УДК 517. 98

Б. Р. ТАДЖИБАЕВ

АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕАССОЦИАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В [1] дана абстрактная характеризация классических пространств Орлича. В работах В. И. Чилина введены некоммутативные аналоги классических пространств Орлича и рассмотрена абстрактная характеризация этих аналогов (см. например [2]).

В настоящем сообщении вводятся пространства Орлича на йордановых банаховых алгебрах, порожденные выпуклыми функциями, и дается абстрактное описание этих пространств. Используемую терминологию можно найти в [3].

Пусть A—JBW-алгебра с точным нормальным конечным следом τ. Через $\hat{A}$ и $L_1(A)$ обозначим соответственно OJ-алгебру измеримых элементов и пространство всех интегрируемых элементов для A [4].

Определение 1. Вещественная положительная на $[0, +\infty)$ функция $M(u)$ называется функцией Орлича, если выполнены следующие условия:

(i) $M(u)$ — выпуклая функция,

(ii) $M(u)=0$ лишь при $u=0$.

Говорят, что функция Орлича $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2)-условию, если существуют постоянные $k>0$ и $u_0 \geqslant 0$, такие, что $M(2u) \leqslant kM(u)$ при $u \geqslant u_0$.

Теорема 1. Пусть функция Орлича $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2)-условию. Тогда множество $L_M(A) = \{a \in \hat{A} : M(|a|) \in L_1(A)\}$ является линейным подпространством в $L_1(A)$, полным относительно нормы

$$\|a\|_M = \inf\left\{\lambda > 0 : \tau\left(M\left(\frac{|a|}{\lambda}\right)\right) \leqslant 1\right\}, \ a \in L_M(A).$$

Пусть E — векторное пространство над R и K — собственный воспроизводящий конус в E. Как известно, K определяет в E отношение частичного порядка.

Определение 2. Элемент e из K называется слабой единицей, если для любого $a \neq \theta$ $a \in K$ существует такое $b \in K$ $b \neq \theta$, что $b \leqslant a$, $b \leqslant e$.

Через A обозначим пространство всех ограниченных элементов из E, т. е. таких $a \in E$, для каждого из которых существует число $\lambda > 0$, что $-\lambda e \leqslant a \leqslant \lambda e$.

Определение 3. Пространство (E, e) называется упорядоченным йордановым алгеброидом (J-алгеброидом), если выполнены следующие условия:

I На множестве A ограниченных элементов из E можно определить операцию умножения, относительно которой A является йордановой алгеброй с единицей e.

II $U_a(b) = 2a(ab) - a^2 b \geqslant \theta$ для любых $a \in A$, $b \in K \cap A$.

III Из $e \leqslant a \leqslant e$ следует $a^2 \leqslant e$.

Пусть $\|\cdot\|_E$ — норма на J-алгеброиде (E, e). Она называется порядково непрерывной, если $\|a_\alpha\|_E \to 0$ для любой сети элементов $\{a_\alpha\} \subset K$, $a_\alpha \downarrow \theta$. Будем предполагать, что конус K монотонно замкнут [2].

Определение 4. Пара $(E, \|\cdot\|_E)$ называется банаховым упорядоченным J-алгеброидом, если банахова норма $\|\cdot\|_E$ обладает следующими свойствами: 1) $\|b\|_E \leqslant \|a\|_E$, если $\theta \leqslant b \leqslant a$; 2) $\|ax\|_E \leqslant \|x\|_E$, если $a, x \in A$, $a^2 \leqslant e$.

Определение 5. Неотрицательная функция Φ на J-алгеброиде E называется модуляром Орлича, если: 1) $\Phi(x) = \theta$ лишь при $x = \theta$; 2) $\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$ при $\theta \leqslant x \leqslant y$; $x, y \in E$; 3) $\Phi(ax) \leqslant \Phi(x)$, если $x \in E$, $a \in A$ и $a^2 \leqslant e$; 4) множество $B = \{x \in E : \Phi(x) \leqslant 1\}$ выпукло и $\psi_x(\alpha) = \Phi(\alpha x)$ — выпуклая функция на $(-\infty, +\infty)$ для каждого $x \in E$; 5) $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$, где x и y из $K \cap A$, $xy = \theta$; 6) $\Phi(2x) \leqslant c\Phi(x)$ для некоторой константы $c > 0$ и всякого $x \in E$.

Рассмотрим функционал Минковского множества B

$$\|x\|_\Phi = \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1} x \in B\}.$$

Нетрудно показать, что $\|\cdot\|_\Phi$ — норма на (E, e). Если J-алгеброид E является полным относительно нормы $\|\cdot\|_\Phi$, то пару $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ назовем J-алгеброидом Орлича.

Для каждого x из $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ положим $\varphi_x(\alpha) = \frac{\Phi(\alpha x)}{\Phi(x)}$, $\alpha \geqslant 0$.

Определение 6. J-Алгеброид Орлича $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ называется идемпотентно-инвариантным относительно Ф, если $\varphi_f = \varphi_e$ для любого идемпотента $f \in A$, где e — слабая единица.

Теорема 2. Пусть $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ — монотонно полный J-алгеброид Орлича с порядково непрерывной нормой $\| \|_\Phi$, идемпотентно-инвариантный относительно Ф. Тогда существует модулярная JBW-алгебра A счетного типа, точный нормальный конечный след τ, функция Орлича $M(u)$ с (Δ_2)-условием, такие, что $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ изометрически и порядково изоморфно пространству $L_M(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Class W. J., Zaanen A. C.— Comm. Math., 1979, v. 1, p. 77—93. [2] Чилин В. И. Банаховы упорядоченные *-алгеброиды с порядково непрерывной и монотонно полной нормой. Деп. в ВИНИТИ № 197 Уз—84 деп. 16 с. [3] Таджибаев Б. Р. Неассоциативные пространства Орлича измеримых элементов в йордановых алгебрах. Деп. в ВИНИТИ, № 5954—83. 52 с. [4] Аюпов Ш. А.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1983, т. 47, № 1, с. 3—25.

Ташкентский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
6. 03. 85 г.