac{\|x_0+h[x\lim\limits_n x_0(q_n)-x_0\lim\limits_n x(q_n)]\|-\|x_0\|}{h}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $h_\varepsilon=\frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Alors, en tenant compte de l'inégalité (1), on voit que

$$[x(q_p)\,x_0(q_p)-\lim_n x_0(q_n)\lim_n x(q_n)]\lim_n x_0(q_n)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+(1-|x_0(q_p)|)\left(\frac{1}{h_\varepsilon}+2\right)$$

pour tous les $x\in E(Q)$ et $\|x\|\leqslant 1$ et pour tous les $p=1, 2, \ldots$ Si p est assez grand, on a $(1-|x_0(q_p)|)\left(\frac{1}{h_\varepsilon}+2\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Pour ces p et pour tous

les $x\in E(Q)$ et $\|x\|\leqslant 1$ on a l'inégalité

$$|x(q_p)\,x_0(q_p)-\lim_n x_0(q_n)\lim_n x(q_n)|\leqslant\varepsilon.$$

Le théorème est démontré.

Corollaire. Si E est un espace de Banach arbitraire, pour la dérivabilité forte de la norme $\|f\|$ dans $\overline{E}$ au point f_0, $\|f_0\|=1$, il est nécessaire et suffisant que la condition suivante soit remplie.

Il suit de $f_0(x_n)\to\|f_0\|=1$, $\|x_n\|=1$ $(n=1, 2, \ldots)$ que l'on a $\|x_n-x_m\|\to 0$ pour $n, m\to\infty$.

On peut formuler d'une manière analogue le critère pour la dérivabilité forte de la norme $\|x\|$ dans E.

Il suit facilement du théorème 1 que dans l'espace (c) la norme $\|x\|$ n'est nulle part fortement dérivable, bien qu'il est connu qu'il existe beaucoup de points où la norme est faiblement dérivable.

Indiquons maintenant quelques cas où la dérivabilité faible entraîne la dérivabilité forte.

Théorème 2. *Si dans un espace faiblement complet de Banach* E *la convergence faible coïncide avec la convergence forte, alors la dérivabilité faible de la norme* $\|f\|$ *en un point* f_0, $\|f_0\|=1$, *entraîne la dérivabilité forte au même point.*

Démonstration. Soit $f_0(x_n)\to 1$, $\|x_n\|=1$. Alors il existe [1] $\lim\limits_n f(x_n)$ $(f\in\overline{E})$, donc en vertu de la condition du théorème on a $\|x_n-x_m\|\to 0$. Il reste à appliquer le corollaire du théorème 1.

Corollaire. Dans l'espace (m) la dérivabilité faible de la norme entraîne la dérivabilité forte [4].

Théorème 3. *Dans l'espace* (c_0) *la dérivabilité faible de la norme entraîne la dérivabilité forte.*

Démonstration. Soit $x_0\in(c_0)$, $\|x_0\|=1$. Supposons que $\|x\|$ est faiblement dérivable au point x_0. Alors il existe un seul hyperplan d'appui $f_0(x)=1$ par rapport à la sphère $\|x\|\leqslant 1$ au point x_0 [4]. Comme chaque fonctionnelle linéaire dans (c_0) ne peut être prolongée dans tout l'espace (m) en conservant la norme que d'une seule manière [5], il est maintenant évident que $\|x\|$ est faiblement dérivable au point $x_0\in(m)$. Il reste à utiliser le corollaire précédent.

Il suit du corollaire du théorème 1 [voir la démonstration du théorème 10 de l'auteur [6]] que dans le cas de la dérivabilité forte de la norme $\|f\|$ en tous les points de $\overline{E}$, la distance d'un point arbitraire $x'\in E$ et d'un espace fermé linéaire quelconque $G\subset E$ est accessible.

Ainsi [voir le théorème 9 de l'auteur [6]] nous arrivons à la conclusion suivante.

Théorème 4. *Si dans les espaces* $\overline{E}$, $\overline{\overline{E}}$ *les normes sont partout fortement dérivables, alors* E *est régulier.*

II. La fonction $\|x\|$ est nommée faiblement uniformément dérivable, si elle est partout faiblement dérivable [4] et si d'ailleurs pour chaque $x\in E$ la convergence vers la limite du quotient $\frac{\|x_0+hx\|-\|x_0\|}{h}$ est uniforme par rapport à x_0, quand $\|x_0\|=1$. Si $\|x\|$ est partout fortement dérivable et la convergence vers la limite du quotient $\frac{\|x_0+hx\|-\|x_0\|}{h}$ est uniforme par rapport à x_0, x quand $\|x_0\|=1$, $\|x\|\leqslant 1$, alors la fonction $\|x\|$ est nommée fortement uniformément dérivable.

Théorème 5. *Pour que la fonction* $\|x\|$ *dans* $E(Q)$ *soit faiblement uniformément dérivable, il est nécessaire et suffisant que l'on ait: pour* *chaque* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque* $y \in E(Q)$ *il existe un* $\delta_{\varepsilon, y} > 0$ *tel que les inégalités*

$$\begin{cases} |x(q_1)| \geqslant 1 - \delta_{\varepsilon, y} \\ |x(q_2)| \geqslant 1 - \delta_{\varepsilon, y} \end{cases} \qquad (x \in E(Q),\ \|x\| \leqslant 1)$$

entraînent

$$|x(q_1) y(q_1) - x(q_2) y(q_2)| \leqslant \varepsilon.$$

Corollaire. Si E est un espace arbitraire de Banach, pour que sa norme soit faiblement uniformément dérivable, il est nécessaire et suffisant que l'on ait: pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $y \in E$ il existe un $\delta_{\varepsilon, y} > 0$ tel que les inégalités

$$f_1(x) > 1 - \delta_{\varepsilon, y}, \quad f_2(x) > 1 - \delta_{\varepsilon, y} \quad (x \in E,\ \|x\| = 1,\ \|f_1\| = \|f_2\| = 1)$$

entraînent

$$|f_1(y) - f_2(y)| < \varepsilon.$$

On peut formuler d'une manière analogue la condition de la dérivabilité faible uniforme dans l'espace conjugué.

Nous omettons la démonstration du théorème 5 parce qu'elle est analogue à celle du théorème suivant.

Théorème 6. *Pour que la fonction* $\|x\|$ *dans* $E(Q)$ *soit fortement uniformément dérivable il est nécessaire et suffisant que l'on ait: pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\delta_\varepsilon > 0$ *tel que les inégalités*

$$|x(q_1)| \geqslant 1 - \delta_\varepsilon, \quad |x(q_2)| \geqslant 1 - \delta_\varepsilon \quad (x \in E(Q),\ \|x\| = 1) \tag{5}$$

entraînent

$$|x(q_1) y(q_1) - x(q_2) y(q_2)| \leqslant \varepsilon \tag{6}$$

pour tous les $y \in E(Q)$ quand $\|y\| \leqslant 1$.

Démontrons d'abord la nécessité. Soit $\{q_{n,x}\}$ une suite extrémale arbitraire de la fonction $x(q) \in E(Q)$, $\|x\| = 1$. Comme $\|x\|$ est fortement dérivable partout, on a en vertu du lemme 1:

$$[y(q) x(q) - \lim_n x(q_{n,x}) \lim_n y(q_{n,x})] \cdot \lim_n x(q_{n,x}) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - |x(q)|)\left(\frac{1}{h} + 2\right) +$$
$$+ \frac{\|x + h[y \lim_n x(q_{n,x}) - x \lim_n y(q_{n,x})]\| - \|x\|}{h} (y \in E(Q),\ \|y\| \leqslant 1,\ h > 0).$$

De même que dans le théorème 1 nous obtenons

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|x + h[y \lim_n x(q_{n,x}) - x \lim_n y(q_{n,x})]\| - \|x\|}{h} = 0.$$

Donc, en vertu de la condition du théorème il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un $\delta'_\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{\|x + h[y \lim_n x(q_{n,x}) - x \lim_n y(q_{n,x})]\| - \|x\|}{h} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} (0 < |h| \leqslant \delta'_\varepsilon).$$

Posons $h_\varepsilon = \frac{\delta'_\varepsilon}{2}$ et $\delta''_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{h_\varepsilon}{1 + 2h_\varepsilon}$. Si maintenant $|x(q)| \geqslant 1 - \delta_\varepsilon$, où $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$, alors

$$|y(q) x(q) - \lim_n x(q_{n,x}) \lim y(q_{n,x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela prouve que (5) entraîne (6).

Pour démontrer la suffisance, nous utiliserons un lemme de l'auteur [2]. Soit $0 < |h| \leqslant \frac{1}{4}$ et $\{q_{n,y}\}$ une suite extrémale arbitraire de la fonction $y(q) \in E(Q)$, $\|y\| = 1$. Alors en vertu du lemme de l'auteur que nous venons de citer, il existe un système de suites $\{q_{n,y,h,x}\}$ $(\|x\| \leqslant 1,\ x \in E(Q))$ tel que

$$\left|\frac{\|y + hx\| - \|y\|}{h} - \operatorname{Lim}_n x(q_{n,y}) \cdot \operatorname{sign} \lim_n y(q_{n,y})\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\operatorname{Lim}_n x(q_{n,y}) \operatorname{sign} \lim_n y(q_{n,y}) - \lim_n x(q_{n,y,h,x}) \operatorname{sign} \lim_n y(q_{n,y,h,x})| \tag{7}$$

et

$$||\lim_n y(q_{n,y,h,x})| - 1| \leqslant 2|h|. \tag{8}$$

Maintenant pour démontrer le théorème il suffit de montrer que le second membre de l'inégalité (7) tend vers zéro quand $h \to 0$ uniformément par rapport à $x, y \in E(Q)$ pour $\|y\| = 1$, $\|x\| \leqslant 1$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour chaque $0 < |h_p| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ il existe des $x_p, y_p \in E(Q)$, $\|x_p\| \leqslant 1$, $\|y_p\| = 1$ pour lesquels

$$|\lim_n x_p(q_{n,y_p}) \operatorname{sign} \lim_n y_p(q_{n,y_p}) -$$
$$- \lim_n x_p(q_{n,y_p,h_p,x_p}) \operatorname{sign} \lim_n y_p(q_{n,y_p,h_p,x_p})| \geqslant \varepsilon_0.$$

Prenons maintenant une suite $\{n_p\} \to \infty$ telle que

$$|x_p(q_{n_p,y_p}) - \lim_n x_p(q_{n,y_p})| \leqslant \frac{1}{p},$$
$$|y_p(q_{n_p,y_p}) - \lim_n y_p(q_{n,y_p})| \leqslant \frac{1}{p},$$
$$|x_p(q_{n_p,y_p,h_p,x_p}) - \lim_n x_p(q_{n,y_p,h_p,x_p})| \leqslant \frac{1}{p},$$
$$|y_p(q_{n_p,y_p,h_p,x_p}) - \lim_n y_p(q_{n,y_p,h_p,x_p})| \leqslant \frac{1}{p}.$$

Alors pour chaque p assez grand on a

$$|x_p(q_{n_p,y_p}) y_p(q_{n_p,y_p}) - x_p(q_{n_p,y_p,h_p,x_p}) y_p(q_{n_p,y_p,h_p,x_p})| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{9}$$

Comme $\lim_p |y_p(q_{n_p,y_p})| = 1$ et $\lim_p |y_p(q_{n_p,y_p,h_p,x_p})| = 1$, l'inégalité (9) contredit à la condition du théorème.

Le théorème est démontré.

Corollaire. Si E est un espace arbitraire de Banach, pour la dérivabilité forte uniforme de la norme il est nécessaire et suffisant que l'on ait: pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tel que les inégalités

$$f_1(x) > 1 - \delta_\varepsilon, \quad f_2(x) > 1 - \delta_\varepsilon (x \in E,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|f_1\| = \|f_2\| = 1)$$

entraînent

$$\|f_1 - f_2\| \leqslant \varepsilon;$$

autrement dit, l'espace conjugué $\overline{E}$ doit être uniformément convexe *.

* Cette proposition est un renforcement d' une affirmation de Mazur ([4], p. 79).

On peut formuler d'une manière analogue la condition de la dérivabilité forte de la norme dans l'espace conjugué.

Comme les espaces E et $\overline{E}$ ne peuvent être réguliers que simultanément[7] et comme un espace uniformément convexe est régulier[8], l'espace où la norme est fortement uniformément dérivable est régulier.

Université d'État.
Odessa.

Manuscrit reçu
le 23. III. 1940.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] V. Šmulian, Rec. Math., **6** (48), 1 (1939). [2] V. Šmulian, C. R. Acad. Sci. URSS, XXIV, No. 7 (1939). [3] S. Banach, Théorie des opérations linéaires (1932). [4] S. Mazur, Studia Mathem., IV, 71, 128 (1933). [5] G. Lorentz, C. R. Acad. Sci. URSS, I, No. 2—3 (1935). [6] Loc. cit.[1], p. 84, 85. [7] Успехи матем. наук, I, 115 (1936); B. I. Pettis, Bull. of Amer. Math. Soc., **44**, No. 6 (1938). [8] D. Milman, C. R. Acad. Sci. URSS, XX, No. 4 (1938); B. I. Pettis, Duke Math. Journal, **5**, No. 2, 249 (1939).