Ф. А. СУКОЧЕВ, В. И. ЧИЛИН

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОРЯДКА ХАРДИ — ЛИТТЛВУДА

Успешное развитие теории симметрично-нормированных идеалов компактных операторов в гильбертовом пространстве во многом было предопределено тщательным изучением свойств s-чисел таких операторов [1]. Поэтому значительное внимание в теории некоммутативного интегрирования в настоящее время уделяется выяснению различных свойств обобщенных s-чисел (перестановок) измеримых операторов, присоединенных к произвольной полуконечной алгебре фон Неймана [2—4]. В настоящей работе установлены новые свойства обобщенных s-чисел, что, в частности, позволяет получить неравенство треугольника для самосопряженных измеримых операторов относительно порядка Харди — Литтлвуда. Используются терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [5] и теории некоммутативного интегрирования из [6—8].

Пусть M — полуконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, μ — точный нормальный полуконечный след на M, $\mathcal{P}(M)$ — решетка всех проекторов из M. Замкнутый оператор T, присоединенный к M, имеющий всюду плотную в H область определения $D(T)$, называется μ-измеримым [8], если для любого $\varepsilon > 0$ существует $P \in \mathcal{P}(M)$, для которого $P(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $\mu(P^{\perp}) < \varepsilon$, где $P^{\perp} = 1 - P$, 1 — единица алгебры M. Множество $\mathcal{K}(M, \mu)$ всех μ-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно операций сильной суммы и сильного произведения и перехода к сопряженному [8]. Перестановкой оператора $T \in \mathcal{K}(M, \mu)$ называется функция $\mu_t(T)$, определенная равенством

$$\mu_t(T) = \inf\{\|TP\| : P \in \mathcal{P}(M),\ \mu(P^{\perp}) \leqslant t\},\ t > 0,$$

где $\|\cdot\|$ — C^*-норма на M. Если перестановка вычисляется относительно другого следа ν на M, то используется соответственно обозначение $\nu_t(T)$. Известно [2], что

$$\mu_t(T) = \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mu(E^{\perp}(\alpha)) \leqslant t\},$$

где $\{E(\alpha)\}$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T| = (T^*T)^{1/2}$ (для $E^{\perp}(\alpha)$ будет использоваться также запись $\{|T| > \alpha\}$).

Обозначим через $(L_1(M, \mu), \|\cdot\|_1)$ банахово пространство всех μ-интегрируемых операторов из $\mathcal{K}(M, \mu)$. Для каждого $T \in L_1(M, \mu) + M$ функция $\mu_t(T)$ интегрируема по мере Лебега на любом интервале $(0, t)$, $t > 0$. Пусть $T, S \in \mathcal{K}(M, \mu)$. Будем писать $T \prec S$, если $\int_0^t \mu_\tau(T)\, d\tau \leqslant \int_0^t \mu_\tau(S)\, d\tau$ для всех $t > 0$. Бинарное отношение „$\prec$“ на $\mathcal{K}(M, \mu)$ называют порядком Харди—Литтлвуда. Если $T \prec S$ и $S \prec T$, $T, S \in L_1(M, \mu) + M$, то $\mu_t(S) = \mu_t(T)$ для всех $t > 0$, т. е. операторы $|T|$ и $|S|$ равноизмеримы. Естественный частичный порядок на $\mathcal{K}_h(M, \mu) = \{T \in \mathcal{K}(M, \mu) : T = T^*\}$, порожденный собственным конусом $\{T^*T : T \in \mathcal{K}(M, \mu)\}$, будем обозначать через „$\leqslant$“.

Теорема. Пусть $T, S \in \mathcal{K}(M, \mu)$, $S = S^*$, $T \geqslant 0$, $-T \leqslant S \leqslant T$. Тогда $S \prec T$.

Доказательство. Предположим сначала, что алгебра M непрерывна, т. е. в решетке $\mathcal{P}(M)$ нет атомов. Нам понадобится следующая

Лемма. Пусть M — непрерывная алгебра фон Неймана, $S \in \mathcal{K}(M, \mu)$ $S = S^*$, $t > 0$, тогда

$$\sup\{\mu(P|S|) : P \in \mathcal{P}(M),\ \mu(P) \leqslant t\} =$$

$$= \int_0^t \mu_\tau(S)\, d\tau = \sup\{\mu(P|S|) : P \in \mathcal{P}(M) \cap S',\ \mu(P) \leqslant t\},$$

где S' — коммутант в $\mathcal{K}(M, \mu)$ элемента S.

Доказательство леммы. Если $\int_0^t \mu_\tau(S)\, d\tau = +\infty$, то очевидно, что $\mu(P|S|) \leqslant \int_0^t \mu_\tau(S)\, d\tau$ для всех $P \in \mathcal{P}(M)$, $\mu(P) \leqslant t$. Если же $\int_0^t \mu_\tau(S)\, d\tau < +\infty$, то в силу теоремы 3.3 из [9] $PS \in L_1(M, \mu)$ для любого $P \in \mathcal{P}(M)$ с $\mu(P) \leqslant t$ и

$$\mu(P|S|) \leqslant \|P|S|\|_1 \leqslant \int_0^\infty \mu_\tau(P)\mu_\tau(S)\, d\tau = \int_0^{\mu(P)} \mu_\tau(S)\, d\tau \leqslant \int_0^t \mu_\tau(S)\, d\tau.$$

Обозначим через m меру Лебега на $(0, +\infty)$ и пусть $\{E(\alpha)\}$ — спектральное семейство проекторов оператора $|S|$. Зафиксируем $t > 0$ и рассмотрим два случая:

1) $\mu_t(S) > \lim\limits_{\tau \to +\infty} \mu_\tau(S) = \mu_\infty(S)$;

2) $\mu_t(S) = \mu_\infty(S)$.

В первом случае положим $P_1 = 1 - \sup\{E(\alpha) : \alpha < \mu_t(S)\}$, $P_2 = 1 - E \times (\mu_t(S))$. Ясно, что $P_2 \leqslant P_1$ и

$$t \leqslant m(\{\mu_\tau(S) \geqslant \mu_t(S)\}) = \mu(\{|S| \geqslant \mu_t(S)\}) = \mu(P_1),$$
$$t \geqslant m(\{\mu_\tau(S) > \mu_t(S)\}) = \mu(\{|S| > \mu_t(S)\}) = \mu(P_2).$$

Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в M, содержащая спектральное семейство оператора $|S|$. Тогда $P_1, P_2 \in \mathcal{A}$ и поскольку в $\mathcal{P}(M)$ нет атомов, то в силу максимальности $\mathcal{A}$, в $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ также нет атомов. Следовательно, существует такое $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, что $P_2 \leqslant P \leqslant P_1$ и $\mu(P) = t$. Обозначим через $\chi_{(0, t)}$ характеристическую функцию интервала $(0, t)$, получим

$$\mu(\{P|S| > \alpha\}) = m(\{\mu_\tau(S)\chi_{(0, t)} > \alpha\})$$

для всех $\alpha > 0$. Отсюда $\mu_\tau(P|S|) = \mu_\tau(S)\chi_{(0, t)}$, $\tau > 0$, и поэтому $\mu(P|S|) = \int_0^t \mu_\tau(S)\, d\tau$, что завершает доказательство леммы в случае 1). Пусть теперь $\mu_t(S) = \mu_{+\infty}(S)$. В этом случае равенство $m(\{\mu_\tau(S) \geqslant \mu_t(S)\}) = \mu(\{|S| \geqslant \mu_t(S)\})$ уже, вообще говоря, неверно. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим $P_1(\varepsilon) = 1 - E\left(\mu_t(S) - \frac{\varepsilon}{t}\right)$, $P_2 = 1 - E(\mu_t(S))$. Поскольку $\mu(P_1(\varepsilon)) = +\infty$, то найдется такой $P(\varepsilon) \in \mathcal{P}(M) \cap S'$, что $P_2 \leqslant P(\varepsilon) \leqslant P_1(\varepsilon)$, $\mu(P(\varepsilon)) = t$. Тогда

$$\mu(P(\varepsilon)|S|)=\mu(P_2|S|)+\mu((P(\varepsilon)-P_2)|S|)\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_0^{\mu(P_2)}\mu_\tau(S)\,d\tau+\mu\left((P(\varepsilon)-P_2)\left(\mu_t(S)-\frac{\varepsilon}{t}\right)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_0^{\mu(P_2)}\mu_\tau(S)\,d\tau+\mu_{+\infty}(S)(t-\mu(P_2))-\varepsilon.$$

Так как на полуинтервале $(\mu(P_2),\ t)$ функция $\mu_\tau(S)$ тождественно равна $\mu_{+\infty}(S)$, то

$$\mu(P(\varepsilon)|S|)\geqslant\int\limits_0^t\mu_\tau(S)\,d\tau-\varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда вытекают требуемые в лемме равенства.

Замечание 1. Доказательство леммы во многом использует доказательство аналогичного свойства для функций [10, с. 89—90].

Продолжим доказательство теоремы. Если $\int\limits_0^t\mu_\tau(T)\,d\tau=+\infty$ для некоторого $t>0$, то в силу невозрастания функции $\mu_\tau(T)$ получим, что $\int\limits_0^t\mu_\tau(T)\,d\tau=+\infty$ для всех $t>0$, и в этом случае утверждение теоремы очевидно. Поэтому в дальнейшем можно считать, что $\int\limits_0^t\mu_\tau(T)\,d\tau<+\infty$ для любого $t>0$. Так как $-T\leqslant S\leqslant T$, то $0\leqslant S+{}$ $+T\leqslant 2T$ и потому [2]

$$\int\limits_0^t\mu_\tau(S)\,d\tau\leqslant\int\limits_0^t\mu_\tau(S+T)\,d\tau+\int\limits_0^t\mu_\tau(T)\,d\tau\leqslant 3\int\limits_0^t\mu_\tau(T)\,d\tau<+\infty$$

для всех $t>0$. Пусть $e(S_+)$, $e(S_-)$ — носители соответственно положительной S_+ и отрицательной S_- частей оператора S. Проектор $P\in S'$ коммутирует с проекторами $e(S_+)$ и $e(S_-)$, и поэтому $Q=Pe(S_+)\in$ $\in\mathcal{P}(M)$, $R=Pe(S_-)\in\mathcal{P}(M)$. Так как $-T\leqslant S\leqslant T$, то

$$\mu(QS)=\mu(QSQ)\leqslant\mu(QTQ)=\mu(QT),$$
$$-\mu(RS)\leqslant\mu(RT).$$

Следовательно,

$$\mu(P|S|)=\mu(QS)-\mu(RS)\leqslant\mu((Q+R)T)\leqslant\mu(PT).$$

Отсюда и из леммы вытекает

$$\int\limits_0^t\mu_\tau(S)\,d\tau\leqslant\int\limits_0^t\mu_\tau(T)\,d\tau$$

для всех $t>0$. Предположим теперь, что алгебра M не является непрерывной. Пусть $N=L_\infty(0,\ 1)$ — коммутативная W^*-алгебра всех ограниченных измеримых комплексных функций на отрезке $[0,\ 1]$. Считаем при этом, что N действует в гильбертовом пространстве $K=L_2(0,\ 1)$. Рассмотрим на N след $\nu(f)=\int\limits_0^1 f\,dm$, и пусть $\mathcal{A}=$ $=M\overline{\otimes}N$ — тензорное произведение алгебр фон Неймана M и N, $\lambda=\mu\otimes\nu$ — тензорное произведение следов μ и ν. Алгебра $\mathcal{A}$ действует в гильбертовом пространстве $H\overline{\otimes}K$. Из представления $\mathcal{A}$ в виде алгебры всех вектор-функций на отрезке $[0,\ 1]$ со значениями в M [5, с. 263] следует, что в $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ нет атомов.

Пусть $A\in\mathcal{K}(M,\ \mu)$ и $\mathcal{D}$ — линейное подпространство в $H\overline{\otimes}K$, порожденное векторами вида $\xi\otimes\eta$, $\xi\in\mathcal{D}(A)$, $\eta\in K$. Для каждого $\zeta=\sum\limits_{i=1}^n\xi_i\otimes\eta_i\in\mathcal{D}$ положим $(A\otimes 1)(\zeta)=\sum\limits_{i=1}^n A\xi_i\otimes\eta_i$. Линейный оператор $A\otimes 1$ с областью определения $\mathcal{D}$ является предзамкнутым в $H\overline{\otimes}K$ [7]. Через $A\overline{\otimes}1$ обозначим замыкание этого оператора. Поскольку $A\in\mathcal{K}(M,\ \mu)$, то $A\overline{\otimes}1\in\mathcal{K}(\mathcal{A},\ \lambda)$. В частности $S\overline{\otimes}1$, $T\overline{\otimes}1\in$ $\in\mathcal{K}(\mathcal{A},\ \lambda)$. Ясно, что $-T\overline{\otimes}1\leqslant S\overline{\otimes}1\leqslant T\overline{\otimes}0$ и $\lambda_t(S\overline{\otimes}1)=\mu_t(S)$ для всех $t>0$. Поэтому требуемое неравенство вытекает из первой части доказательства.

Линейное подпространство X в $\mathcal{K}(M,\ \mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_X$ называется симметричным пространством на $(M,\ \mu)$, если из $T\in X$, $S\in\mathcal{K}(M,\ \mu)$, $\mu_t(S)\leqslant\mu_t(T)$ при всех $t>0$, следует, что $S\in X$ и $\|S\|_X\leqslant\|T\|_X$. Норма $\|\cdot\|_X$ на X называется вполне симметричной, если из T, $S\in X$, $T\prec S$ следует $\|T\|_X\leqslant\|S\|_X$. Все некоммутативные L_p-пространства, пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича имеют вполне симметричную норму. Из доказанной выше теоремы непосредственно вытекает

Следствие 1. Пусть $(X,\ \|\cdot\|_X)$ — симметричное пространство на $(M,\ \mu)$ с вполне симметричной нормой, T, $S\in X$, $S=S^*$, $T\geqslant 0$, $-T\leqslant S\leqslant T$, тогда $\|S\|_X\leqslant\|T\|_X$.

Укажем ещё одно следствие из приведенной леммы.

Следствие 2. Для любых S, $T\in\mathcal{K}(M,\ \mu)$, $t>0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^t\mu_\tau(ST)\,d\tau\leqslant\int\limits_0^t\mu_\tau(S)\,\mu_\tau(T)\,d\tau. \tag{1}$$

Доказательство. Если $\int\limits_0^t\mu_\tau(s)\,\mu_\tau(T)\,d\tau=\infty$, то неравенство (1) очевидно. Пусть $\int\limits_0^t\mu_\tau(S)\mu_\tau(T)\,d\tau<+\infty$, $P\in\mathcal{P}(M)$, $\mu(P)\leqslant t$, $ST=$ $=u|ST|$ — полярное разложение ST. Поскольку $|S^*uP|\in\mathcal{K}(PMP,\ \mu)$, то функция $\mu_t(S^*uP)$ равна тождественно нулю вне интервала $(0,\ \mu(P))$, т. е. $\mu_\tau(S^*uP)=\mu_\tau(S^*uP)\chi_{(0,\,t)}$. Поэтому $\mu_\tau(Pu^*S)=$ $=\mu_\tau(Pu^*S)\chi_{(0,\,t)}$, и так как $\|Pu^*\|\leqslant 1$, то

$$\int\limits_0^\infty\mu_\tau(Pu^*S)\mu_\tau(T)\,d\tau=\int\limits_0^t\mu_\tau(Pu^*S)\,\mu_\tau(T)\,d\tau\leqslant\int\limits_0^t\mu_\tau(S)\,\mu_\tau(T)\,d\tau<\infty.$$

Из теоремы 3.3 [9] вытекает, что $P|ST| = Pu^*ST \in L_1(M, \mu)$ и

$$\mu(P|ST|) \leqslant \int_0^\infty \mu_\tau(Pu^*S)\,\mu_\tau(T)\,d\tau \leqslant \int_0^t \mu_\tau(S)\,\mu_\tau(T)\,d\tau.$$

В силу леммы получим

$$\int_0^t \mu_\tau(ST)\,d\tau = \sup\{\mu(P|ST|) : P \in \mathscr{P}(M),\ \mu(P) \leqslant t\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \mu_\tau(S)\mu_\tau(T)\,d\tau.$$

Следующее предложение устанавливает справедливость неравенства треугольника относительно порядка Харди — Литтлвуда для самосопряженных операторов из $\mathcal{K}(M, \mu)$.

Предложение 1. Если $T_i \in \mathcal{K}(M, \mu)$, $T_i = T_i^*$, $i = 1, 2$, то

$$|T_1 + T_2| \prec |T_1| + |T_2|\,. \tag{2}$$

Доказательство. Так как $T_i = T_i^*$, то $-|T_i| \leqslant T_i \leqslant |T_i|$, $i = 1, 2$, и поэтому

$$-(|T_1| + |T_2|) \leqslant T_1 + T_2 \leqslant |T_1| + |T_2|.$$

Осталось использовать теорему.

Для несамосопряженных операторов из $\mathcal{K}(M, \mu)$ неравенство (2) уже неверно. Более того, справедливо следующее

Предложение 2. Неравенство (2) верно для любых $T_1, T_2 \in M$ в том и только том случае, когда M — коммутативная алгебра фон Неймана.

Доказательство. В случае, когда алгебра M коммутативна, справедливость неравенства (2) вытекает из неравенства треугольника для естественного частичного порядка

$$|T_1 + T_2| \leqslant |T_1| + |T_2| \tag{3}$$

и свойств перестановок. Предположим, что алгебра M некоммутативна. Через $\mathscr{P}(\mu)$ обозначим множество всех $P \in \mathscr{P}(M)$, для которых $\mu(P) < \infty$. Поскольку след μ полуконечен, то для любого $Q \in \mathscr{P}(M)$ существует возрастающая к Q сеть проекторов из $\mathscr{P}(\mu)$. Поэтому в силу некоммутативности M множество $\mathscr{P}(\mu)$ содержит неабелевый проектор P. Выберем эквивалентные проекторы $Q, R \in \mathscr{P}(\mu)$ так, чтобы $QR = 0$, $Q + R \leqslant P$, и пусть v — частичная изометрия из M, для которой $v^*v = Q$, $vv^* = R$. Так как $|Q + v| = \sqrt{2}Q$, то

$$\mu_t(|Q + v^*|) = \mu_t(Q + v^*) = \mu_t(Q + v) = \sqrt{2}\chi_{(0,\mu(Q))}\,.$$

С другой стороны,

$$\mu_t(Q + |v^*|) = \mu_t(Q + R) = \chi_{(0,\,\mu(Q+R))}.$$

Поэтому неравенство (2) не выполняется для $T_1 = Q$, $T_2 = v^*$.

Замечание 2. Если неравенство (3) справедливо для любых самосопряженных операторов $T_1, T_2 \in M$, то алгебра M коммутативна. Действительно, в случае когда алгебра M некоммутативна, в M существует $*$-подалгебра $\mathcal{B}$, являющаяся фактором типа I_2. Отождествим $\mathcal{B}$ с $*$-алгеброй всех матриц второго порядка и положим

$$T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = 2^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко показать (см. [11]), что для этих самосопряженных операторов неравенство (3) уже неверно.

Приведем еще одно полезное неравенство для перестановок.

Предложение 3. Пусть $T, S \in \mathcal{K}(M, \mu)$, $T \geqslant 0$, $S = S^*$, тогда

$$\mu_t(T) \leqslant \mu_t(T + iS) \tag{4}$$

для любых $t > 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $A, B \in M_h$, то $\|A\| = \sup\{|(A\xi, \xi)| : \xi \in H,\ \|\xi\|_H \leqslant 1\} \leqslant \sup\{|((A + iB)\xi, \xi)| : \xi \in H,\ \|\xi\|_H \leqslant 1\} \leqslant \|A + iB\|$. Поэтому, если $T, S \in M$, $T \geqslant 0$, $S = S^*$, $P \in \mathscr{P}(M)$, то $\|(T + iS)P\| \geqslant \|PTP + iPSP\| \geqslant \|PTP\| = \|\sqrt{T}P\|^2$.
Отсюда

$$\mu_t(T) = \mu_t(\sqrt{T})^2 = \inf\{\|\sqrt{T}P\|^2 : P \in \mathscr{P}(M),\ \mu(P^\perp) \leqslant t\} \leqslant \mu_t(T + iS)$$

для всех $t > 0$. Пусть теперь $T, S \in \mathcal{K}(M, \mu)$. Поскольку множество $M_+ = \{A \in M : A \geqslant 0\}$ плотно во множестве $\{B \in \mathcal{K}(M, \mu) : B \geqslant 0\}$ относительно топологии сходимости по мере, порожденной следом μ [8], то найдутся последовательности операторов $\{T_n\} \subset M_+$, $\{S_n\} \subset M_h$, сходящиеся в этой топологии соответственно к T и S. Из леммы 3.4 [2] следует, что $\mu_t(T_n) \to \mu_t(T)$ и $\mu_t(T_n + iS_n) \to \mu_t(T + iS)$ почти всюду на $(0, \mu(1))$. Так как по доказанному выше $\mu_t(T_n) \leqslant \mu_t(T_n + iS_n)$, $t > 0$, то переходя к пределу и используя непрерывность справа перестановок, получаем, что $\mu_t(T) \leqslant \mu_t(T + iS)$ для всех $t > 0$.

Замечание 3. Неравенство (4) верно для любых $T, S \in \mathcal{K}_h(M, \mu)$ в том и только том случае, когда алгебра M коммутативна. Действительно, если M — коммутативная алгебра фон Неймана, то справедливость неравенства (4) вытекает из неравенства $|T| \leqslant |T + iS|$ и свойств перестановок. Если же алгебра M некоммутативна, то, взяв Q, R, v, построенные при доказательстве предложения 2, и, положив $T = Q - R$, $S = \varepsilon(v + v^*)$. $0 < \varepsilon < 1$, имеем $|T + iS| = (1 - \varepsilon^2)(Q + R) - 2\varepsilon(v - v^*)$, $|T| = Q + R$. В частности, $\mu(|T + iS|^2) = (1 - \varepsilon^2)\mu(Q + R) < \mu(Q + R)$, поэтому неравенство (4) невозможно для построенных T и S.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука. 1965. 448 с.
2. Fack T., Kosaki H.//Pacific J. Math. 1986. V. 123. P. 269—300.
3. Hiai F.//J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 127. P. 18—48.
4. Hiai F., Nakamura Y.//Math. Z. 1987. V. 195. P. 17—27.
5. Takesahi M. Theory of operator algebras I. New-York: Springer—Verlag. 1979. 416 p.
6. Segal I. E.//Ann. Math. 1953. V. 57. P. 401—457.
7. Stinespring W. F.//Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 90. P. 15—56.
8. Nelson E.//J. Funct. Anal. 1974. V. 15. P. 103—116.
9. Yeadon F. J.//Proc. Cambridge Phil. Soc. 1975. V. 77. P. 91—102.
10. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука. 1978. 400 с.