УДК 517.98

Ф. А. СУКОЧЕВ, В. И. ЧИЛИН

ИЗОМОРФНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ НЕКОММУТАТИВНЫХ L_p-ПРОСТРАНСТВ НА АТОМИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

Пусть M_i — полуконечная алгебра фон Неймана, μ_i — точный нормальный полуконечный (т. н. п.) след на M_i, $L_p(M_i, \mu_i)$ — банахово пространство всех μ_i-интегрируемых с p-й степенью измеримых операторов, присоединенных к M_i (см. например [1]), $i=1, 2$; $p \geqslant 1$. Известно (см. [2]), что при $p \neq 2$ пространства $L_p(M_1, \mu_1)$ и $L_p(M_2, \mu_2)$ изометричны тогда и только тогда, когда существует йорданов изоморфизм из M_1 на M_2. Поэтому изометрическая классификация некоммутативных L_p-пространств сводится к йордановой классификации алгебр фон Неймана. Задача об изоморфной классификации некоммутативных L_p-пространств до сих пор не решена. В настоящей работе с использованием терминологии и обозначений из [1, 3, 4] предлагается решение этой задачи для атомических алгебр фон Неймана в классе сепарабельных L_p-пространств.

Всюду далее рассматриваются бесконечномерные алгебры фон Неймана (в случае конечномерных алгебр все L_p-пространства одинаковой размерности изоморфны). Пусть M — полуконечная алгебра фон Неймана, μ — т. н. п. след на M. Приводимое ниже предложение показывает, что свойство сепарабельности некоммутативных L_p-пространств позволяет ограничиться рассмотрением алгебр фон Неймана, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Предложение. Следующие условия эквивалентны:

1) $L_p(M, \mu)$ сепарабельно, $p\geqslant 1$;

2) M—*-изоморфно подалгебре фон Неймана в алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Таким образом, если $L_p(M_i, \mu_i)$ сепарабельны, $i=1, 2$, $p\geqslant 1$, то можно считать, что M_i, $i=1, 2$, действуют в одном и том же сепарабельном гильбертовом пространстве H. Поэтому задача об изоморфной классификации таких L_p-пространств сводится к следующему: необходимо указать такие полуконечные алгебры фон Неймана M, действующие в H, и т. н. п. следы μ на M, что соответствующие $L_p(M, \mu)$ попарно неизоморфны, а всякое другое $L_p(N, \nu)$ изоморфно одному из этих $L_p(M, \mu)$, где N — полуконечная алгебра фон Неймана в $B(H)$, ν — т. н. п. след на N (банаховы пространства X и Y называются изоморфными, если существует непрерывная линейная биекция из X на Y). Обозначим через l_p^C банахово пространство всех последовательностей $\{z_n\}$ комплексных чисел, для которых $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^p<\infty$, а через $L_n^C(0, 1)$ — банахово пространство всех комплексных измеримых функций на отрезке $[0, 1]$, интегрируемых с p-й степенью по мере Лебега. С. С. Банах [5] показал, что при $p\geqslant 1$, $p\neq 2$ пространства l_p^C и $L_p^C(0, 1)$ неизоморфны. Изоморфную классификацию сепарабельных L_p-пространств в случае коммутативных алгебр фон Неймана дает

Теорема 1. Пусть M — коммутативная алгебра фон Неймана, действующая в H, μ — т. н. п. след на M, $p\geqslant 1$, $p\neq 2$. Тогда $L_p(M, \mu)$ изоморфно одному из пространств l_p^C, $L_p^C(0, 1)$.

Таким образом, в случае коммутативных алгебр существует только два неизоморфных сепарабельных L_p-пространства, $p\geqslant 1$, $p\neq 2$. Множество неизометричных таких пространств уже счетно.

Положим $C_p=L_p(B(H), tr)$, где tr — канонический т. н. п. след на $B(H)$. Обозначим через H_n конечномерное гильбертово пространство с $\dim H_n=n$ и рассмотрим C^*-произведение $M_0=\prod_{n=1}^{\infty}B(H_n)$. Для каждого $T=\{T_n\}\in M_0$, $T\geqslant 0$, положим $\mu_0(T)=\sum_{n=1}^{\infty}tr(T_n)$. Ясно, что M_0 — атомическая алгебра фон Неймана, действующая в сепарабельном гильбертовом пространстве H и μ_0 — т. н. п. след на M_0. Из [4] следует, что $S_p=L_p(M_0, \mu_0)$ неизоморфно C_p при $p\geqslant 1$, $p\neq 2$. Кроме того, пространства C_p и S_p, $p\geqslant 1$, $p\neq 2$, не обладают локально безусловной структурой (см. [6]) и потому не могут быть изоморфными пространствам l_p^C и $L_p^C(0, 1)$. Следовательно, сепарабельные банаховы пространства l_p^C, $L_p^C(0, 1)$, S_p, C_p попарно неизоморфны при каждом фиксированном $p\geqslant 1$, $p\neq 2$. Изоморфную классификацию сепарабельных L_p-пространств для атомических алгебр фон Неймана дает

Теорема 2. Пусть M — атомическая алгебра фон Неймана, действующая в сепарабельном гильбертовом пространстве, μ — т. н. п. след на M, $p \geqslant 1$, $p \neq 2$. Тогда $L_p(M, \mu)$ изоморфно одному из пространств l_p^C, S_p, C_p.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Yeadon F. J.//Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1975. V. 77. P. 91—102. [2] Yeadon F. J.//Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1981. V. 90. P. 41—50. [3] Stratila S., Zsido L. Lectures on von Neuman algebras. England: Abacus Press, 1975. 478p . [4] Arazy J., Lindenstrauss J.//Compositio Math. 1975. N. 30. P. 81—111. [5] Банах С. С. Курс функционального анализа. Киев: Радянска школа, 1948. 216 с. [6] Gordon Y., Lewis D. R.//Acta Math. 1974. V. 133. P. 27—48.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
08. 04. 87 г.