Orlicz序列空間的一致凸性与局部一致凸性

陶良德

摘　　要

文〔2—7〕分别给出了赋Orlicz范数和Luxemburg范数的Orlicz函数空间的一致凸性，弱局部一致凸性，局部一致凸性和弱局部一致凸性的判話。对于Orlicz序列空间，只见到文〔3〕，〔8—10〕给出赋Luxemburg范数的Orlicz序列空间的一致凸，弱一致凸，局部一致凸与弱局部一致凸的判别条件。本文给出赋Qrlicz范数的Orlicz序列空间的上述几种凸性的判别准则。

本文总以$M(u)$，$N(v)$表示一对互余的N函数；$p(u)$，$q(v)$分别表示它们的右导数；l_M^* 表示由$M(u)$生成的赋Orlicz范数$\|\cdot\|_M$的Orlicz序列空间；$M(u)\in\triangle_2$表示$M(u)$关于较小的u满足$\triangle_2$条件；$M(u)\in\nabla_2$是指$N(v)\in\triangle_2$。

$M(u)$在〔0，a〕上一致凸是指对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使对任意的u，$v\in$〔0，a〕，只要$|u-v|\geqslant\varepsilon\max(u,v)$，就有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

$M(u)$在〔0，a〕上严格凸是指对任意的u，$v\in$〔0，a〕，$u\neq v$，有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)<\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

为证本文中的主要结果，需要下列引理，

引理 1　〔11〕　设$x=(x_i)_{i=1}^{\infty}\in l_M^*$，$x\neq 0$，则

1°　$$\|x\|_M=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(kx_i)\right)$$

2°　$$\|x\|_M=\frac{1}{k_0}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(k_0x_i)\right)\Longleftrightarrow k_0\in[k_x^*,\ k_x^{**}]。$$

其中

$$k_x^*=\inf_{k>0}\left\{k:\ \sum_{i=1}^{\infty}N(p(k|x_i|))\geqslant 1\right\}$$

$$k_x^{**}=\sup_{k>0}\left\{k:\ \sum_{i=1}^{\infty}N(p(k|x_i|))\leqslant 1\right\}$$

引理 2　若$M(u)$在〔0，$q(N^{-1}(1))$〕上一致凸，则$M(u)\in\nabla_2$。

证明：显然。

引理3 对任意的$a>0$，存在$l(a)$，使当$\|x\|_M\leqslant a$，$x\neq\theta$，有$k_x^*\geqslant l(a)$，

证明：显然。

引理4 $M(u)\in\nabla_2\Longleftrightarrow$存在$u_0>0$，$K>1$，当$0\leqslant u\leqslant u_0$时，有$up(u)\geqslant KM(u)$。

证明：仿〔1〕引理2.1。

引理5 若$M(u)\in\nabla_2$，则对任意$b>0$，存在$l(b)>0$，使当$\|x\|_M\geqslant b$时，$k_x^{**}\leqslant l(b)$。

证明：因$M(u)\in\nabla_2$，由引理4，存在$K>1$，使当$u\in[0,\ q(N^{-1}(1))]$时，

$$up(u)\geqslant KM(u) \qquad (*)$$

对任意的$x\in l_M^*$，$\|x\|_M\geqslant b$和任意的$\varepsilon>0$，由k_x^{**}的定义

$$1\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}N\Big(p((k_x^{**}-\varepsilon)|x_i|)\Big)\geqslant N\Big(p((k_x^{**}-\varepsilon)|x_i|)\Big)$$

从而 $p\Big((k_x^{**}-\varepsilon)|x_i|\Big)\leqslant N^{-1}(1)$，因此

$(k_x^{**}-\varepsilon)|x_i|\leqslant q(p((k_x^{**}-\varepsilon)|x_i|))\leqslant q(N^{-1}(1))$。

由ε的任意性知，$k_x^{**}|x_i|\leqslant q(N^{-1}(1))$，$i=1,\ 2,\ \cdots$。

设$k_x^{**}>\frac{2}{b}$，取ε充分小，使$k_x^{**}-\varepsilon\geqslant\frac{2}{b}$，由（*）式得

$$1\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}N\Big(p((k_x^{**}-\varepsilon)|x_i|)\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big[(k_x^{**}-\varepsilon)|x_i|p((k_x^{**}-\varepsilon)|x_i|)-M((k_x^{**}-\varepsilon)x_i)\Big]$$

$$\geqslant(K-1)\sum_{i=1}^{\infty}M\Big((k_x^{**}-\varepsilon)x_i\Big)\geqslant(K-1)(k_x^{**}-\varepsilon)\frac{b}{2}\sum_{i=1}^{\infty}M\Big(\frac{2x_i}{b}\Big)$$

$$\geqslant(K-1)(k_x^{**}-\varepsilon)\frac{b}{2}$$

从而$k_x^{**}-\varepsilon\leqslant\frac{2}{b(K-1)}$。取$l=max\left(\frac{2}{b(K-1)},\ \frac{2}{b}\right)$，由$\varepsilon$的任意性，则当$\|x\|_M\geqslant b$时，有$k_x^{**}\leqslant l$。

引理6 $M(u)$在$[0,\ q(N^{-1}(1))]$上一致凸$\Longleftrightarrow$对任意的$\varepsilon>0$，存在$K>1$，使当$0\leqslant(1+\varepsilon)u\leqslant q(N^{-1}(1))$时，有$p((1+\varepsilon)u)\geqslant Kp(u)$。

证明：仿〔1〕引理7.1。

定理1 下列命题等价

1° l_M^*局部一致凸。

2° l_M弱局部一致凸。

3° $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$且$M(u)$在$[0,\ q(N^{-1}(1))]$上严格凸。

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.

证明：1°⇒2°显然。

$2°\Rightarrow 3°$因弱局部一致凸蕴涵着严格凸，由〔11〕知$M(u)$在$[0,(q(N^{-1}(1))]$上严格凸。

若$M(u)\overline{\in}\triangle_2$，则存在$u_n\searrow 0$，使得$M(u_n)\leqslant\frac{1}{2^n}$且

$$M\left((1+\frac{1}{n})u_n\right)>2^{n+1}M(u_n),\ n=1,\ 2,\ \cdots。$$

取正整数k_n，使得$2^{-(n+1)}<k_nM(u_n)\leqslant 2^{-n}$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}k_nM(u_n)\leqslant 1$，$k_nM\left((1+\frac{1}{n})u_n\right)>k_n2^{n+1}M(u_n)>1$．对每个$n\geqslant 1$，令

$$u^{(0)}=(\overbrace{u_1\cdots u_1}^{k_1},\overbrace{u_2\cdots u_2}^{k_2},\cdots\overbrace{u_n\cdots,u_n}^{k_n},\cdots)$$

$$u^{(n)}=(\overbrace{0\cdots 0}^{k_1},\ \overbrace{0\cdots 0}^{k_2},\cdots,\overbrace{0\cdots 0}^{k_n},\overbrace{u_{n+1}\cdots u_{n+1}}^{k_{n+1}},\cdots)$$

则

$\rho_M(u^{(n)})\leqslant\frac{1}{2^n}$，$\rho_M(u^{(0)})\leqslant 1$，$\|u^{(n)}\|_{(M)}=\|u^{(0)}\|_{(M)}=1$。其中$\|\cdot\|_{(M)}$表示$l_M^*$上的$Luxemburg$范数），令$x^{(0)}=u^{(0)}$，$x^{(n)}=x^{(0)}-u^{(n)}$，$a_n=\frac{1}{\|x^{(n)}\|_M}$，

$a_0=\frac{1}{\|x^{(0)}\|_M}$，则$a_n\searrow a_0$。

事实上，因$\|[x^{(0)}]_n\|_M\leqslant\|x^{(0)}\|_M$，其中

$$[x^{(0)}]_n=(x_1^{(0)}x_2^{(0)}\cdots x_n^{(0)}0\cdots)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\|[x^{(0)}]_n\|_M\leqslant\|x^{(0)}\|_M$另一方面，对任意$\varepsilon>0$,存在$v=(v_i)_{i=1}^{\infty},\rho_N(v)\leqslant 1$，使得$\sum_{i=1}^{\infty}x_i^{(0)}v_i\geqslant\|x^{(0)}\|_M-\varepsilon$。又因$\left|\sum_{i=1}^{\infty}x_i^{(0)}v_i\right|<\infty$，所以，对此$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n\geqslant N$时，有$\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i^{(0)}v_i<\varepsilon$，

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{(0)}v_i\geqslant\|x^{(0)}\|_M-\varepsilon-\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i^{(0)}v_i\geqslant\|x^{(0)}\|_M-2\varepsilon$$

$$\|[x^{(0)}]_n\|_M\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^{(0)}v_i\geqslant\|x^{(0)}\|_M-2\varepsilon$$

由ε的任意性知$\lim\limits_{n\to\infty}\|[x^{(0)}]_n\|_M\geqslant\|x^{(0)}\|_M$，而$\|[x^{(0)}]_n\|_M$

$\leqslant\|x^{(n)}\|_M\leqslant\|x^{(0)}\|_M$，两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\|x^{(n)}\|_M=\|x^{(0)}\|_M$$

显然有

$$\|a_nx^{(n)}+a_0x^{(0)}\|_M\geqslant\|a_nx^{(n)}+a_0x^{(n)}\|_M=(a_n+a_0)\|x^{(n)}\|\to 2$$

令证$a_nx^{(n)}\overset{w}{\nrightarrow}a_0x^{(0)}$，便与$2°$矛盾。

因$a_0x^{(0)}\overline{\in}h_M$（否则$\|u^{(n)}\|_M\to 0$，矛盾）。故$a_0x^{(0)}$可作为$l_M^*/h_M$空间的非零元。

由$Hahn$—$Banach$定理，存在$(l_M^*/h_M)^*=h_M^\perp$上的非零元φ，使得$\varphi(a_0x^{(0)})\neq 0$。又因$a_nx^{(n)}\in h_M$，所以$\varphi(a_nx^{(n)}-a_0x^{(0)})=-a_0\varphi(x^{(0)})\neq 0$。即$a_nnx^{(n)}\not\to a_0x^{(0)}$。

若$M(u)\in\nabla_2$，同上有u_n，使得

$$N\left((1+\frac{1}{n})u_n\right)>2^{n+1}N(u_n),\ N(u_n)\leqslant 2^{-n},\ n=1,\ 2,\ \cdots。$$

取正整数k_n，使得$2^{-(n+1)}<k_nN(u_n)\leqslant 2^{-(n)}$，令

$$u^{(0)}=(0,\ \overbrace{u_1\cdots u_1}^{k_1},\ \overbrace{u_2\cdots u_2}^{k_2}\cdots\overbrace{u_n\cdots u_n}^{k_n}\cdots)$$

$$u^{(n)}=(0,\ \overbrace{0\cdots 0}^{k_1}\cdots\overbrace{0\cdots 0}^{k_n}\ \overbrace{u_{n+1}\cdots u_{n+1}}^{k_{n+1}}\cdots)$$

则$\|u^{(0)}\|_{(N)}=\|u^{(n)}\|_{(N)}=1$，$\rho_N(u^{(n)})\leqslant\frac{1}{2^n}$，$\lim\limits_{m\to\infty}\|u^{(n)}-u^{(m)}\|_{(N)}=\|u^{(n)}\|_{(N)}=1$，$n=1,\ 2,\ \cdots$。

对每个$n\geqslant 1$，取m_n，使得

$$\|u^{(n)}-u^{(mn)}\|_{(N)}>\left(1-\frac{1}{n}\right),\ u^{(n)}-u^{(mn)}\in h_N$$

故存在

$$A^n=(0,\ \overbrace{0\cdots 0}^{k_1}\cdots\overbrace{0\cdots 0}^{k_n}b_{n+1}\cdots bm_n0\cdots)\in l_M^*$$满足$\|A^{(n)}\|_M=1$及$1-\frac{1}{n}<\|u^{(n)}-u^{(mn)}\|_{(N)}=\sum\limits_{i=n+1}^{mn}u_ib_i$ 令

$$a=N^{-1}(1),\ c_n=N^{-1}(1-2^{-n}),\ v^{(0)}=(a,\ 0\cdots)$$

$$v^{(n)}=(c_n\ \overbrace{0\cdots 0}^{k_1}\cdots\overbrace{0\cdots 0}^{k_n}\ \overbrace{u_{n+1}\cdots u_{n+1}}^{k_{n+1}}\cdots)$$

则$v^{(0)}\in h_{(N)}$，$\|v^{(0)}\|_{(N)}=\|v^{(n)}\|_{(N)}=1$，$\rho_N(v^{(n)})\leqslant 1$，

取$A^{(0)}=(b,\ 0\cdots)\in h_M$，$\|A^{(0)}\|_M=1$，使$\|v^{(0)}\|_{(N)}=ab=1$，则

$$\|A^{(n)}+A^{(0)}\|_M\geqslant bc_n+\sum_{i=n+1}^{mn}b_iu_i\geqslant bc_n+\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 2。$$

取$f=\left(\frac{1}{b}\ 0\cdots\right)\in(l_M^*)^*$，则$f(A^{(0)}-A^{(n)})=1$，此与2°矛盾。

3°⇒1° 首先注意到，若$x^{(n)}$，$x^{(0)}$为l_M^*单位球面上的元且$\|x^{(n)}+x^{(0)}\|_M\to 2$，$k_n\in[k_{x^{(n)}}^*,\ k_{x^{(n)}}^{**}]$，则$k_nx_i^{(n)}\to k_0x_i^{(0)}$，$i=1,\ 2,\ \cdots$。

事实上，若存在i_0，使得$k_nx_{i_0}^{(n)}\not\to k_0x_{i_0}^{(0)}$。不妨假定$|k_nx_{i_0}^{(n)}-k_0x_{i_0}^{(0)}|\geqslant\varepsilon_0>0$，$n=1,\ 2,\ \cdots$。

令$c=sup\ \{k_n\}$，则

$$0<a_1=\frac{k_0}{k_0+c}\leqslant\frac{k_0}{k_0+k_n}\leqslant\frac{k_0}{k_0+1}=b<1$$

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.

$$0 < a_2 = \frac{1}{k_0+1} \leqslant \frac{k_n}{k_0+k_n} \leqslant \frac{c}{k_0+c} = b_2 < 1$$

取$a=min(a_1, a_2)$，$b=max(b_1, b_2)$，则$[a, b] \subset (0, 1)$，

因$M(u)$在$[0, q(N^{-1}(1))]$上严格凸，所以当$|k_n x_{i_0}^{(n)} - k_0 x_{i_0}^{(0)}| \geqslant \varepsilon_0$时，存在$\delta > 0$，使得

$$M\left(\frac{k_0}{k_0+k_n} k_n x_{i_0}^{(n)} + \frac{k_n}{k_0+k_n} k_0 x_{i_0}^{(0)}\right) \leqslant (1-\delta)\left[\frac{k_0}{k_0+k_n} M(k_n x_{i_0}^{(n)}) + \frac{k_n}{k_0+k_n} M(k_0 x_{i_0}^{(0)})\right]$$

所　以

$$\|x^{(n)}+x^{(0)}\|_M \leqslant \frac{k_n+k_0}{k_n \cdot k_0}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty} M\left(\frac{k_n \cdot k_0}{k_n+k_0}(x_i^{(n)}+x_i^{(0)})\right)\right)$$

$$\leqslant \frac{k_n+k_0}{k_n \cdot k_0}\left[1+\sum_{i \neq i_0}\left(\frac{k_0}{k_0+k_n} M(k_n x_i^{(n)}) + \frac{k_n}{k_0+k_n} M(k_0 x_i^{(0)})\right) + (1-\delta)\left(\frac{k_0}{k_0+k_n} M(k_n x_{i_0}^{(n)}) + \frac{k_n}{k_0+k_n} M(k_0 x_{i_0}^{(0)})\right)\right]$$

$$= \frac{k_n+k_0}{k_n \cdot k_0}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{k_0}{k_0+k_n} M(k_n x_i^{(n)}) + \frac{k_n}{k_0+k_n} M(k_0 x_i^{(0)})\right) - \delta\left(\frac{k_n}{k_n+k_0} M(k_n x_{i_0}^{(n)}) + \frac{k_0}{k_n+k_0} M(k_0 x_{i_0}^{(n)})\right)\right)$$

$$= \frac{1}{k_n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty} M(k_n x_i^{(n)})\right) + \frac{1}{k_0}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty} M(k_0 x_i^{(0)})\right) - \delta\left(\frac{1}{k_n} M(k_n x_{i_0}^{(n)}) + \frac{1}{k_0} M(k_0 x_{i_0}^{(0)})\right)$$

$$\leqslant 2 - \frac{2\delta}{c} M\left(\frac{k_n x_{i_0}^{(n)} - k_0 x_{i_0}^{(0)}}{2}\right) \leqslant 2 - 2\frac{\delta}{c} M\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) < 2,$$

此与$\|x^{(n)}+x^{(0)}\|_M \to 2$矛盾.

若能证明$k_n \to k_0$，则$\rho_M(k_n x^{(n)}) \to \rho_M(k_0 x^{(0)})$　所以当$\|x^{(n)}+x^{(0)}\|_M \to 2$时，$k_n x^{(n)}$按坐标收敛到$k_0 x^{(0)}$。从而知$k_n x^{(n)}$按范数收敛到$k_0 x^{(0)}$。由此得$x^{(n)} \to x^{(0)}$。

今证$k_n \to k_0$. 因

$$k_n = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} M(k_n x_i^{(n)}),\quad k_0 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} M(k_0 x_i^{(0)})$$

若能证明$\sum_{i=m+1}^{\infty} M(k_n x_i^{(n)})$关于$n$一致地趋于0，那末，

$$\left|k_n - k_0\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{m} M(k_n x_i^{(n)}) - \sum_{i=1}^{m} M(k_0 x_i^{(0)})\right| + \sum_{i=m+1}^{\infty} M(k_n x_i^{(n)}) + \sum_{i=m+1}^{\infty} M(k_0 x_i^{(0)}) \to 0.$$

若$\sum_{i=m+1}^{\infty} M(k_n x_i^{(n)})$关于$n$非一致收敛于0，不妨设$\sum_{i=m_n+1}^{\infty} M(k_n x_i^{(n)}) \geqslant \delta > 0$，

$(m_n\to\infty)$。因$M(u)\in\nabla_2$，对$u_0=q(N^{-1}(1))$，存在$\varepsilon_1>0$，使得$M\left(\frac{u}{2}\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}-\varepsilon_1\right)$ $M(u)$，$|u|\leqslant u_0$。因$\left\{\frac{k_n\cdot k_0}{k_n+k_0}\right\}_{n=1}^{\infty}$为有界数列，所以只要$m$充分大，$\sum\limits_{i=m}^{\infty}M\left(\frac{k_n\cdot k_0}{k_n+k_0}x_i^{(0)}\right)$可任意小．故

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}M\left(\frac{k_n\cdot k_0}{k_n+k_0}(x_i^{(n)}+x_i^{(0)})\right)\leqslant\sum_{i=m+1}^{\infty}M\left(\frac{k_n\cdot k_0}{k_n+k_0}x_i^{(n)}\right)+\frac{\varepsilon_1\delta}{2c}$$

因

$$k_n-k_0=\sum_{i=1}^{m_n}M(k_nx_i^{(n)})-\sum_{i=1}^{m_n}M(k_0x_i^{(0)})+\sum_{i=m_n+1}^{\infty}M(k_nx_i^{(n)})-\sum_{i=m_n+1}^{\infty}M(k_0x_i^{(0)})\geqslant 0$$

故可设$k_n\geqslant k_0$．从而

$$\left\|\frac{x^{(n)}+x_0^{(0)}}{2}\right\|_M\leqslant\frac{k_n+k_0}{2k_n\cdot k_0}\left(1+\sum_{i=1}^{m_n}M\left(\frac{2k_n\cdot k_0}{k_n+k_0}\left(\frac{x_i^{(n)}+x_i^{(0)}}{2}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=m_n+1}^{\infty}M\left(\frac{2k_nk_0}{k_n+k_0}\left(\frac{x_i^{(n)}+x_i^{(0)}}{2}\right)\right)\right)$$

$$\leqslant\frac{k_n+k_0}{2k_n\cdot k_0}\left[1+\sum_{i=1}^{m_n}M\left(\frac{2k_n\cdot k_0}{k_n+k_0}\left(\frac{x_i^{(n)}+x_i^{(0)}}{2}\right)\right)+\sum_{i=m_n+1}^{\infty}M\left(\frac{2k_n\cdot k_0}{k_n+k_0}\frac{x_i^{(n)}}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_1\delta}{2c}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k_n}\left(1+\sum_{i=1}^{m_n}M(k_nx_i^{(n)})\right)+\frac{1}{k_0}\left(1+\sum_{i=1}^{m_n}M(k_0x_i^{(0)})\right)+\frac{2}{k_n}\sum_{i=m_n+1}^{\infty}M\right.$$

$$\left.\left(k_n\frac{x_i^{(n)}}{2}\right)+\frac{\varepsilon_1\delta}{c}\right)\Big]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k_n}\left(1+\sum_{i=1}^{m_n}M(k_nx_i^{(n)})\right)+\frac{2}{k_n}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon_1\right)\sum_{i=m_n+1}^{\infty}M(k_nx_i^{(n)})+\frac{\delta\varepsilon_1}{c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{k_n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(k_nx_i^{(n)})\right)-\frac{2}{k_n}\varepsilon_1\sum_{i=m_n+1}^{\infty}M(k_nx_i^{(n)})+\frac{\varepsilon_1\delta}{c}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\varepsilon_1\delta}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\varepsilon_1\delta}{c}\right)<1$$

此与$\|x^{(n)}+x^{(0)}\|_M\to 2$矛盾。

定理2　下列命题等价

1°　l_M^* 一致凸

2°　l_M^* 弱一致凸

3°　$M(u)\in\triangle_2$且$M(u)$在$[0，q(N^{-1}(1))]$上一致凸

证明： 1°⇒2°　显然

2°⇒3°　因弱一致凸蕴涵弱局部一致凸，由定理1知$M(u)\in\triangle_2$且$M(u)$在$[0，q(N^{-1}(1))]$上严格凸。

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.

若$M(u)$在$[0，q(N^{-1}(1))]$上非一致凸，由引理6，存在$\varepsilon_0>0$及$u_n>0$，使得

$$(1+\varepsilon_0)u_n \leqslant q(N^{-1}(1)),\ p((1+\varepsilon_0)u_n)<\left(1+\frac{1}{n}\right)p(u_n)\ (**)\quad n=1,2,\cdots。$$

不妨设$u_n\to 0$，（否则，$u_n\to u_0\neq 0$，则$p(u)$ 在$(u_0,(1+\varepsilon_0)u_0)$上取常值，此与$M(u)$在$[0,qN^{-1}(1)]$上严格凸矛盾）。从而可设$N(p(u_n))<1-N(p(a))$其中$N(p(a))<1$，取正整数$m_n$，使得

$$1-N(p(a))-\frac{1}{n}\leqslant N(p(u_n))m_n<1-N(p(a))$$

取$w_n>0$，使得

$$N(p(u_n))m_n+N(p(w_n))\geqslant 1-N(p(a))$$

且对任意$\varepsilon>0$，有

$$N(p(u_n))m_n+N(p((1-\varepsilon)w_n))<1-N(p(a))$$

令

$$k_n=(1+\varepsilon_0)u_np((1+\varepsilon_0)u_n)m_n+ap(a)+w_np(w_n)$$

$$h_n=u_np(u_n)m_n+ap(a)+w_np(w_n)$$

$$x^{(n)}=\frac{1}{k_n}(a,\overbrace{(1+\varepsilon_0)u_n\cdots(1+\varepsilon_0)u_n}^{m_n},w_n\ 0\cdots)$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{h_n}(a,\ \overbrace{u_n\cdots u_n}^{m_n},\ w_n,\ 0\cdots)$$

因

$$\sum_{i=1}^{\infty}N(p(h_ny_i^{(n)}))=N(p(u_n))m_n+N(p(w_n))+N(p(a))\geqslant 1.$$ 对任意$\varepsilon>0$，

$$\sum_{i=1}^{\infty}N(p((1-\varepsilon)h_ny_i^{(n)}))=N(p((1-\varepsilon)u_n))m_n+N(p((1-\varepsilon)w_n))+N(p((1-\varepsilon)a))$$

$$<1-N(p(a))+N(p(a))=1$$

由$k^{**}_{y(n)}$的定义知$h_n=k^{**}_{y(n)}$，从而

$$\|y^{(n)}\|_M=\frac{1}{h_n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(h_ny_i^{(n)})\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{h_n}\left(N(p(u_n))m_n+N(p(w_n))+N(p(a))+\sum_{i=1}^{\infty}M(h_ny_i^{(n)})\right)$$

$$=\frac{1}{h_n}\left((u_np(u_n)m_n+w_np(w_n)+ap(a)\right)=1$$

又因$N(p((1+\varepsilon_0)u_n))m_n+N(p(w_n))+N(p(a))\geqslant 1$，所以

$$\|x^{(n)}\|_M\leqslant\frac{1}{k_n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(k_nx_i^{(n)})\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{k_n}\left((N(p((1+\varepsilon_0)u_n))m_n+N(p(w_n))+N(p(a))+\sum_{i=1}^{\infty}M(k_nx_i^{(n)})\right)$$

$$=\frac{1}{k_n}\Big((1+\varepsilon_0)u_n p((1+\varepsilon_0)m_n+w_n p(w_n)+ap(a))=1$$

由2°知，$N(v)\in\triangle_2$，故存在$K>2$，使当$v\leqslant p(u_1)$时，$N(2v)\leqslant KN(v)$，令

$Z^{(n)}=(0,\overbrace{0\cdots0}^{m_n},w_n,0\cdots)$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty}N\left(p\left(\frac{2k_n\cdot k_n}{k_n+h_n}\left(\frac{x_i^{(n)}+y_i^{(n)}}{2}-z_i^{(n)}\right)\right)\right)$$

$$=N\left[p\left(\frac{k_n\cdot h_n}{k_n+h_n}\left(\frac{1+\varepsilon_0}{k_n}+\frac{1}{h_n}\right)u_n\right]m_n+N\left(p\left(\frac{k_n\cdot h_n}{k_n+h_n}\left(\frac{a}{k_n}+\frac{a}{h_n}\right)\right)\right)\right.$$

$$\leqslant N(p((1+\varepsilon_0)u_n))m_n+N(p(a))$$

$$<N\left((1+\frac{1}{n})p(u_n)\right)m_n+N(p(a))$$

$$\leqslant\left\{(1-\frac{1}{n})N(p(u_n))+\frac{1}{n}N(2p(u_n))\right\}m_n+N(p(a))$$

$$\leqslant\left\{(1-\frac{1}{n})N(p(u_n))+\frac{k}{n}N(p(u_n))\right\}m_n+N(p(a))$$

$$<\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{N(p(u_n))m_n+N(p(a))\right\}$$

$$\leqslant1+\frac{k}{n},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}N\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}p\left(\frac{k_n\cdot h_n}{k_n+h_n}\left(\frac{x_i^{(n)}+y_i^{(n)}}{2}-z_i^{(n)}\right)\right)\right)\leqslant1$$

$$\left\|\frac{x^{(n)}+y^{(n)}}{2}\right\|_M\geqslant\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i^{(n)}+y_i^{(n)}}{2}p\left(\frac{2k_n\cdot h_n}{k_n+h_n}\left(\frac{x_i^{(n)}+y_i^{(n)}}{2}-z_i^{(n)}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\left\{\frac{(1+\varepsilon_0)h_n+k_n}{2k_n\cdot h_n}u_n p\left((1+\frac{\varepsilon_0\cdot h_n}{k_n+h_n})u_n\right)m_n+\frac{k_n+h_n}{2h_n\cdot k_n}ap(a)\right\}$$

$$\geqslant\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\left\{\frac{(1+\varepsilon_0)h_n+k_n}{k_n\cdot h_n}u_n p(u_n)m_n+\frac{k_n+h_n}{h_n\cdot k_n}ap(a)\right\}$$

$$\geqslant\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}\right)}\left\{\frac{(1+\varepsilon_0)u_n p((1+\varepsilon_0)u_n)m_n}{k_n}+\frac{ap(a)}{k_n}+\frac{w_n p(w_n)}{k_n}\right.$$

$$\left.+\frac{u_n p(u_n)m_n}{h_n}+\frac{ap(a)}{h_n}+\frac{w_n p(w_n)}{h_n}-\left(\frac{1}{h_n}+\frac{1}{k_n}\right)w_n p(w_n)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}\right)}\left\{2-w_n p(w_n)\left(\frac{1}{h_n}+\frac{1}{k_n}\right)\right\}$$

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.

因

$$N(p(u_n))m_n+N\left(p\left(\frac{w_n}{2}\right)\right)\leqslant 1-N(p(a))$$

$$N(p(u_n))m_n\geqslant 1-N(p(a))-\frac{1}{n}$$

所以

$$N\left(p\left(\frac{w_n}{2}\right)\right)\leqslant 1-N(p(a))-N(p(u_n))m_n$$

$$\leqslant\frac{1}{n}$$

故$w_n\to 0$

今证存在a，$b>0$，使得

$a\leqslant h_nk_n\leqslant b$，$n=1,2,\cdots$

由条件$p((1+\varepsilon_0)u_n)<\left(1+\frac{1}{n}\right)p(u_n)$，只需证明存在$d>0$，使得

$$u_np(u_n)m_n\leqslant d,\quad n=1,2,0\cdots$$

因

$$u_np(u_n)m_n\leqslant q(p(u_n))m_n\leqslant N(2p(u_n))\leqslant kN(p(u_n))m_n\leqslant k(1-N(p(a)))$$

取$d=k(1-N(p(a))$即可

综上所述，由引理3，引理5知$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$为有界集，所以$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$也为有界集，从而可得

$$\|x^{(n)}+y^{(n)}\|_M\to 2\quad(n\to\infty)$$

取$f=\left(\frac{1}{a},0,\cdots\right)\in(l_M^*)^*$,则$f(y^{(n)}-x^{(n)})=\frac{1}{h_n}-\frac{1}{k_n}$

因

$$k_n-h_n=[((1+\varepsilon_0)u_np))1+\varepsilon_0)u_n)-u_np(u_n)]m_n$$

$$>\varepsilon_0[N(p(u))m_n+N(p(w_n))-N(p(w_n))]$$

$$\geqslant\varepsilon_0[1-N(p(a))-N(p(w_n))]\to\varepsilon_0(1-N(p(a))$$

所以　$f(y_n-x_n)=\frac{1}{h_n}-\frac{1}{k_n}\nrightarrow 0$。此与2°矛盾。

3°⇒1°　任取$x^{(n)}$. $y^{(n)}\in S(l_M^*)$，$\|x^{(n)}+y^{(n)}\|_M\to 2$

取$k_n=k^{**}_{x^{(n)}}$，$k'_n=k^{**}_{y^{(n)}}$，由引理3、引理5知

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{k'_n\}_{n=1}^{\infty}$为有界集．令

$$c_1=sup\ \{k_n\},\quad c'_1=inf\ \{k_n\}$$

$$c_2=sup\ \{k'_n\},\quad c'_2=inf\ \{k'_n\}$$

对任意的$\varepsilon>0$，当n充分大以后，有

$$|k_n x_i^{(n)} - k_n' y_i^{(n)}| < \varepsilon max(k_n|x_i^{(n)}|, k_n'|y_i^{(n)}|) i = 1, 2, \cdots$$

因$\left\{\|k_n|x^{(n)}| + k_n'|y^{(n)}|\|_M\right\}_{n=1}^{\infty}$有界，$M(u)\in\triangle_2$，则

$\left\{\rho_M(k_n|x^{(n)}| + k_n'|y^{(n)}|)\right\}_{n=1}^{\infty}$有界．从而有

$$\rho_M(k_n x^{(n)} - k_n' y^{(n)}) \to 0, \quad \|k_n x^{(n)} - k_n y^{(n)}\|_M \to 0,$$

$$|k_n - k_n'| = |k_n\|x^{(n)}\|_M - k_n'\|y^{(n)}\|_M| \leqslant \|k_n x^{(n)} - k_n y^{(n)}\|_M \to 0$$

所以有

$$\|x^{(n)} - y^{(n)}\|_M \to 0$$

对任意的$\varepsilon > 0$（$\varepsilon < 1$），令

$$I_n = \{i;\ |k_n x_i^{(n)} - k_n' y_i^{(n)}| \geqslant \varepsilon max(k_n|x_i^{(n)}|, k_n'|y_i^{(n)}|)\}$$

$$I_n' = \{i;\ |k_n x_i^{(n)} - k_n' y_i^{(n)}| < \varepsilon max(k_n|x_i^{(n)}|, k_n'|y_i^{(n)}|)\}$$

若

$$\sum_{i\in I_n}\left(\frac{1}{k_n}M(k_n x_i^{(n)}) + \frac{1}{k_n'}M(k_n' y_i^{(n)})\right) \to 0$$

则

$$\sum_{i\in I_n} M(k_n x_i^{(n)}) \to 0, \quad \sum_{i\in I_n} M(k_n' y_i^{(n)}) \to 0$$

令

$$v_i^{(n)} = \begin{cases} 0, & i\in I_n' \\ k_n x_i^{(n)}, & i\in I_n \end{cases}, \quad u_i^{(n)} = \begin{cases} 0, & i\in I_n' \\ k_n' y_i^{(n)}, & i\in I_n \end{cases}$$

$$v^{(n)} = \left(v_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty} \qquad u^{(n)} = \left(u_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}$$

则$u^{(n)}$，$v^{(n)}\in l_M^*$．因$M(u)\in\triangle_2$

$$\|k_n x^{(n)} - k_n' y^{(n)}\|_M = \|(k_n x^{(n)} - k_n' y^{(n)}) x_{I_n'} + v^{(n)} - u^{(n)}\|_M$$

$$\leqslant \|(k_n x^{(n)} - k_n' y^{(n)}) x_{I_n'}\|_M + \|v^{(n)}\|_M + \|u^{(n)}\|_M \to 0$$

同上讨论，可知$x^{(n)} - y^{(n)} \to \theta$．定理便得证，故只需证明：对任意$\varepsilon > 0$（$\varepsilon < 1$）

$$\sum_{i\in I_n}\left(\frac{1}{k_n}M(k_n x_i^{(n)}) + \frac{1}{k_n'}M(k_n' y_i^{(n)})\right) \to 0$$

如不然，若存在$\varepsilon_0 > 0$，$\varepsilon_0 < 1$

$$\sum_{i\in I_n}\left(\frac{1}{k_n}M(k_n x_i^{(n)}) + \frac{1}{k_n'}M(k_n' y_i^{(n)})\right) \not\to 0$$

不妨设

$$\sum_{i\in I_n}\left(\frac{1}{k_n}M(k_n x_i^{(n)}) + \frac{1}{k_n'}M(k_n' y_i^{(n)})\right) \geqslant \delta_1 > 0.$$

因

$$0 < a_1 = \frac{c_2'}{c_2 + c_2'} \leqslant \frac{k_n'}{k_n + k_n'} \leqslant \frac{c_2}{1 + c_2} = b_1 < 1$$

$$0 < a_2 = \frac{c_1'}{c_1' + c_2} \leqslant \frac{k_n}{k_n + k_n'} \leqslant \frac{c_1}{1 + c_1} = b_2 < 1$$

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.

取 $a=min(a_1, a_2)$. $b=max(b_1, b_2)$ ，则 $[a, b]\subset(0, 1)$

由于 $M(u)$ 在 $[0, q(N^{-1}(1))]$ 上一致凸，存在 $\delta>0$，

使当

$$|k_n x_i^{(n)}-k_n' y_i^{(n)}|\geqslant\varepsilon_0 max(k_n|x_i^{(n)}|, k_n'|y_i^{(n)}|)$$

时，有

$$M\left(\frac{k_n'}{k_n+k_n'}k_n x_i^{(n)}+\frac{k_n}{k_n+k_n'}k_n' y_i^{(n)}\right)$$

$$\leqslant(1-\delta)\left(\frac{k_n'}{k_n+k_n'}M(k_n x_i^{(n)})+\frac{k_n}{k_n+k_n'}M(k_n' y_i^{(n)})\right)$$

所以

$$\|x^{(n)}+y^{(n)}\|_M\leqslant\frac{k_n+k_n'}{k_n\cdot k_n'}\left\{1+\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{k_n\cdot k_n'}{k_n+k_n'}(x_i^{(n)}+y_i^{(n)})\right)\right\}$$

$$=\frac{k_n+k_n'}{k_n\cdot k_n'}\left(1+\sum_{i\in I_n}M\left(\frac{k_n\cdot k_n'}{k_n+k_n'}(x_i^{(n)}+y_i^{(n)})\right)+\sum_{i\,\bar{\in}\, I_n}M\left(\frac{k_n k_n'}{k_n+k_n'}(x_i^{(n)}+y_i^{(n)})\right)\right)$$

$$\leqslant\frac{k_n+k_n'}{k_n\cdot k_n'}\left\{1+\sum_{i\,\bar{\in}\, I_n}\left(\frac{k_n'}{k_n+k_n'}M(k_n x_i^{(n)})+\frac{k_n}{k_n+k_n'}M(k_n' y_i^{(n)})\right)+(1-\delta)\right.$$

$$\left.\left[\sum_{i\in I_n}\left(\frac{k_n'}{k_n+k_n'}M(k_n x_i^{(n)})+\frac{k_n}{k_n+k_n'}M(k_n' y_i^{(n)})\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{k_n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(k_n x_i^{(n)})\right)+\frac{1}{k_n'}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(k_n' y_i^{(n)})\right)$$

$$-\delta\left(\sum_{i\in I_n}\frac{1}{k_n}M(k_n x_i^{(n)})+\frac{1}{k_n'}M(k_n' y_i^{(n)})\right)$$

$$\leqslant 2-\delta\delta_1<2 \qquad n=1, 2, \cdots$$

此与 $\|x^{(n)}+y^{(n)}\|_M\to 2$ 矛盾．定理获证．

参 考 文 献

〔1〕吴从炘，王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科技出版社，（1983）．

〔2〕K. Sundaresan, pacific J. Math.,（1965），1083—1086。

〔3〕A. Kamińska, Indag. Math., A85,（1）（1982）27—36。

〔4〕陈述涛，王玉文，数学杂志，（1985），No.1，9—14。

〔5〕王廷辅，王玉文，李岩红，Orlicz空间的弱一致凸（待发表）。

〔6〕陈述涛，哈尔滨师范大学学报，（1983），No.2，48—56。

〔7〕陈述涛，申亚权，哈尔滨师范大学学报，（1985），No.1，增页1—5。

〔8〕王廷辅，陈述涛，王玉文，数学进展14（1985），283—284。

〔9〕李岩红，Orlicz序列空间的弱一致凸性（待发表）。

〔10〕陈述涛，申亚权，哈尔滨师范大学学报（1985），No.2，增页1—5。

〔11〕陈述涛，申亚权，哈尔滨师范大学学报（1985），No.2，1—6。

〔12〕J. Diestel, Geometry of Banach spaces——Selected Topics, Lecture Notes, Math., V. 485,（1975）．

〔13〕南朝勋，Banach空间几何学讲义，安徽师范大学，（1982）．

〔14〕叶以宁，数学年刊，4（A），（1983），487—493。