УДК 517.98

Ф. А. СУКОЧЕВ

ПОСТРОЕНИЕ НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

Предлагается общий метод построения симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана.

1. Пусть M — конечная алгебра фон Неймана, m — точный нормальный нормированный след на M; $L^1(M, m)$ — банахово пространство всех интегрируемых операторов, присоединенных к M [1]. Перестановкой оператора $A \in L^1(M, m)$ называется функция $\widetilde{A}(t) \in L^1(0, 1)$, вычисляемая по формуле $\widetilde{A}(t) = \inf\{\lambda: m(\mathbf{1} - E_\lambda) < t\}$, где $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство оператора $|A|$ и $\mathbf{1}$ - единица алгебры M. Пусть E—нормированное пространство, вложенное в $L^1(M, m)$. Пространство E называется симметричным на алгебре M, если из $A \in E$, $B \in L^1(M, m)$, $\widetilde{B}(t) \leqslant \widetilde{A}(t)$ $(t \geqslant 0)$ следует $B \in E$ и $\|B\|_E \leqslant \|A\|_E$. В случае, когда $M = L^\infty(0, 1)$, это определение совпадает с известным определением функционального симметричного пространства на отрезке $[0, 1]$ (см. например [2]).

Для каждого симметричного пространства $E(0, 1)$ на отрезке $[0, 1]$ положим $E(M) = \{A \in L^1(M, m): \widetilde{A} \in E(0, 1)\}$ и $\|A\|_{E(M)} = \left\|\widetilde{A}\right\|_{E(0,1)}$. Из свойств перестановок следует, что $E(M)$ является линейным подпространством в $L^1(M, m)$. Возникает вопрос о том, будет ли $\|A\|_{E(M)}$ симметричной банаховой нормой на $E(M)$. В случае конечномерной алгебры положительный ответ на этот вопрос дан в работе фон Неймана [3]. В [4] дано положительное решение вопроса для любых полуконечных алгебр фон Неймана в случае, когда норма в пространстве $E(0, 1)$ монотонно полна и порядково полунепрерывна. Следующая теорема существенно усиливает этот результат для любых конечных алгебр фон Неймана.

Теорема 1. Если $E(0, 1)$ — банахово симметричное пространство на $[0, 1]$, такое, что $f, g \in E(0, 1)$, $f \prec g$ влечет $\|f\|_{E(0,1)} \leqslant \|g\|_{E(0,1)}$, то $(E(M), \|\cdot\|_{E(M)})$ — банахово симметричное пространство на алгебре M.

Здесь $f \prec g$ означает, что $\int\limits_0^s \tilde{f}(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^s \tilde{g}(t)\,dt$ для любого $s \geqslant 0$.

Следствие 1. Если $E(0, 1)$ — банахово симметричное пространство с порядково полунепрерывной нормой, то $(E(M), \|\cdot\|_{E(M)})$ — банахово симметричное пространство на M.

Симметричное пространство $E(M)$ на алгебре M будем называть интерполяционным, если $\tilde{A} \prec \tilde{B}$, $B \in E(M)$ влечет $A \in E(M)$ и $\|A\|_{E(M)} \leqslant \|B\|_{E(M)}$.

Следствие 2. Если $E(0, 1)$ — банахово интерполяционное пространство, то $(E(M), \|\cdot\|_{E(M)})$ — банахово интерполяционное пространство на M. Банаховы симметричные пространства с порядково полунепрерывной нормой и банаховы интерполяционные пространства образуют два различных класса симметричных пространств. Кроме того, существует пример банахова симметричного пространства $E(0, 1)$, не удовлетворяющего условиям теоремы 1, но для которого $(E(M), \|\cdot\|_{E(M)})$ — банахово симметричное пространство на M.

2. Предложенный метод построения некоммутативных симметричных пространств $(E(M), \|\cdot\|_{E(M)})$ позволяет устанавливать различные свойства таких пространств в зависимости от свойств пространства $E(0, 1)$ (см. также [5]).

Теорема 2. Если $E(0, 1)$ — симметричное рефлексивное пространство, то $(E(M), \|\cdot\|_{E(M)})$ также рефлексивно.

Из теоремы 2, в частности, следуют известные результаты о рефлексивности некоммутативных L^p-пространств, $p > 1$, и пространств Орлича, построенных по N-функциям, удовлетворяющих вместе с дополнительными функциями Δ_2-условию.

Банахово пространство называется строго нормированным, если множество крайних точек его единичного шара совпадает с его единичной сферой.

Теорема 3. Если $E(0, 1)$ — строго нормированное пространство, то $(E(M), \|\cdot\|_{E(M)})$ — также строго нормированное.

3. В этом пункте используются определения и обозначения из [2]. Пусть $(E_0(0, 1), E_1(0, 1))$ — банахова пара и $E_\alpha(0, 1) = [E_0(0, 1), E_1(0, 1)]_\alpha$. Ясно, что в случае, когда E_0 и E_1 — симметричные пространства, то и $E_\alpha(0, 1)$ — также симметричное пространство.

Теорема 4. Если $(E_0(0, 1), E_1(0, 1))$ — родственная пара интерполяционных банаховых пространств, одно из которых правильное, то пространство $[E_0(M), E_1(M)]_\alpha$ совпадает с симметричным пространством $E_\alpha(M)$, построенным по пространству $E_\alpha(0, 1)$.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

$$[L^{p_0}(M), L^{p_1}(M)]_\alpha = L^p(M), \tag{1}$$

где $p_0 \geqslant 1$, $p_1 \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1}$.

Соотношение (1) сохраняется и в случае произвольной алгебры фон Неймана и точного нормального состояния на ней (см. [6]).

Рассмотрим теперь задачу об упаковках единичной сферы некоммутативного L^p-пространства. Обозначим $\lambda(E)$ наибольшее из чисел $g > 0$, для которых при $r < g$ единичная сфера банахова пространства E содержит бесконечное число непересекающихся шаров радиуса r.

*163

Теорема 5 (ср. [7]). Если M — непрерывная алгебра фон Неймана, то $\lambda(L^p(M, m)) = \left(1 + 2^{1-p^{-1}}\right)^{-1}$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $\lambda(L^p(M, m)) = \left(1 + 2^{p^{-1}}\right)^{-1}$ при $p > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Segal I. E. — Ann. Math. 1953. V. 57. P. 401—457. [2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. С. 1—400. [3] Von Neumann J. — Изв. ин-та мат. и мех. Томского университета. 1937. Т. I(3). С. 286—300. [4] Yeadon F. J. — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1980. V. 88 (1). P. 135—147. [5] Сукочев Ф. А. — ДАН УзССР, 1985, № 7. С. 6—8. [6] Kosaki H. — J. Funct. Anal. 1984. V. 56. P. 29—78. [7] Wells J. H., Williams L. R. Embedding and extension in analysis. Berlin: Springer Verlag, 1975. S. 1—110.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
18. 12. 85 г.