第4卷　　哈尔滨师范大学自然科学学报　　Vol.4 No.1 1988
第1期　　NATURAL SCIENCES JOURNAL OF HARBIN NORMAL UNIVERSITY

Orlicz序列空間的光滑性

陶 良 德

摘　　要

本文给出Orlicz序列空间l_M°光滑性的判据，得出：Orlicz序列空间l_M°光滑的充要条件是，$M(u)\in\triangle_2$，$q(v)$在〔0，$N^{-1}(\frac{1}{2})$〕上严格增。其中l_M°表示由N函数$M(u)$生成的赋Orlicz范数的Orlicz序列空间。$q(v)$为$M(u)$的余N函数$N(v)$的右导数。

关键词：光滑

为证本文中的结果，先证明如下的引理与命题。

引理1．(*a*)对任意$0\leqslant u\in l_M$，和$\varepsilon>0$，存在$w\in h_M$，$0\leqslant w\leqslant u$，使得$\rho_M(u-w)<\varepsilon$．

(*b*)对任意非负列$\{u_n\}$，$u_n=\{u_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}M(u_k^{(n)})<\infty$，存在$w\in l_M$，$w\geqslant u_n$使得$\rho_M(w)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}M(u_k^{(n)})<\infty$．

证明：(*a*) 因为$\sum\limits_{k=1}^{\infty}M(u_k)<\infty$，所以对任意$\varepsilon>0$，存在$n$，使得$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}M(u_k)<\varepsilon$，取$w=[u]_n\in h_M$即可．其中$[u]_n=(u_1,u_2,\cdots,u_n,0,\cdots)$

(*b*)，因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}M(u_k^{(n)})<\infty$，所以$\{u_k^{(n)}\}$关于$k$，$n$均为有界数列．取

$$w=\{w_k\}_{k=1}^{\infty},\quad w_k=\sup_n\{u_k^{(n)}\},\quad k=1,2,\cdots$$

则$M(w_k)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}M(u_k^{(n)})$，所以$\sum\limits_{k=1}^{\infty}M(w_k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}M(u_k^{(n)})$。

引理2．若ϕ，ψ均为l_M°上正奇异泛函，则

(*a*) $\|\phi\|_N=\|\phi\|_{(N)}=\sup\limits_{\rho M(u)<\infty}\phi(u)=\sup\limits_{\rho M(u)<\varepsilon}\phi(u)$

(*b*) 对任意$\varepsilon>0$，有$w\geqslant0$，$\rho_M(w)<\varepsilon$，使得$\|\phi\|_N=\phi(w)$

(*c*) $\|\phi+\psi\|_N=\|\phi\|_N+\|\psi\|_N$

证明：(*a*)，因

$$\|\phi\|_{(N)}=\sup\frac{\phi(u)}{\|u\|_M}\leqslant\sup\frac{\phi(u)}{\|u\|_{(M)}}=\|\phi\|_N=\sup_{\rho M)u<1}\phi(u)\leqslant\sup_{\rho M(u)<\infty}\phi(u)$$

另一方面，对任意的$\varepsilon>0$，$u\in l_M$，$u\geqslant0$，由引理1(*a*)，存在$w\in h_M$，$0\leqslant w\leqslant u$，使得$\rho_M(u-w)<\varepsilon$。那末，

$$\|u-w\|_M\leqslant1+\varepsilon.$$

$$\phi(u)=\phi(u-w)+\phi(w)=\phi(u-w)\leqslant\frac{1+\varepsilon}{\|u-w\|_M}\phi(u-w)\leqslant(1+\varepsilon)\|\phi\|_{(N)}$$

由ε的任意性知，$\sup\limits_{\rho M(u)<\infty}\phi(u)\leqslant\|\phi\|_{(N)}$。

本文1987年3月1日收到

在上述证明中顺便得到：对任意$\varepsilon>0$，

$$\|\phi\|_N=\sup_{\rho_M(u)<\varepsilon}\phi(u) \qquad (*)$$

(b) .对任意$\varepsilon>0$，由（*）式，有$u_n\in l_M$，$\rho_M(u_n)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}$，使得$\|\phi\|_N$

$$\leqslant\phi(u_n)+\frac{1}{n}.$$ 因

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}M(u_k^{(n)})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$

由引理1(b)，存在

$$w\geqslant u_n,\ n=1,2,\cdots$$

$$\rho_M(w)\leqslant\varepsilon,\quad \|\phi\|_N\leqslant\phi(u_n)+\frac{1}{n}\leqslant\phi(w)+\frac{1}{n},$$

再由n的任意性，$\phi(w)\geqslant\|\phi\|_N$，从(a)得$\|\phi\|_N=\phi(w)$。

(c)，由(b)，存在$w\geqslant0$，$\rho_M(w)<\infty$，且

$$\phi(w)+\psi(w)=(\phi+\psi)(w)=\|\phi+\psi\|_N\leqslant\|\phi\|_N+\|\psi\|_N$$

如果等式不成立，比如$\phi(w)<\|\phi\|_N$，由本引理(b)，存在$w'\geqslant0$，$\sum_{k=1}^{\infty}M(w'_k)<\infty$，$\|\phi\|_N=\phi(w')$，再由引理1(b)，存在$w''$，$w''\geqslant w'$，$w'\geqslant w$，$\rho_M(w'')<\infty$，但

$$\|\phi+\psi\|_N\geqslant(\phi+\psi)(w'')\geqslant\phi(w')+\psi(w)=\|\phi\|_N+\psi(w)$$
$$>\phi(w)+\psi(w)=\|\phi+\psi\|_N.$$

矛盾。

命题1 l_M^*上有界线性泛函ϕ可唯一地表为：$\phi(u)=\phi_c(u)+\phi_s(u)=\Sigma u_kv_k+\phi_s(u)$

$$\|\phi\|_N=\|\phi_c\|_N+\|\phi_s\|_N$$

$$\|\phi\|_{(N)}=\inf\left\{\frac{1}{\xi},\ \xi>0,\ \rho_N(\xi\nu)+\xi\|\phi_s\|_{(N)}\leqslant1\right\}$$

此处$\phi_c(u)$与$\phi_s(u)$分别表示序列型与奇异型泛函。

证明仿函数空间。

命题2，l_M^*上线性泛函为奇异泛函的充要条件是$\|\phi\|_N=\|\phi\|_{(N)}$。由此可见$\|u\|_M>\|u\|_{(M)}u\neq\theta$。

证明：为简单起见，以下均讨论正泛函

"$\Rightarrow$" 见引理2(b)。

"$\Leftarrow$" 的首先注意，对任意线性泛函中，都有$\|\phi\|_N=\|\phi_c\|_N+\|\phi_s\|_N$。事实上，对任意的$\varepsilon>0$，存在$u\geqslant0$，使$\rho_M(u)<1$，$\|\phi_c\|_N\leqslant\phi_c(u)+\varepsilon$，又据引理2(b)，存在$w\geqslant0$，$\rho_M(w)\leqslant1-\rho_M(u)$，使$\|\phi_s\|_N=\phi_s(w)$，再由引理1(b)，有$v\geqslant0$，$v\geqslant u$，$v\geqslant w$，且$\rho_M(v)\leqslant\rho_M(u)+\rho_M(w)\leqslant1$，所以，

$$\|\phi_c\|_N+\|\phi_s\|_N\leqslant\phi_c(u)+\phi_s(w)+\varepsilon\leqslant\phi_c(v)+\varepsilon+\phi_s(v)$$
$$=(\phi_c+\phi_s)(v)+\varepsilon=\phi(v)+\varepsilon\leqslant\|\phi\|_N+\varepsilon。$$

由ε的任意性得$\|\phi_c\|_N+\|\phi_s\|_N\leqslant\|\phi\|_N$

$\|\phi\|_N \leqslant \|\phi_c\|_N + \|\phi_s\|_N$是显然的。

若条件成立，而ϕ非奇异，即$\phi_c \neq \theta$，不妨设$\|\phi_c\|_N = 1$，从

$$\|\phi\|_{(N)} \leqslant \|\phi_c\|_{(N)} + \|\phi_s\|_{(N)} \leqslant \|\phi_c\|_N + \|\phi_s\|_N = \|\phi\|_N = \|\phi\|_{(N)}$$

得到：$\|\phi_c\|_N = \|\phi_c\|_{(N)} = 1$

设$\phi_c(u) = \Sigma u_k v_k$，$v = (v_k)_{k=1}^{\infty} \in l_N^{\cdot}$，则$\|v\|_N = \|v\|_{(N)} = 1$，所以存在$\xi_0 > 0$，$1 + \Sigma N(\xi_0 v_k) = \xi_0 \|v\|_N = \xi_0$，从而$\xi_0 \geqslant 1$，若$\xi_0 > 1$，取$\varepsilon > 0$，$\xi_0 > 1 + \varepsilon > 1$，则有$\rho_N(\xi_0 v) \geqslant \frac{\xi_0}{1+\varepsilon}\rho_N((1+\varepsilon)v) \geqslant \frac{\xi_0}{1+\varepsilon}$（因$\|v\|_{(N)} = 1$，所以$\rho_N((1+\varepsilon)v) \geqslant 1$）。由$\varepsilon$的任意性，$\rho_N(\xi_0 v) \geqslant \xi_0$。矛盾。

所以，$\xi_0 = 1$，从而$\rho_N(v) = 0$，故$v = \theta$。　　　　矛盾。

类似函数空间情形，还可得到

命题 3：任何非零奇异泛函在$U \in S(l_M^{\cdot})$上达不到范数。

引进如下三个参数。对$u \in l_M^{\cdot}$，记

$$d_1(u) = dist(u,\ h_M) = inf\ \{\|u - w\|_M,\ w \in h_M\}$$

$$d_2(u) = dist(u,\ h_{(M)}) = inf\ \{\|u - w\|_{(M)},\ w \in h_M\}$$

$$\xi_0(u) = inf\ \{\xi > 0,\ \rho_M(\frac{u}{\xi}) < \infty\}$$

则$u \in h_M \Longleftrightarrow d_1(u) = d_2(u) = \xi_0(u) = 0$

命题 4：若$u \in l_M^{\cdot}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\|u - [u]_n\|_M = \lim\limits_{n\to\infty}\|u - [u]_n\|_{(M)} = \xi_0(u)$。

命题 5：若$u \in l_M^{\cdot}$，则$d_1(u) = d_2(u) = \xi_0(u)$。

命题 6：设$f = v + \phi$，v为序列型泛函，ϕ为奇异型泛函，$\|f\|_{(N)} = 1$，在$U(l_M^{\cdot})$上达到范数。则$\rho_N(v) + \|\phi\|_{(N)} = 1$。

命题 7：若$u \in l_M^{\cdot}$为$l_M^{\cdot}$的光滑点，则u的范数在$U(l_{(N)}^{\cdot})$上可达。

证明：设u为$l_M^{\cdot}$的光滑点，不妨设$\|u\|_M = 1$

若u的范数在$U(l_{(N)}^{\cdot})$上不可达，则存在

$f = v + \phi \in S(l_M^{\cdot})^*$，使得$f(u) = 1$，$\phi \neq \theta$为序列型泛函，$\phi$为奇异型泛函。

设$u = (u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots)$

因$\rho_M(u) \leqslant \|u\|_{(M)} \leqslant \|u\|_M = 1$，所以$|u_k| \leqslant M^{-}(1)$。$k = 1, 2, \cdots$。

在区间$[0, M^{-1}(1)]$中插入分点$\frac{M^{-1}(1)}{2^n}$，$n = 1, 2, \cdots$，令

$$G_n = \{k;\ \frac{M^{-1}(1)}{2^{n+1}} < |u_k| \leqslant \frac{M^{-1}(1)}{2^n}\},\quad A_0 = \{k;\ u_k = 0\},$$

则G_n互不相交，且$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} G_n \cup A_0$为全体自然数的集合

对每一G_n，由于$\rho_M(u) \leqslant 1$，所以G_n为有限集。在$(\frac{M^{-1}(1)}{2^{n+1}}, \frac{M^{-1}(1)}{2^n}]$上适当插入有限个分点，使得每一个区间只含某一$|u_{k0}|$，或者与$|u_{k0}|$相同的那些$|u_k|$.

将这些分点按其大小重新编号得：

$$M^{-1}(1) \geqslant a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots > 0$$

记$H_n = \{k;\ a_{n+1} < |u_k| \leqslant a_n\}$

此时H_n有两种可能：(a)H_n为单点集、(b)Hn为非单点集，但为有限集。将H_n为单点集的仍记为H_n，$(n=0,1,2,\cdots)$。将H_n为非单点集的那些集合再分为二部分。其分 法如下。

若H_n含有m_n个元素，m_n为偶数，记H'_n为任意取H_n中$\frac{m_n}{2}$个元素所构成的集合；H''_n为H_n中其 余$\frac{m_n}{2}$个元素所构成的集。

若m_n为奇数，记H_n'为H_n中任取$\frac{m_n+1}{2}$个元素所构成的集 合，H_n''为 H_n 中其 余$\frac{m_n-1}{2}$ 个元素所构成的集合。令

$$u_1=\sum_{n=0}^{\infty}u\chi_{Hm}+\sum_{n=0}^{\infty}u\chi_{H_n'}+u\chi_{A0}$$

$$u_2=\sum_{n=0}^{\infty}u\chi_{H2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}u\chi_{H_n''}+u\chi_{A0}$$

则$u=u_1+u_2$

现证明$\xi_0(u_1)=\xi_0(u_2)=\xi_0(u)$

首先注意到对任意$\varepsilon>0$，$\varepsilon<\xi_0(u)$，都有

$$\rho_M(\frac{u_1}{\xi_0-\varepsilon})=\infty,\quad \rho_M(\frac{u_2}{\xi_0-\varepsilon})=\infty$$

从而有$\zeta_0(u_1)\geqslant\xi_0(u)$，$\xi_0(u_2)\geqslant\xi_0(u)$。

事实上，若存在$\varepsilon_0>0$，$\varepsilon_0<\xi_0(u)$，$\rho_M(\frac{u_1}{\xi_0-\varepsilon})<\infty$，

则可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}M(\frac{a_{m+1}}{\xi_0-\varepsilon_0})<\infty$，从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}M(\frac{a_{m+2}}{\xi_0-\varepsilon_0})<\infty$.所以$\sum\limits_{k\ \cup Hm+2}M(\frac{u_k}{\xi_0-\varepsilon_0})<\infty$。

由假设$\rho_M(\frac{u_1}{\xi_0-\varepsilon_0})<\infty$知，$\sum\limits_{k\in\cup 2n+1}M(\frac{u_k}{\xi_0-\varepsilon_0}<\infty.\sum\limits_{k\in\cup H'_n}M(\frac{u_k}{\xi_0-\varepsilon_0})<\infty$，

从而$\sum\limits_{k\in\cup H'_n}M\frac{u_k}{(\xi_0-\varepsilon_0}$)$<\infty$(因$H_n'$与$H_n''$至多少一个元素）。故

$$\sum_{k=1}M(\frac{u_k}{\xi_0-\varepsilon_0})=\sum_{k\in\cup Hn}M(\frac{u_k}{\xi_0-\varepsilon_0})+\sum_{k\in\cup Hn'}M(\frac{u_k}{\xi_0-\varepsilon_0})+\sum_{k\in\cup Hn'}M(\frac{u_k}{\xi_0-\varepsilon_0})<\infty$$

矛盾(因$\sum\limits_{k=1}^{\infty}M(\frac{u_k}{\xi_0-\varepsilon_0})=\infty$)。

显然有$\xi_0(u_1)\leqslant\xi_0(u)$，$\xi_0(u_2)\leqslant\xi_0(u)$

因 $u\overline{\in}h_M$(否则u的范数在$S(l^*_{(N)})$中达到范数)，所以u_1，$u_2\overline{\in}h_M$。

令

$$E_M(u_i)=span\ \{ui,\ h_M\}\ ,\ i=1,2。$$

于是对任意的$x\in E_M(u_i)$，有唯一的表达式$x=au_1+w$，其中a为实数，$w\in h_M$。

$$\|u_2-x\|_M=\sup_{\rho_N(v)\le 1}\ (\sum_{u_k^{(1)}\ne 0}|(u_k^{(2)}-x_k)v_k|+\sum_{u_k^{(1)}=0}|(u_k^{(2)}-w_k)v_k|)$$

$\geqslant \sup_{\rho_N(v)\leq 1} \sum_{u_k^{(1)}=0} |(u_k^{(2)}-w_k)v_k| = \|u_2-\omega\chi(u_k^{(1)}=0)\|_M \geqslant \xi_0(u)$

由x的任意性有：

$$dist(u_2,\ E_M(u_1)) \geqslant \xi_0(u)$$

但显然有$dist(u_2,\ E_M(u_1)) \leqslant \xi_0(u)$，所以

$$dist(u_2,\ E_M(u_1)) = \xi_0(u)$$

同理可得

$$dist(u_1,\ E_M(u_2)) = \xi_0(u)$$

由$Hahn$—$Banach$定理，存在$\phi_i \in (l_M^{\cdot})^*$，使得$\|\phi_i\|_{(N)}=1$，$\phi_i(u_i)=\xi_0$，$i=1,2$且对任意$x_i \in E_M(u_i)$，$i=1,2$，$\phi_i(x_j)=0$，$i\neq j$此时$\phi_i$显然为奇异泛函。令

$$f_i = \nu + \|\phi\|_{(N)}\phi_i \qquad i=1,2。$$

$\rho_N(\nu)+\|\phi\|_{(N)}\|\phi_i\|_{(N)}=\rho_N(\nu)+\|\phi\|_{(N)}=1$（命题6），由$\|f_i\|_{(N)}$的表达式知：

$$\|f_i\| \leqslant 1 \quad i=1,2。$$

又因

$$\xi_0\|\phi\|_{(N)} = \lim_{n\to\infty}\|u-[u]_n\|_M\|\phi\|_{(N)} \geqslant \lim_{n\to\infty}\phi(u-[u]_n)=\phi(u)\text{所以}$$

$$f_1(u)=\nu(u)+\|\phi\|_{(N)}\phi_1(u)=\nu(u)+\|\phi\|_{(N)}\phi_1(u_1+u_2)$$

$$=\nu(u)+\|\phi\|_{(N)}\phi_1(u_1)=\nu(u)+\xi_0\|\phi\|_{(N)}$$

$$\geqslant \nu(u)+\phi(u)=f(u)=1$$

从而$f_1(u)=\|u\|_M=1$

同理$f_2(u)=1$，因$\|\phi\|_{(N)}\neq 0$，$\phi_1(u_1)=\xi_0>0$ $\phi_2(u_1)=0$，所以$\phi_1\neq\phi_2$，从而$f_1\neq f_2$。此与u为$l_M^{\cdot}$的光滑点矛盾。

定理：$l_M^{\cdot}$光滑的充要条件是：$M(u)\in\Delta_2$，$q(v)$在$[0,N^{-1}(\frac{1}{2})]$上严格增。

证明："⇒" 设$l_M^{\cdot}$光滑，若$M(u)\in\Delta_2$，由$James$定理，$(l_M^{\cdot})^*$中可达范数的泛函在$(l_M^{\cdot})^*$中稠密，而奇异泛函永远达不到范数（命题3）。故存在$f=v+\phi\in(l_M^{\cdot})^*$，奇异泛函$\phi\neq\theta$，可在$S(l_M^{\cdot})$上达到范数。即有$u_0\in S(l_M^{\cdot})$，使$f(u_0)=\|f\|_{(N)}$．因$l_M^{\cdot}$光滑，$u_0\in S(l_M^{\cdot})$为光滑点。由命题7，必有$v\in l_{(N)}^{\cdot}$，$\|v\|_{(N)}=1$，使得$v(u_0)=\|u_0\|_M=1$。

显然$\dfrac{f}{\|f\|_{(N)}}\neq v_1$，矛盾。

又因$l_M^{\cdot}$光滑。则因$l_M^{\cdot}=(h_{(N)})^*$，所以$h_{(N)}$严格凸。而$h_{(N)}$严格凸的充要条件为$q(\nu)$在$[0,\ N^{-1}(\frac{1}{2})]$上严格增。

"⇐" 设$M(u)\in\Delta_2$，$q(v)$在$[0,\ N^{-1}(\frac{1}{2})]$上严格增。

对任意的$u\in S(h_M)$，$\nu\in S(l_{(N)}^{\cdot})$，$v(u)=\Sigma u_k v_k=1$，由假设可知$\rho_N(\nu)=1$（否则，若$\rho_N(v)<1$，不妨设$u_k$、$v_k\geqslant 0$，$k=1,2,\cdots$，取$u_{k_0}\neq 0$，$\varepsilon_0>0$，使得

$\sum_{k\neq k_0} N(v_k)+N(v_k+\varepsilon_0)<1$，则$\sum_{k\neq k_0} u_k v_k+u_{k_0}(v_{k_0}+\varepsilon_0)>1$但$\sum_{k\neq k_0} u_k v_k+u_{k_0}(v_{k_0}+\varepsilon_0)\leqslant 1$。矛盾）

设$v_1,v_2\in S(l_{(N)}^{\cdot})$，$v_1(u)=v_2(u)$，则由上面推导得$\rho_N(v_1)=\rho_N(v_2)=\rho_N(\frac{v_1+v_2}{2})=1$

因$N(v)$为凸函数，则

$$1=\Sigma N\left(\frac{v_k^{(1)}+v_k^{(2)}}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\Sigma N(v_k^{(1)})+\Sigma N(v_k^{(2)})\right)=1$$

故

$$N\left(\frac{v_k^{(1)}+v_k^{(2)}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(N(v_k^{(1)})+N(v_k^{(2)})\right),\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

若$N\left(\frac{v_k^{(1)}+v_k^{(2)}}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}$。由$q(v)$在$[0,\ N^{-1}(\frac{1}{2})]$上严格增知。$v_k^{(1)}=v_k^{(2)}$。

若$N\left(\frac{v_i^{(1)}+v_i^{(2)}}{2}\right)>\frac{1}{2}$，则$N\left(\frac{v_j^{(1)}+v_j^{(2)}}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\ j\neq i$。

由以上讨论知$v_{(1)}^j=v_{(2)}^j$，$j\neq i$。若$v_{(1)}^i\neq v_{(2)}^i$，不妨设$v_{(1)}^i>v_{(2)}^i\geqslant0$，此时有

$$1=\Sigma N(v_{(1)}^i)>\Sigma N(v_{(2)}^i)=1$$

矛盾。从而$v_1=v_2$，$h_M=l_M^*$光滑，证毕。

参 考 文 献

〔1〕吴从炘、王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江省科技出版社 (1983)
〔2〕吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文，*Orlicz*空间几何理论，哈工大出版社，1986.
〔3〕陈述涛，*Smoothness of Orlicz spaces*, *Comment. Maths*, XXVI(1987), 49-58。

Smoothness of Sequence Orlicz Spaces

Tao Liangde

Abstract

The main result of this paper is that the Sequence Orlicz Space generated by N-function M (u) and equipped with Orlicz norm is smooth if and only if M (u) satisfies condition Δ_2 for small u and q (v) is strictly increasing on $[0,\ N^{-1}(1/2)]$ where N (V) is the complementary function to M (u) and q (v) its right-hand derivative

Keywords: Smoothness