УДК 517.98

Ф. А. СУКОЧЕВ

(en)-ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В работе вводится отношение эквивалентности в классе всех симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к конечной непрерывной алгебре фон Неймана, аналогичное отношению (en)-эквивалентности для симметричных идеалов измеримых функций [1]. Изучаются порядковые свойства норм симметричных пространств. Описываются крайние точки орбит измеримых операторов. Терминология и обозначения взяты из [1—3].

1. Пусть M — конечная непрерывная алгебра фон Неймана; μ — точный нормальный след на M; $L_1(M, \mu)$ — банахово пространство всех интегрируемых операторов, присоединенных к M [3]. Перестановкой оператора A называют функцию $\widetilde{A}(\alpha) \in L_1((0, \mu(1))$, вычисляемую по формуле

$$\widetilde{A}(\alpha) = \inf\{\lambda : \mu(1 - E_\lambda) < \alpha\},$$

где 1 — единица в M и $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство оператора $|A|$ (см. [2]). Симметричное пространство на алгебре M есть нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_X) \subset L_1(M, \mu)$, для которого из соотношений $A \in X$ и $\widetilde{B}(\alpha) \leqslant \widetilde{A}(\alpha)$, $B \in L_1(M, \mu)$ следуют $B \in X$ и $\|B\|_X \leqslant \|A\|_X$. Любое симметричное пространство X-идеально (т. е. из $|B| \leqslant |A|$, $A \in X$, $B \in L_1(M, \mu)$ вытекает $B \in X$ и $\|B\|_X \leqslant \|A\|_X$ и $A^* \in X$ для любого $A \in X$).

Для каждой максимальной коммутативной подалгебры N из M положим $(X)_N = X \cap L_1(N, \mu)$. Очевидно, что $(X)_N$ — симметричное пространство на N в индуцированной из X норме.

Как и в теории банаховых решеток, норму симметричного пространства X будем называть порядково непрерывной, монотонно полной, порядково полунепрерывной, если выполнены условия:

(A) из $\{T_n\} \subset X$, $T_n \downarrow 0$ следует $\|T_n\|_X \to 0$;

(B) из $T_n \geqslant 0$, $T_n \uparrow$, $T_n \in X$, $\sup\limits_n \|T_n\|_X < \infty$ следует существование такого $T \in X$, что $T_n \uparrow T$;

(C) из $T, T_n \in X$, $T_n \uparrow T$ следует $\|T_n\|_X \to \|T\|_X$.

Пусть X_i — симметричное пространство на конечной непрерывной алгебре фон Неймана M_i $(i = 1, 2)$. Считаем, что X_1 (en)-эквивалентно X_2 (ср. [1]), если для любых $A_1 \in X_1$, $B_2 \in X_2$ существуют такие $B_1 \in X_1$, $A_2 \in X_2$, что $\widetilde{A}_1(\alpha) = \widetilde{A}_2(\alpha)$, $\widetilde{B}_2(\alpha) = \widetilde{B}_1(\alpha)$. Отношение (en)-эквивалентности, очевидно, справедливо на множестве всех симметричных пространств.

Теорема 1. Пусть X — симметричное пространство на M, Тогда X (en)-эквивалентно $(X)_N$ для любой максимальной коммутативной $*$-подалгебры N в M.

Следствие 1. X_1 (en)-эквивалентно X_2 в том и только в том случае, когда существуют такие максимальные коммутативные $*$-подалгебры $N_i \subset M_i$ $(i = 1, 2)$, что $(X_1)_{N_1}$ (en)-эквивалентно $(X_2)_{N_2}$.

Теорема 2 (ср. [1]). Свойства (A), (B), (C) нормы симметричного пространства (en)-инвариантны (т. е. инвариантны относительно (en)-эквивалентности).

След μ на M назовем сепарабельным, если логика проекторов в M сепарабельна относительно топологии сходимости по мере, порожденной μ (см. [4]).

Теорема 3 (ср. [4]). Если след μ сепарабелен, то симметричное пространство X сепарабельно тогда и только тогда, когда норма X порядково непрерывна.

Банахово пространство X обладает свойством Крейна — Мильмана, если любое замкнутое, ограниченное, выпуклое множество в X совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Теорема 4 (ср. [5]). Если след μ сепарабелен, то симметричное пространство X обладает свойством Крейна — Мильмана тогда и только тогда, когда норма X порядково непрерывна, монотонно полна и $X \neq L_1(M, \mu)$.

Следствие 2. Свойства сепарабельности симметричного пространства X и Крейна — Мильмана (en)-инвариантны в классе симметричных пространств на алгебрах с сепарабельным следом.

2. Орбитой оператора $A \in L_1(M, \mu)$ назовем выпуклое множество

$$\Omega(A) = \left\{B \in L_1(M, \mu) : \int_0^s \widetilde{B}(\alpha)\, d_\alpha \leqslant \int_0^s \widetilde{A}(\alpha)\, d_\alpha \text{ для любого } s \in (0, 1)\right\}.$$ Через

$I(A)$ обозначим множество всех $B \in L_1(M, \mu)$, для которых $\widetilde{B}(\alpha)=\widetilde{A}(\alpha)$.

Теорема 5. (ср. [6]). $I(A)$ — замкнутое подмножество в $L_1(M, \mu)$, а выпуклая оболочка $I(A)$ плотна в $\Omega(A)$.

Рассмотрим в $L_1(M, \mu)$ слабую топологию, порожденную семейством полунорм $p_н(B)=|\mu(BH)|$; $H \in M$.

Теорема 6 (ср. [6, 7]). $\Omega(A)$ компактно в слабой топологии и, если след μ сепарабелен, то $I(A)$ слабо плотно в $\Omega(A)$.

Обозначим через $\varepsilon(A)$ множество всех крайних точек орбиты $\Omega(A)$. Полное описание множества $\varepsilon(A)$ дает

Теорема 7. (ср. [5, 6]). $\varepsilon(A)=I(A)$. В случае, когда A — единица алгебры M, множество $\Omega(A)$ совпадает с единичным шаром в M и $\varepsilon(A)$ есть совокупность всех унитарных операторов из M.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Меклер А. А. Операторы усреднения по σ-подалгебрам в идеалах пространства $L_1(\mu)$.— Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Л., 1977, с. 96. [2] Овчинников В. И.— Труды НИИ матем. ВГУ, 1971, № 3, с. 88—107. [3] Segal I. E.— Ann. Math., 1953, v. 57, p. 401—457. [4] Канторович Л. В., Акилов Г. П.— Функциональный анализ. М., 1977, с. 744. [5] Браверман М. Ш.— Сиб. мат. ж., 1974, т. 15, № 3, с. 675—679. [6] Ryff J. V.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 117, p. 88—107. [7] Ryff J. V.— Proc. Amer. Math. Soc., 1967, v. 18, N 6, p. 1026—1034.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
4. 01. 85 г.