Учёные записки Кишинёвского университета
1967г., том 91, с. 91-102

И. В. ШРАГИН

НОРМА АМЕМИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОРЛИЧА-НАКАНО

Как известно [1]—[4], пространство Орлича L_M определяется заданием функции Юнга $M(u)$ и μ-измеримого множества X. Элементами пространства L_M являются μ-измеримые на X функции $u(x)$, для которых

$$\int\limits_X M[\alpha \mid u(x) \mid] \, d\mu < \infty$$

при достаточно малых $\alpha > 0$.

Х. Накано [5] обобщил это определение, заменив в нем функцию $M(u)$ функцией $M(u, x)$, $0 \leqslant u \leqslant \infty$, $x \in X$, которая при каждом x является функцией Юнга от u и при каждом u μ-измерима на X. Полученное таким путем пространство L_M является примером модулированного пространства, и в [5] оно названо модулированным функциональным пространством. В [6] пространство такого типа названо переменным пространством Орлича. Мы будем называть пространство L_M, порожденное функцией $M(u, x)$, **пространством Орлича-Накано**. Следует отметить, что случай, когда $M(u, x) = u^{p(x)}$, был рассмотрен Орличем в [7].

Начиная с работы [8], в которой впервые определено пространство Орлича, норма в L_M вводится по формуле.

$$\| u \| = \sup\left\{ \int\limits_X \mid u(x) \, v(x) \mid d\mu \mid \int\limits_X N[\mid v(x) \mid, \, x] \, d\mu \leqslant 1 \right\}, \qquad (0.1)$$

где $N(v, x)$ — функция Юнга, дополнительная к $M(u, x)$. Эту норму будем называть **нормой Орлича.**

Подобного типа норма определяется и в абстрактном модулированном пространстве R [5] и обозначается обычным образом, то есть символом $\| \; \|$. В том же пространстве R с элементами u и модуляром m вводится и другая норма $||| \; |||$, которая в [9] определяется формулой

$$||| u ||| = \inf\left\{ k > 0 \mid m(k^{-1} u) \leqslant 1 \right\} \qquad (0.2)$$

(т. е. $||| \; |||$ есть функционал Минковского множества $\{u \mid m(u) \leqslant 1\}$). Эти две нормы сопряжены между собой в определенном смысле и эквивалентны. Норму $||| \; |||$ мы будем называть **нормой Накано**, поскольку в [9] дано ее определение и изучены ее свойства. Для пространства L_M мы получим норму Накано, если положим в (0. 2)

$$m(u) = \int_X M\ [\ |u(x)|,\ x]\ d\mu.$$

В [9], § 83, доказывается формула

$$\|u\| = \inf\left\{\alpha^{-1}[1 + m(\alpha u)]\ \Big|\ 0 < \alpha < \infty\right\}, \qquad (0.3$$

которую, как указано в [9], получил И. Амемия. Для пространств Орлича-Накано соответствующая формула имеет вид

$$\|u\| = \inf\left\{\alpha^{-1}\left(1 + \int_X M\ [\alpha\left|u(x)\right|,\ x]\,d\mu\right)\ \Big|\ 0 < \alpha < \infty\right\}. \qquad (0.4$$

Для пространства Орлича (то есть, когда $M(u, x) = M(u)$) формула (0.4) доказана в [10] (см. также [11], [3]).

Заметим, что (0.4) не вытекает, как можно подумать, тривиальным образом из (0.3), поскольку выражение для нормы в (0.1) не является вообще говоря, частным случаем выражения для нормы $\|u\|$ в модулированном пространстве.

Формула (0.4) имеет то преимущество перед (0.1), что, во-первых она не использует дополнительную функцию Юнга, и во-вторых, инфимум в (0.4) берется по числовому множеству, а супремум в (0.1) — по множеству функций. В связи с этим представляет интерес такое построение теории пространств Орлича—Накано, при котором норма вводится по формуле (0.4). Так определенную норму мы назовем нормой Амемии.

В предлагаемой вниманию читателя работе изучаются начальные вопросы теории пространства Орлича—Накано, в котором определена норма Амемии. Работа состоит из трех параграфов. В § 1 излагаются необходимые для дальнейшего сведения о функциях Юнга M(u, x) и N(v, x). В § 2 рассматривается пространство Орлича—Накано. В это пространство вводится норма Амемии и изучаются ее свойства. В § 3 доказывается формула (0.4), т. е. совпадение нормы Амемии с нормой Орлича в пространстве Орлича—Накано.

§ 1. Функция Юнга и неравенство Юнга.

Пусть X — непустое множество; Λ — σ-алгебра его подмножеств μ—σ-конечная полная мера, определенная на Λ, причем $0 < \mu X \leqslant \infty$ [12]

Пусть функция $\varphi = \varphi(u, x)$, $0 \leqslant u \leqslant \infty$, $x \in X$, $0 \leqslant \varphi(u, x) \leqslant \infty$ удовлетворяет следующим условиям:

а) При каждом фиксированном $u \in [0, \infty]$ функция $\varphi(u, \cdot)$ μ-измерима на X.

б) При каждом фиксированном $x \in X$ функция $\varphi(\cdot, x)$ не убывает на $[0, \infty]$, причем $\varphi(0, x) = 0$ и $\varphi(u - 0, x) = \varphi(u, x)$ для любого $u \in (0, \infty]$.

в) При любом $x \in X$

$$0 \leqslant \varphi(+0, x) < \infty \text{ и } 0 < \varphi(\infty - 0, x) = \varphi(\infty, x) \leqslant \infty.$$

Функция Юнга $M = M(u, x)$, $0 \leqslant u \leqslant \infty$, $x \in X$, определяется равенством

$$M(u, x) = \int_0^u \varphi(t, x)\,dt.$$

Функция Юнга, как нетрудно проверить, обладает следующими свойствами:

а) При каждом фиксированном $u \in [0, \infty]$ функция $M(u, \cdot)$ μ-измерима на X;

б) При каждом фиксированном $x \in X$ функция $M(\cdot, x)$ не убывает на $[0, \infty]$, причем $M(0, x) = 0$, $M(\infty, x) = \infty$, $M(u-0, x) = M(u, x)$ для любого $u \in (0, \infty]$ и $M(u+0, x) = M(u, x)$ при $0 \leqslant u < d_M(x)$,

где

$$d_M(x) = \sup\{u \mid M(u, x) < \infty\} = \sup\{u \mid \varphi(u, x) < \infty\}.$$

в) При каждом фиксированном $x \in X$ функция $M(\cdot, x)$ выпукла на $[0, \infty]$ и, следовательно, удовлетворяет неравенству Иенсена: при любых $u, v \in [0, \infty]$ и $\alpha \in [0, 1]$

$$M(\alpha u + (1-\alpha) v, x) \leqslant \alpha M(u, x) + (1-\alpha) M(v, x).$$

Положим при $x \in X$

$$c_M(x) = \max\{u \mid M(u, x) = 0\} = \max\{u \mid \varphi(u, x) = 0\}.$$

Из свойства в) функции φ следует, что при любом $x \in X$

$$0 < d_M(x) \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant c_M(x) < \infty.$$

Убедимся в μ-измеримости функций c_M и d_M. С этой целью занумеруем все неотрицательные рациональные числа в последовательность $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ и для произвольного $a \in (-\infty, \infty)$ положим

$$D_a = \{n \mid r_n > a\}.$$

μ-измеримость функций c_M и d_M следует из равенств

$$\{x \mid c_M(x) > a\} = \bigcup_{n \in D_a} \{x \mid M(r_n, x) = 0\},$$

$$\{x \mid d_M(x) > a\} = \bigcup_{n \in D_a} \{x \mid M(r_n, x) < \infty\}$$

и свойства а) функции M.

Лемма 1.1. При любом $x \in X$ отношение $\frac{M(u, x)}{u}$ не убывает по u и при этом

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(u, x)}{u} = \varphi(\infty, x).$$

Доказательство. Из выпуклости функции Юнга следует [3], стр. 17—18, что отношение $M(u, x) u^{-1}$ не убывает по u.

Так как $M(u, x) \leqslant \varphi(u, x) u$, то

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(u, x)}{u} \leqslant \varphi(\infty, x)$$

Возьмем произвольное $u_0 > 0$ и $u > u_0$. Тогда $M(u, x) \geqslant \varphi(u_0, x)(u - u_0)$. Следовательно,

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(u, x)}{u} \geqslant \varphi(u_0, x),$$

откуда

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(u, x)}{u} \geqslant \lim_{u_0\to\infty} \varphi(u_0, x) = \varphi(\infty, x).$$

Лемма доказана.

Определим теперь функцию $\psi = \psi(v, x)$, $v \in [0, \infty]$, $x \in X$, следующим образом:

$$\psi(v, x) = \begin{cases} 0 \text{ при } v = 0, \\ \sup\left\{u \,\middle|\, \varphi(u, x) < v\right\} \text{ при } 0 < v \leqslant \infty. \end{cases}$$

Функция ψ, как нетрудно проверить, обладает всеми свойствами, которые входят в определение функции φ, и при этом

$$\varphi(u, x) = \sup\left\{v \,\middle|\, \psi(v, x) < u\right\},\ 0 < u \leqslant \infty,\ x \in X.$$

В частности, μ-измеримость функции $\psi(v, \cdot)$ следует из равенства:

$$\left\{x \,\middle|\, \psi(v, x) > a\right\} = \bigcup_{n\in D_a} \left\{x \,\middle|\, \varphi(r_n, x) < v\right\}$$

при любых $v > 0$ и $a \in (-\infty, \infty)$. Здесь r_n и D_a имеют тот же смысл, что и при доказательстве μ-измеримости функций c_M и d_M Функция Юнга N,

$$N(v, x) = \int_0^v \psi(t, x)\, dt,\ 0 \leqslant v \leqslant \infty,\ x \in X,$$

называется дополнительной к M. Как следует из предыдущего, функция M, в свою очередь, дополнительна к N.

При каждом $x \in X$ имеет место неравенство Юнга [13], [1], [14], [15]

$$uv \leqslant M(u, x) + N(v, x),\ 0 \leqslant u, v \leqslant \infty.$$

При этом, если $u \in [0, \infty]$ и $\varphi(u, x) \leqslant v \leqslant \varphi^+(u, x)$, то

$$uv = M(u, x) + N(v, x). \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем $\varphi^+(u, x) = \varphi(u+0, x)$ при $0 \leqslant u < \infty$ и $\varphi^+(\infty, x) = \infty$.

Замечание 1.1. Из (1.1) следует, что если $uv < \infty$, где

$$v \in [\varphi(u, x), \varphi^+(u, x)], \quad \text{то } N(v, x) < \infty.$$

§ 2. Пространство Орлича-Накано и норма Амемии.

Пусть S — множество всех μ-измеримых на X функций со значениями в расширенной вещественной прямой, либо расширенной комплексной плоскости. При этом предполагается, что функции u и v из S, для которых $u(x) = v(x)$ почти всюду на X, определяют один и тот же элемент множества S, т. е. $u = v$.

Если $u, v \in S$ и $u(x) \leqslant v(x)$ $(u(x) < v(x))$ почти всюду на X, то будем писать: $u \leqslant v$ (соответственно, $u < v$). Множество $\{u \in S \mid u \geqslant 0\}$ будем обозначать через S_+.

Пусть M — функция Юнга. Нетрудно показать, что если $u \in S$, то и $M[\,|u(\cdot)|,\ \cdot\,] \in S$. Положим при $\alpha > 0$

$$I_M(\alpha u) = \int M[\alpha\,|u(x)|,\ x]\,d\mu$$

(здесь и в дальнейшем через $\int$ обозначается интеграл по X).

Пространством Орлича-Накано называется множество

$$L_M = \bigcup_{0<\alpha<\infty} \left\{ u \in S \,\middle|\, I_M(\alpha u) < \infty \right\}.$$

Нетрудно проверить, используя свойства функции Юнга, что L_M состоит из почти везде конечных функций и является (относительно естественно определенных операций сложения и умножения на скаляры) векторным пространством над полем вещественных или комплексных чисел. Через θ будем обозначать нулевой элемент пространства L_M.

Покажем, что в пространстве L_M имеются ненулевые элементы. В самом деле, так как $d_M > \theta$, то существует такое число $a > 0$, что $\mu A > 0$, где $A = \{x \mid d_M(x) > a\}$. Тогда $M(a, x) < \infty$ при любом $x \in A$ Затем можно найти такое множество $B \subset A$, что $0 < \mu B < \infty$ и $b < \infty$, где $b = \sup\{M(a, x) \mid x \in B\}$ (при этом, в частности, используется σ-конечность меры μ). Положим $u = a\chi_B$ (χ_B — характеристическая функция множества B). Тогда

$$u \neq \theta \text{ и } I_M u \leqslant b \cdot \mu B < \infty, \text{ т. е. } u \in L_M.$$

Пусть $u \in S$. Положим при $\alpha \in (0, \infty)$

$$f(\alpha, u) = \alpha^{-1}(I_M(\alpha u) + 1).$$

Лемма 2.1. Для любой функции $u \in S$

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha, u) = \int |u(x)|\,\varphi(\infty, x)\,d\mu.$$

Доказательство. Положим $Y = \{x \mid u(x) \neq 0\}$.

Используя лемму 1.1 и теорему Б. Леви о пределе интеграла от монотонной последовательности функций, получим

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha, u) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} I_M(\alpha u) = \int_Y |u|\,\varphi(\infty, \cdot)\,d\mu = \int |u|\,\varphi(\infty, \cdot)\,d\mu.$$

Для произвольной функции $u \in S$ норма Амемии определяется формулой

$$\|u\| = \inf\left\{ f(\alpha, u) \,\middle|\, 0 < \alpha < \infty \right\}.$$

Эта норма обладает следующими свойствами.

1) $0 \leqslant \|u\| \leqslant \infty$ и при этом $\|u\| < \infty$ тогда и только тогда, когда $u \in L_M$.

2) Если $u = v$, то $\|u\| = \|v\|$ (корректность определения нормы).

3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ для любого скаляра λ.

4) Если $|u| \leqslant |v|$, то $\|u\| \leqslant \|v\|$ (монотонность нормы).

Доказательства свойств 1) —4), ввиду их простоты, опущены.

5) $\| \, |u| + |v| \, \| \leqslant \|u\| + \|v\|$ для любых $u, v \in S$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем такие $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, что $f(\alpha, u) \leqslant \|u\| + \varepsilon$, $f(\beta, v) \leqslant \|v\| + \varepsilon$. Отсюда и из неравенства Иенсена получим:

$$\|u\| + \|v\| + 2\varepsilon \geqslant f(\alpha, u) + f(\beta, v) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\left[1 + \frac{\beta I_M(\alpha u) + \alpha I_M(\beta v)}{\alpha+\beta}\right] \geqslant$$

$$\geqslant f\left(\alpha\beta(\alpha+\beta)^{-1}, \ |u| + |v|\right) \geqslant \| \, |u| + |v| \, \|.$$

Так как ε произвольно, то свойство 5) доказано.

Из свойств 4) и 5) следует, что если $u, v \in L_M$, то

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

6) Если $\|u\| = 0$, то $u = \theta$.

Доказательство. Предположим, что $u \neq \theta$. Тогда из леммы 2.1 и свойства в) функции φ следует, что $\lim\limits_{\alpha\to\infty} f(\alpha, u) > 0$. Следовательно, найдутся такие положительные числа a и α_0, что $f(\alpha, u) > a$ при всех $\alpha > \alpha_0$. С другой стороны, $f(\alpha, u) \geqslant \alpha_0^{-1}$ при $\alpha \leqslant \alpha_0$ Следовательно, $\|u\| > 0$. Свойство 6) доказано.

Таким образом, пространство Орлича-Накано с нормой Амемии удовлетворяет всем аксиомам нормированного пространства.

Важное свойство нормы Амемии устанавливает

Теорема 2.1. Если $u_n \in S_+$, $n = 1, 2 \cdots$, и $u_n \nearrow u$ (т. е. почти всюду на X последовательность $\{u_n(x)\}$, монотонно возрастая, стремится к $u(x)$), то $\|u_n\| \nearrow \|u\|$.

Доказательство. Из свойства монотонности нормы следует, что

$$\lim \|u_n\| \text{ существует и } \lim \|u_n\| \leqslant \|u\|.$$

Предположим, что $\lim \|u_n\| < \|u\|$ и возьмем такое число b, что

$$\lim \|u_n\| < b < \|u\|.$$

Из леммы 2.1 и определения $\|u\|$ следует, что

$$\|u\| \leqslant \int u(x)\varphi(\infty, x)d\mu. \tag{2.1}$$

Так как $\int u\varphi(\infty, \cdot)\,d\mu = \lim \int u_n \varphi(\infty, \cdot)\,d\mu$, то найдется такое натуральное p, что $\int u_p \varphi(\infty, \cdot)\,d\mu > b$. Снова применяя лемму 2.1, найдем такое $\alpha_0 > 0$, что $f(\alpha, u_p) > b$ при $\alpha > \alpha_0$. Тогда $f(\alpha, u_n) > b$ при $\alpha > \alpha_0$ и $n \geqslant p$. Кроме того, $f(\alpha, u_n) \geqslant \alpha^{-1} > b$ при $\alpha < b^{-1}$ и $n \geqslant p$.

С другой стороны, так как $\|u_n\| < b$, то для любого $n \geqslant p$ найдется такое α_n, что $f(\alpha_n, u_n) \leqslant b$. Отсюда и из предыдущего следует, что $b^{-1} \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0$ при любом $n \geqslant p$. Тогда $b^{-1} \leqslant \overline{\lim}\, \alpha_n \leqslant \alpha_0$.

Воспользуемся следующим, легко проверяемым, свойством функции Юнга: для любой последовательности чисел $a_n \in [0, \infty]$ и любого $x \in X$

$$M(\underline{\lim}\, a_n, \ x) \leqslant \underline{\lim}\, M(a_n, x).$$

Применяя это свойство, теорему Фату из теории интеграла Лебега [16], стр. 292, и свойства нижнего и верхнего пределов, получим

$$f(\underline{\lim}\, \alpha_n,\ u) \leqslant \frac{1+\underline{\lim}\, I_M(\alpha_n u_n)}{\underline{\lim}\, \alpha_n} \leqslant \overline{\lim}\, f(\alpha_n,\ u_n) \leqslant b.$$

Следовательно, $f(\underline{\lim}\, \alpha_n,\ u) < \| u \|$, что противоречит определению $\| u \|$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 легко следует „лемма Фату" для нормы Амемии ($\| \underline{\lim}\, u_n \| \leqslant \underline{\lim}\, \| u_n \|$ для любой последовательности функций $u_n \in S_+$). С помощью этой леммы можно традиционным путем доказать полноту пространства Орлича-Накано относительно нормы Амемии.

Лемма 2.2 Если $\| u \| \leqslant 1$, то $I_M u \leqslant \| u \|$.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\| u \| \leqslant 1$, то $I_M u \leqslant 1$.

Пусть $\| u \| < 1$. Тогда найдется такое $\bar\alpha > 0$, что $f(\bar\alpha,\ u) < 1$. Отсюда следует, что $\bar\alpha - 1 > I_M(\bar\alpha u)$. Так как $\bar\alpha > 1$, то, как вытекает из неравенства Иенсена, $I_M(\bar\alpha u) \geqslant \bar\alpha I_M u$. Следовательно,

$$I_M\, u < 1 - \bar\alpha^{-1} < 1.$$

Пусть теперь $\| u \| = 1$. Тогда, как только что доказано, $I_M(\lambda u) < 1$ при любом $\lambda \in (0,\ 1)$. Следовательно, $I_M u \leqslant 1$.

Из доказанного следует, что если $0 < \| u \| < \infty$, то

$$I_M\left(\frac{u}{\| u \|}\right) \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Отсюда и из неравенства Иенсена вытекает утверждение леммы.

С помощью неравенства (2.2) легко доказать (см. [2], [3]) эквивалентность нормы Амемии $\| \ \|$ и нормы Накано $|||\ |||$,

$$|||u||| = \inf\left\{k > 0 \,\middle|\, I_M(k^{-1} u) \leqslant 1\right\}.$$

Точнее говоря, для любой функции $u \in S$

$$|||u||| \leqslant \| u \| \leqslant 2|||u|||.$$

§ 3. Совпадение нормы Амемии с нормой Орлича

Обозначим через ω норму Орлича, определенную на S, т. е.

$$\omega(u) = \sup\left\{ \int |\, uv \,|\, d\mu \,\middle|\, I_N\, v \leqslant 1\right\},$$

где N — функция Юнга, дополнительная к M.

Основная цель этого параграфа — доказать, что для любой функции $u \in S$

$$\| u \| = \omega(u), \tag{3.1}$$

где $\| u \|$ — норма Амемии, определенная в § 2.

Прежде всего заметим, что если $u \in S, I_N\, v \leqslant 1$ и $0 < \alpha < \infty$, то, как следует из неравенства Юнга,

$$\int |\, uv \,|\, d\mu \leqslant (I_M(\alpha u) + 1)\, \alpha^{-1} = f(\alpha,\ u).$$

Лемма 3.1. Пусть $u \in S_+$. Если существует $\beta \in (0, \infty)$ и $\lambda \in S_+$, такие, что $\varphi_{\beta u} \leqslant \lambda \leqslant \varphi^+_{\beta u}$ и $I_N \lambda = 1$, то

$$\| u \| = f(\beta, u) = \int u \lambda \, d\mu = \omega(u).$$

Доказательство. Из (1.1) следует что $\beta \int u\lambda \, d\mu = I_M(\beta u) + 1$.

Следовательно, $\| u \| \leqslant f(\beta, u) = \int u \lambda \, d\mu \leqslant \omega(u)$. Отсюда и из (3.2) вытекает утверждение леммы.

Лемма 3.2. Пусть $u \in S_+$. Если $I_N \varphi_{\alpha u} \leqslant 1$ при всех $\alpha \in (0, \infty)$, то

$$\| u \| = \int u \varphi(\infty, \cdot) \, d\mu = \omega(u).$$

Доказательство. Из условия следует, что $\int u \varphi_{\alpha u} \, d\mu \leqslant \omega(u)$ при всех $\alpha \in (0, \infty)$. Перейдя к пределу при $\alpha \to \infty$, получим, что

$$\int u \varphi(\infty, \cdot) \, d\mu \leqslant \omega(u).$$

Остается применить (2.1) и (3.2).

Лемма 3.3. Пусть $u \in S_+$, причем $u < \infty$. Если множество

$$D = \left\{ \alpha \in (0, \infty) \, \middle| \, 1 \leqslant I_N \varphi_{\alpha u} < \infty \right\}$$

не пусто, то $\beta = \inf D > 0$ и существует такая функция $\lambda \in S_+$, что

$$\varphi_{\beta u} \leqslant \lambda \leqslant \varphi^+_{\beta u} \text{ и } I_N \lambda = 1;$$

следовательно в силу леммы 3.1,

$$\| u \| = f(\beta, u) = \int u \lambda \, d\mu = \omega(u),$$

Доказательство. Из условий леммы, с помощью теоремы Лебега о пределе интеграла, следует, что

$$\lim_{\alpha \to 0} I_N \varphi_{\alpha u} = 0.$$

Следовательно, $\beta > 0$. Далее, так как

$$\lim_{\alpha \to \beta - 0} I_N \varphi_{\alpha u} = I_N \varphi_{\beta u},$$

то $I_N \varphi_{\beta u} \leqslant 1$. Если $I_N \varphi_{\beta u} = 1$, то все доказано ($\lambda = \varphi_{\beta u}$).

Пусть $I_N \varphi_{\beta u} < 1$, то есть $\beta \overline{\in} D$. Тогда, так как

$$\lim_{\alpha \to \beta + 0} I_N \varphi_{\alpha u} = I_N \varphi^+_{\beta u},$$

то $1 \leqslant I_N \varphi^+_{\beta u} < \infty$. Положим при $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$

$$\Phi(\gamma) = \int N \left[\gamma \varphi^+_{\beta u}(x) + (1 - \gamma) \varphi_{\beta u}(x), x \right] d\mu.$$

Так как функция Φ непрерывна на $[0,1]$, причем $\Phi(0) < 1$, а $\Phi(1) \geqslant 1$, то $\Phi(\gamma_0) = 1$ при некотором $\gamma_0 \in (0, 1]$, то есть $I_N \lambda = 1$, где

$$\lambda = \gamma_0 \varphi^+_{\beta u} + (1 - \gamma_0)\varphi_{\beta u}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4. Если $u \in L_M \cap S_+$, то $I_N \varphi_{\alpha u} < 1$ при $\alpha \in (0, a]$, где $a = \|u\|^{-1}$ при $u \neq \theta$ и $a = \infty$ при $u = \theta$.

Доказательство. Докажем, что если $\|u\| = 1$, то $I_N \varphi_u < 1$. Отсюда, как очевидно, будет следовать утверждение леммы.

Предположим, что $I_N \varphi_u \geqslant 1$. Тогда, как нетрудно видеть, $I_M u > 0$. Если $I_N \varphi_u = 1$, то, в силу леммы 3.1, $\|u\| = f(1, u) > 1$, что противоречит условию $\|u\| = 1$.

Пусть теперь $I_N \varphi_u > 1$. Тогда найдется такое $\delta \in (0, 1)$, что $I_N \varphi_{\delta u} > 1$. Так как $\|u\| = 1$, то согласно лемме 2.2 $I_M u \leqslant 1$. Следовательно, $u \leqslant d_M$. Отсюда следует, что $\varphi_{\delta u} < \infty$ и, в силу замечания 1.1,

$$N[\varphi_{\delta u}(\cdot), \cdot] < \infty.$$

Пусть $\{X_n\}$ — такая возрастающая последовательность μ-измеримых множеств, что $0 < \mu X_n < \infty$ и $\lim X_n = X$.

Положим

$$Y_n = \left\{x \,\middle|\, N[\varphi_{\delta u}(x), x] \leqslant n\right\} \cap X_n \text{ и } u_n = u\chi_{Y_n}, \quad n = 1, 2 \cdots.$$

Тогда $I_N \varphi_{\delta u_n} < \infty$ при любом n. Так как $u_n \nearrow u$, то найдется такой номер m, что $I_N \varphi_{\delta u_m} \geqslant 1$.

Согласно лемме 3.3, существует такое $\beta \in (0, \delta]$, что $\|u_m\| = f(\beta, u_m)$. Следовательно, $\|u\| \geqslant \|u_m\| \geqslant \beta^{-1} \geqslant \delta^{-1} > 1$.

Это противоречие и завершает доказательство,

Замечание 3.1. При доказательстве равенства (3.1) мы воспользуемся теоремой 2.1 и аналогичным, легко проверяемым, свойством нормы Орлича: если $u_n \in S_+$ и $u_n \nearrow u$, то $\omega(u_n) \nearrow \tilde{\omega}(u)$. Следовательно, если $|u_n| \nearrow |u|$ и $\|u_n\| = \omega(u_n)$, $n = 1, 2, \cdots$, то $\|u\| = \omega(u)$.

Функцию $u \in S$ назовем **финитно ограниченной**, если $\operatorname{vrai\,sup}|u| < \infty$

$$\text{и } \mu\left\{x \,\middle|\, u(x) \neq 0\right\} < \infty.$$

Лемма 3.5. Если $u \in S_+$, то существует такая последовательность финитно ограниченных функций $u_n \in L_M \cap S_+$, что $u_n \nearrow u$.

Доказательство. Положим

$$X_f = \left\{x \,\middle|\, u(x) < \infty\right\}, \quad X_\infty = \left\{x \,\middle|\, u(x) = \infty\right\},$$

$$Y_n = \left\{x \in X_f \,\middle|\, M(n^{-2}u(x), x \leqslant n\right\} \cap \left\{x \in X_f \,\middle|\, u(x) \leqslant n\right\} \cap X_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$Z_n = \left\{x \in X_\infty \,\middle|\, M(n^{-1}, x) \leqslant n\right\} \cap X_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

где X_n — множества, определенные в лемме 3.4.

Пусть $u_n = u \cdot \chi_{Y_n} + n\chi_{Z_n}$. Тогда $u_n \nearrow u$. Кроме того, функции u_n финитно ограничены и $u_n \in L_M$, так как

$$\int M[n^{-2}u_n(x), x]\, d\mu = \int_{Y_n} + \int_{Z_n} \leqslant n(\mu Y_n + \mu Z_n) \leqslant n \cdot \mu X_n < \infty.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.1. Если $u \in S$, то $\| u \| = \omega(u)$.

Доказательство. Без ограничения общности будем предполагать, что $u \in S_+$. Далее, в силу замечания 3.1 и леммы 3.5, можно считать, что функция u финитно ограничена и $u \in L_M$. Мы можем также предполагать, что $u \neq \Theta$.

Положим $Y = \left\{ x \,\middle|\, u(x) > 0 \right\}$. Тогда $0 < \mu Y < \infty$. μY

Определим на X при $m = 1, 2, \cdots$ функции g_m:

$$g_m(x) = \begin{cases} m & \text{при } x \in \left\{ x \,\middle|\, d_M(x) = \infty \right\}, \\ (m-1)\, m^{-1} d_M(x) & \text{при } x \in \left\{ x \,\middle|\, d_M(x) < \infty \right\}. \end{cases}$$

тогда функции $f_m = N(\varphi_{g_m}(\cdot), \cdot)$, в силу замечания 1.1, конечны на X и образуют возрастающую последовательность.

Нетрудно построить такую возрастающую последовательность измеримых множеств $Y_n \subset Y$, что $\mu(Y \setminus Y_n) \to 0$, и каждая из функций f_m ограничена на каждом из множеств Y_n. Тогда $u_n = u \chi_{Y_n} \nearrow u$. В силу замечания 3.1, мы можем в дальнейшем считать, что все функции f_m ограничены на Y.

Еще раз мы используем замечание 3.1, если $\mu Z > 0$, где

$$Z = \left\{ x \in Y \,\middle|\, d_M(x) < \infty \right\}.$$

В этом случае положим

$$Q = \operatorname{vrai\,sup} (u d_M^{-1}).$$

Тогда $0 < Q \leqslant \infty$. Возьмем такую последовательность чисел Q_n, что $0 < Q_n < Q$ и $Q_n \nearrow Q$, и положим $u_n = \min(u, Q_n\, d_M)$. Тогда

$$u_n \nearrow u, \quad u_n \leqslant Q_n d_M \quad \text{и} \quad \mu \left\{ x \,\middle|\, u_n(x) = Q_n d_M(x) \right\} > 0.$$

Таким образом, если $\mu Z > 0$, то, в силу замечания 3.1, можно предполагать существование такого числа $\gamma \in (0, \infty)$, что $u \leqslant \gamma d_M$ и $\mu A > 0$, где

$$A = \left\{ x \,\middle|\, u(x) = \gamma\, d_M(x) \right\}.$$

Положим при $0 < \alpha < \infty$

$$F(\alpha) = I_N\, \varphi_{\alpha u}.$$

Согласно лемме 3.4, $F(\alpha) < 1$ при достаточно малых α.

Положим $\beta = \sup \left\{ \alpha \,\middle|\, F(\alpha) < 1 \right\}$. Тогда $0 < \beta \leqslant \infty$. Рассмотрим все возможные случаи.

I) $\beta = \infty$. Тогда $\| u \| = \omega(u)$ по лемме 3.2.

II) $\beta < \infty$, $\mu Z = 0$. Возьмем произвольное $\alpha > \beta$ и натуральное $m \geqslant \alpha \cdot \operatorname{vrai\,sup} u$. Тогда

$$1 \leqslant F(\alpha) \leqslant \int_Y N[\varphi(m, x), x]\, d\mu = \int_Y f_m\, d\mu < \infty.$$

Отсюда и из леммы 3.3 следует, что $\| u \| = \omega(u)$.

Пусть $\beta < \infty$, $\mu Z > 0$. Так как $\beta u \leqslant d_M$ (в силу того, что $F(\beta) \leqslant 1$) и $\mu A > 0$, то $\beta\gamma \leqslant 1$.

III) $\beta < \infty$, $\mu Z > 0$, $\beta\gamma < 1$.

Возьмем $\alpha \in (\beta, \gamma^{-1})$ и такое натуральное m, что $(m-1)m^{-1} \geqslant \alpha\gamma$ и $m \geqslant \alpha \cdot \operatorname{vrai}\sup u$. Тогда $1 \leqslant F(\alpha) \leqslant$

$$\leqslant \int\limits_{Z} N\left[\varphi\left(\frac{m-1}{m} d_M(x), x\right), x\right] d\mu + \int\limits_{Y\setminus Z} N[\varphi(m, x), x]\, d\mu = \int\limits_{Y} f_m\, d\mu < \infty.$$

Отсюда и из леммы 3.3 следует, что $\|u\| = \omega(u)$.

IV) $\beta < \infty$, $\mu Z > 0$, $\beta\gamma = 1$. В этом случае

$$\int\limits_A N[\varphi(d_M(x), x), x]\, d\mu = \int\limits_A N[\varphi_{\beta u}(x), x]\, d\mu \leqslant F(\beta) \leqslant 1.$$

Следовательно, $\varphi(d_M(x), x) < \infty$ почти всюду на A. Кроме того, $d_M(x) < \infty$ почти всюду на A. Отсюда и из замечания 1.1 следует, что почти всюду на A

$$N[\varphi(d_M(x), x) + b, x] < \infty \tag{3.3}$$

при каждом $b \in [0, \infty)$ (следует учесть, что $\varphi^+(d_M(x), x) = \infty$).

Далее, так как $N(v, x) \nearrow \infty$ при $v \nearrow \infty$, то найдется такое $b_0 \in (0, \infty)$, что

$$\int\limits_A N[\varphi(d_M(x), x) + b_0, x]\, d\mu > 1.$$

Отсюда и из (3.3) следует существование такого множества $B \subset A$, что

$$1 \leqslant \int\limits_B N[\varphi(d_M(x), x) + b_0, x]\, d\mu < \infty, \tag{3.4}$$

Тогда функция Φ,

$$\Phi(b) = \int\limits_B N[\varphi(d_M(x), x) + b, x]\, d\mu,$$

непрерывна в промежутке $0 \leqslant b \leqslant b_0$. При этом, так как $F(\beta) \leqslant 1$, то

$$\Phi(0) = \int\limits_B N[\varphi_{\beta u}(x), x]\, d\mu \leqslant 1 - \int\limits_{X\setminus B} N[\varphi_{\beta u}(x), x]\, d\mu,$$

а в силу (3.4),

$$\Phi(b_0) \geqslant 1 - \int\limits_{X\setminus B} N[\varphi_{\beta u}(x), x]\, d\mu.$$

Следовательно, при некотором $\overline{b} \in [0, b_0]$

$$\Phi(\overline{b}) = 1 - \int\limits_{X\setminus B} N[\varphi_{\beta u}(x)\, x]\, d\mu.$$

Положим

$$\lambda(x) = \begin{cases} \varphi(d_M(x), x) + \overline{b} & \text{при } x \in B, \\ \varphi(\beta u(x), x) & \text{при } x \in X\setminus B. \end{cases}$$

Тогда $I_N\lambda = 1$ и $\varphi_{\beta u} \leqslant \lambda \leqslant \varphi^+_{\beta u}$. Отсюда и из леммы 3.1 следует, что $\|u\| = \omega(u)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zaanen A. C. Linear analysis, N.-Y., 1953.
2. Luxemburg W. A. J. Banach function spaces. Assen, 1955.
3. Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. 1-е изд., М.—Л., 1939; 2-е изд. М., 1965.
5. Nakano H. Modulared semi-ordered linear spaces. Tokyo, 1950.
6. Heckscher S. Variable Orlicz spaces. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A 64, № 2 (1961), 229—41.
7. Orlicz W. Über konjugierte Exponentenfolgen. Stud. Mathem., 3 (1931), 200—11.
8. Orlicz W. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. Intern. Acad. Pol., Sér., A, №№ 8—9, (1932), 207—20.
9. Nakano H. Topology and linear topological spaces., Tokyo, 1951.
10. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Conjugate spaces of Orlicz spaces. Proc. Kon. nederl. akad. wet., A 59, № 2 (1956), 217—28.
11. Milnes H. W. Convexity of Orlicz spaces. Pacif. J. Math., 7, № 3, (1957), 1451—83.
12. Халмош П. Теория меры. М., 1953.
13. Young W. H. On classes of summable functions and ther Fourier series. Proc. Royal Soc., 87, № A594 (1912), 225—9.
14. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1957.
15. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е. и Полиа Г. Неравенства. М., 1948.
16. Рудин У. Основы математического анализа. М., 1966.