Н. В. ТРУНОВ

СТАТЬИ ПО НЕКОММУТАТИВНОЙ ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Научные редакторы: Тихонов О. Е.,
Шерстнев А. Н.

Содержание

Предисловие 5

I. К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В АЛГЕБРАХ ОПЕРАТОРОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА (Изв. вузов. Математика, 1978, 7, 79–88; 12, 88–99, *соавтор А. Н. Шерстнев*) 7

II. УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ В ОДНОЙ СХЕМЕ НЕКОММУТАТИВНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (В кн.: Trans. VIII Prague Conf. on Inform. Theory, Stat. Decis. Funct. Random Processes, Vol. B, Prague, 1978, 287–299, *соавтор А. Н. Шерстнев*) 27

III. О НЕКОММУТАТИВНОМ АНАЛОГЕ ПРОСТРАНСТВА L_p (Изв. вузов. Математика, 1979, 11, 69–77) 28

IV. О НЕКОММУТАТИВНОМ АНАЛОГЕ ПРОСТРАНСТВА L_2 (Конструкт. теория функций и функц. анализ, Казань, Изд–во Казанск. ун–та, вып. 2, 1979, 93–114) 37

V. ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ ВЕСА НА АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА (Казань, Казанск. ун–т, 1978, 24 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101-79 Деп.) 55

VI. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА И РЕГУЛЯРНЫЕ ВЕСА (Конструкт. теория функций и функц. анализ, Казань, Изд–во Казанск. ун–та, вып. 3, 1981, 73–87) 68

VII. ПРОСТРАНСТВА L_p, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ВЕСОМ НА ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ НЕЙМАНА (Конструкт. теория функций и функц. анализ, Казань, Изд–во Казанск. ун–та, вып. 3, 1981, 88–93.) 81

VIII. К ТЕОРИИ НОРМАЛЬНЫХ ВЕСОВ НА АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА (Изв. вузов. Математика, 1982, 8, 61–70) 87

IX. К ТЕОРИИ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ L_1 И L_2 (Конструкт. теория функций и функц. анализ, Казань, Изд–во Казанск. ун–та, 1983, вып. 4, 96–105) 99

X. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА НА ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ (Казань, Казанск. ун–т, 1984, 35 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 июня 1984 г., 4948-84 Деп.) 106

XI. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕКОММУТАТИВНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ (В кн.: Совр. проблемы математики. Новейшие достиж. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), М., том 27, 1985, 167–190, *соавтор А. Н. Шерстнев*) 124

XII. ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ ВЕСА НА АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ (Констр. теория функций и функц. анализ, Казань, 1985, вып. 5, 80–94) 147

XIII. ОБ УСЛОВНЫХ ОЖИДАНИЯХ В АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА (Констр. теория функций и функц. анализ, Казань, 1985, вып. 5, 94–111, *соавтор А. Н. Шерстнев*) 157

XIV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА НА JBW-АЛГЕБРАХ (Функц. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 3, 77–78) 163

XV. ТЕОРЕМА ПЛОТНОСТИ КАПЛАНСКОГО ДЛЯ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР (Изв. вузов. Математика, 1987, 4, 75–78) 167

XVI. О ВЕСЕ ХААРА НА АЛГЕБРЕ НЕЙМАНА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ (Изв. вузов. Математика, 1992, 11, 65–71, *соавтор И. И. Фульман*) 173

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном издании собраны научные статьи талантливого казанского математика Николая Васильевича Трунова (1954–1991), внёсшего существенный вклад в общую теорию интегрирования в алгебрах операторов. Еще студентом механико-математического факультета КГУ он активно включился в работу научного семинара “Алгебры операторов и их приложения”, действующего на кафедре математического анализа. После окончания Казанского университета (1976) он был оставлен при кафедре математического анализа в должности ассистента. К этому времени Николай Васильевич уже стал профессиональным математиком, выбрав в качестве темы своих исследований некоммутативную теорию интегрирования, — тему весьма богатую новыми идеями, но требующую глубоких познаний и активного владения обширной литературой, весьма непростой для восприятия. Уже в 1980 г., досрочно окончив заочную аспирантуру, он блестяще защищает кандидатскую диссертацию “К теории интегрирования в алгебрах Неймана относительно веса”, после чего с удвоенной энергией продолжает исследования, существенно расширив диапазон проблематики, подключив новые идеи неассоциативного интегрирования в контексте йордановых алгебр операторов. Для творческого стиля Николая Васильевича характерно сочетание широкой математической эрудиции с умением быстро и глубоко проникать в суть решаемой проблемы, добиваться её исчерпывающего решения.

В 1983 г. он избирается на должность доцента кафедры математического анализа, в 1984 г. становится лауреатом Всесоюзного конкурса молодых учёных, организованного Академией Наук СССР, а в 1986 г. — лауреатом премии Ленинского комсомола в области науки и техники (в составе творческого коллектива) за работу “Исследования по операторным алгебрам и некоммутативному интегрированию”. Николай Васильевич любил работать в коллективе, был очень общительным человеком, глубоко интересующимся философией, литературой, общественно-политическими проблемами.

Его исключительно плодотворная работа не прервалась, когда обнаружилось, что он неизлечимо болен. В его планах было использование возможностей аппарата гармонического анализа для изучения пространств интегрируемых операторов, и он привлёк к этой работе своего аспиранта...

Научное наследие Н. В. Трунова, собранное в этой книге, несомненно будет полезно и молодым исследователям, и специалистам по теории топологических алгебр. В подготовке данного издания приняли участие участники семинара "Алгебры операторов и их приложения" А. М. Бикчентаев, Ф. Ф. Султанбеков, О. Е. Тихонов, Е. А. Турилова. Без оговорок исправлены замеченные опечатки. Некоторые комментарии вынесены в Примечания.

Шерстнев А. Н.

I. К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В АЛГЕБРАХ ОПЕРАТОРОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА

(совместно с А. Н. Шерстневым)
Изв. вузов. Математика,
1978, вып. 7, 79–88, вып. 12, 88–99

В предлагаемой работе развивается и углубляется теория некоммутативного аналога пространства L_1, предложенная одним из авторов [4–7]. Доказательство корректности конструкции пространства $L_1(\varphi)$ интегрируемых (относительно веса φ, заданного на алгебре Неймана $\mathcal{M}$) билинейных форм в цитированных работах по существу опиралось на известную теорию Сигала [17]. Однако, с помощью техники обобщённых гильбертовых алгебр можно дать доказательство корректности, не использующее теорию Сигала. Это сделано в §1. В §2 дана двойственная характеризация пространства $L_1(\varphi)$, как пространства всех ультраслабо непрерывных линейных функционалов на алгебре $\mathcal{M}$, и доказано, что соответствующий изоморфизм согласуется с порядковыми свойствами пространств $L_1(\varphi)$ и $\mathcal{M}_*$. Как известно, в случае следа пространство $L_1(\tau)$ содержательно описывается операторами. В §3 исследован вопрос о том, когда интегрируемые билинейные формы в нашей конструкции сводятся к операторам. В §4 введено и изучено понятие условного ожидания применительно к классу интегрируемых билинейных форм. Показано, что это понятие является естественным распространением известного понятия условного ожидания, как отображения алгебры Неймана на свою подалгебру (см. напр., [1], [19]). Здесь же приведён некоммутативный аналог теоремы Фубини. В заключение (§5) пространство $L_1(\varphi)$ включается в традиционную тройку $\{L_1(\varphi),\ L_2(\varphi),\ L_\infty(\varphi)\}$ обсуждена также квантовая феноменология интегрируемых билинейных форм.

§1. Конструкция пространства $L_1(\varphi)$

Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H,

$$\mathfrak{n}_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \colon \varphi(x^*x) < +\infty\}, \quad \mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \colon \varphi(x) < +\infty\},$$

$\mathfrak{m}_\varphi$ ($\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$) — комплексная (соответственно, вещественная) линейная оболочка конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*$; той же буквой φ мы обозначаем продолжение по линейности на $\mathfrak{m}_\varphi$ отображения $\varphi|\mathfrak{m}_\varphi^+$. Напомним известную конструкцию представления, индуцированного весом. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathfrak{n}_\varphi$ по скалярному произведению $\{x,y\}\to\varphi(y^*x)$ и $\widehat{\ }): \mathfrak{n}_\varphi\to\mathfrak{H}$ — каноническое вложение. Отображение π алгебры $\mathcal{M}$ в алгебру $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$, заданное равенством

$$\pi(x)\widehat{y}=\widehat{xy}\quad (x\in\mathcal{M},\ y\in\mathfrak{n}_\varphi),$$

определяет представление алгебры $\mathcal{M}$, индуцированное весом φ. Инволюция ${}^\sharp): \widehat{x}^\sharp\equiv\widehat{x^*}$ определяет в $\widehat{\mathfrak{A}}$ структуру обобщённой гильбертовой алгебры [8]. Пусть S — замыкание в $\mathfrak{H}$ отображения ${}^\sharp)$ и $S=J\Delta^{1/2}$ — полярное разложение S (J — антилинейная изометрия в $\mathfrak{H}$, а Δ — модулярный оператор). Через $\Sigma=\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ обозначим группу модулярных автоморфизмов алгебры $\mathcal{M}$ [18].

Пополнение пространства $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ по норме

$$\|x\|_\varphi=\inf\{\varphi(x_1+x_2)\colon x=x_1-x_2,\ x_i\in\mathfrak{m}_\varphi^+\}\tag{1}$$

реализуется в виде вещественного банахова пространства $L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$ эрмитовых билинейных форм (б.ф.), заданных на плотном в H линеале веса

$$D_\varphi=\{f\in H\colon \exists\lambda>0\ \forall x\in\mathcal{M}^+\ (\langle xf,f\rangle\le\lambda\varphi(x))\}.$$

Этот класс б.ф. описывается следующим определением.

Определение 1. Эрмитова б.ф. a, заданная на линеале D_φ, называется *интегрируемой относительно* φ, если существует последовательность $(x_n)\subset\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$, называемая *определяющей*, такая, что

(i) $a(f,g)=\lim\limits_n\langle x_nf,g\rangle\quad(f,g\in D_\varphi)$,
(ii) $\|x_n-x_m\|_\varphi\to0\quad(n,m\to\infty)$.

Величину $\varphi(a)\equiv\lim\limits_n\varphi(x_n)$ естественно назвать *ожиданием* билинейной формы a относительно веса φ.

Приведённое определение корректно: $\lim\limits_n\varphi(x_n)$ существует и не зависит от выбора определяющей последовательности. Этот факт не тривиален; он является непосредственным следствием основного результата теории пространства $L_1(\varphi)$ [5].

Теорема 1. *Каждый точный нормальный полуконечный вес φ на алгебре Неймана обладает свойством: $\lim\limits_n\|x_n\|_\varphi=0$, коль скоро $(x_n)\subset\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ — определяющая последовательность для нулевой б.ф.*

Доказательство теоремы 1, приведённое в [5], опиралось на теорию Сигала [17]. Здесь мы предложим доказательство, основанное на технике обобщённых гильбертовых алгебр.

Предложение 1. *Пусть ψ — нормальное состояние на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, и последовательность $(x_n)\subset\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ такова, что*

(i) $\langle x_nf,f\rangle\to0$ $(n\to\infty)$ *для любого* $f\in D_\psi$,
(ii) $\|x_n-x_m\|_\psi\to0\quad(n,m\to\infty)$.

Тогда $\psi(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Доказательство. Переходя, если нужно, к редуцированной алгебре Неймана, можно предположить, и мы предположим, что состояние ψ точно. Пусть $(\pi_\psi, \mathfrak{H}_\psi)$ — представление, индуцированное состоянием ψ, $\widehat{\ }) : \mathcal{M} \to \mathfrak{H}_\psi$ — каноническое вложение. Вектор $\xi_0 = \widehat{1}$ — бициклический для алгебры $\pi_\psi(\mathcal{M})$ и, следовательно, каждое нормальные состояние ω на алгебре $\pi_\psi(\mathcal{M})$ является векторным, т. е. существует представление вида $\omega = \omega_\xi \equiv \langle(\cdot)\xi, \xi\rangle$ при некотором $\xi \in \mathfrak{H}_\psi$ (см. [11], гл. III, §1, п. 4). Пусть

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle(\cdot)f_j, f_j\rangle \qquad (f_j \in H,\ \sum_j \|f_j\|^2 < +\infty),$$

и пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — векторы из $\mathfrak{H}_\psi$, определённые условиями

$$\psi = \langle \pi_\psi(\cdot)\xi_0, \xi_0\rangle, \quad \langle(\cdot)f_j, f_j\rangle = \omega_{\xi_j}(\pi_\psi(\cdot))\ (j = 1, 2, \ldots).$$

Все векторы $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ являются, как нетрудно видеть, ограниченными справа элементами относительно обобщённой гильбертовой алгебры $\widehat{\mathcal{M}}(\subset \mathfrak{H}_\psi)$. Пусть $\pi'(\xi_j)$ — операторы из $\pi_\psi(\mathcal{M})'$, определённые равенствами:

$$\pi'(\xi_j)\widehat{x} = \pi_\psi(x)\xi_j \quad (x \in \mathcal{M},\ j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим отображение Хаагерупа $\beta : \mathcal{M} \to \pi_\psi(\mathcal{M})'_*$ для нашей формы ψ (см. [13]). Тогда

$$\begin{aligned}\beta(x)(\pi'(\xi_j)^*\pi'(\xi_j)) &= \langle \pi'(\xi_j)^*\pi'(\xi_j)\widehat{x}, \widehat{1}\rangle = \langle \pi'(\xi_j)\widehat{x}, \pi'(\xi_j)\widehat{1}\rangle \\ &= \langle \pi_\psi(x)\xi_j, \xi_j\rangle \quad (x \in \mathcal{M},\ j = 0, 1, 2, \ldots).\end{aligned}$$

Положим $x'_n = \sum_{j=1}^{n} \pi'(\xi_j)^*\pi'(\xi_j)\,(\in \pi_\psi(\mathcal{M})')$. Для любого $x \in \mathcal{M}$:

$$\langle x'_n\widehat{x}, \widehat{x}\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \pi_\psi(x)^*\pi_\psi(x)\xi_j, \xi_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x^*xf_j, f_j\rangle \le \psi(x^*x) = \langle \widehat{x}, \widehat{x}\rangle.$$

Следовательно, $0 \le x'_n \le 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Нетрудно видеть также, что

$$\lim_n \langle x'_n\widehat{x}, \widehat{1}\rangle = \lim_n \sum_{j=1}^{n} \langle xf_j, f_j\rangle = \psi(x).$$

Так как $\widehat{\mathcal{M}}$ плотно в $\mathfrak{H}_\psi$, последовательность x'_n ультраслабо сходится к 1. Пусть теперь функционал F из $\pi_\psi(\mathcal{M})'_*$ является пределом по норме последовательности функционалов $\beta(x_n)$, которая сходится в силу условия (ii) нашего предложения. Тогда, с учётом условия (i), имеем:

$$F(x'_m) = \lim_n \beta(x_n)(x'_m) = \lim_n \sum_{j=1}^{m} \langle \pi_\psi(x_n)\xi_j, \xi_j\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lim_n \langle x_nf_j, f_j\rangle = 0.$$

Следовательно, $F(1) = \lim_m F(x'_m) = 0$. Наконец,

$$\lim_n \psi(x_n) = \lim_n \langle \pi_\psi(x_n)\xi_0, \xi_0\rangle = \lim_n \beta(x_n)(1) = F(1) = 0.$$

Предложение доказано.

Из доказанного предложения следует лемма 3 работы [5], а из неё — теорема 1 [5].

Пространство $L_1(\varphi)$ всех (не обязательно эрмитовых) б.ф., интегрируемых относительно φ, мы введём как комплексификацию пространства $L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$, снабжённую нормой

$$\|a\|_\varphi = \lim \|\beta(x_n + \mathrm{i}\, y_n)\| \qquad (a \in L_1(\varphi)),$$

где x_n (соответственно y_n) — определяющая последовательность для эрмитовой (соответственно косоэрмитовой) части б.ф. a, а $\beta\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \pi(\mathcal{M})'_*$ — уже упоминавшееся отображение Хаагерупа [13]:

$$\beta(y^*x)(x') = \langle x'\widehat{x}, \widehat{y}\rangle \quad (x, y \in \mathfrak{n}_\varphi,\ x' \in \pi(\mathcal{M})').$$

Отметим, что функция $x \to \|\beta(x)\|$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$ определяет на $\mathfrak{m}_\varphi$ норму, совпадающую на $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ с нормой (1).

§2. Двойственная характеризация пространства $L_1(\varphi)$

Приведённая выше конструкция пространства $L_1(\varphi)$ является обобщением на веса известной конструкции Сигала пространства $L_1(\tau)$, ассоциированного с точным нормальным полуконечным следом τ. Известна двойственная характеризация пространства $L_1(\tau)$ [11]: как банахово пространство, $L_1(\tau)$ изометрически изоморфно пространству $\mathcal{M}_*$ всех ультраслабо непрерывных линейных функционалов на алгебре $\mathcal{M}$. Аналогичный результат имеет место и для случая веса.

Теорема 2. *Если φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, то $L_1(\varphi)$ изометрически изоморфно пространству $\mathcal{M}_*$.*

Доказательство. Установим сначала, что $\beta(\mathfrak{m}_\varphi) = \{\beta(x)\colon x \in \mathfrak{m}_\varphi\}$ плотно в $\pi(\mathcal{M})'_*$. Для этого достаточно показать, что оператор $x' \in \pi(\mathcal{M})'$ является нулевым, коль скоро $\beta(x)(x') = 0$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$. Действительно, в этом случае

$$\langle x'\widehat{y}, \widehat{z}\rangle = \beta(z^*y)(x') = 0 \quad (y, z \in \mathfrak{A}),$$

а так как $\widehat{\ }$) осуществляет плотное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}$, то $x' = 0$. Далее, отображение $\beta\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \pi(\mathcal{M})'_*$, продолжается до изометрического вложения $L_1(\varphi) \to \pi(\mathcal{M})'_*$, а так как $\beta(\mathfrak{m}_\varphi)$ плотно в $\pi(\mathcal{M})'_*$, то отсюда следует, что $L_1(\varphi)$ изометрически изоморфно $\pi(\mathcal{M})'_*$. Остаётся вспомнить, что при каноническом представлении π алгебра $\pi(\mathcal{M})'$ антиизоморфна, как алгебра Неймана, алгебре $\pi(\mathcal{M})$. Теорема доказана.

Будем через $\gamma\colon L_1(\varphi) \to \mathcal{M}_*$, обозначать изоморфизм, определённый конструкцией теоремы 2. На пространстве $\mathfrak{m}_\varphi$, как плотной части $L_1(\varphi)$, он определён равенством:

$$\gamma(x)(u) = \beta(x)(J\pi(u^*)J) \qquad (u \in \mathcal{M},\ x \in \mathfrak{m}_\varphi) \tag{2}$$

(здесь оператор $x \in \mathfrak{m}_\varphi$ мы отождествляем с б.ф. $\langle x(\cdot), (\cdot)\rangle$ на D_φ; в дальнейшем этого мы особо уже не оговариваем).

Отметим ещё одну полезную формулу, позволяющую вычислять значение интегрируемой б.ф. на линеале веса через изоморфизм γ.

Предложение 2. *Для всякой б.ф.* $a \in L_1(\varphi)$*:*

$$a(f,f) = \gamma(a) \circ \pi^{-1}(J\pi'(\xi_f)^*\pi'(\xi_f)J) \quad (f \in D_\varphi),^1$$

где $\xi_f (\in \mathfrak{H})$ *— ограниченный справа элемент относительно обобщённой гильбертовой алгебры* $\mathfrak{A}$*, определённый условием:* $\langle xf, f\rangle = \langle \pi(x)\xi_f, \xi_f\rangle$ $(x \in \mathcal{M})$.

Доказательство. Утверждение, очевидно, достаточно доказать для случая, когда б.ф. a определена оператором из $\mathfrak{m}_\varphi$ вида $x = z^*y$ $(y, z \in \mathfrak{n}_\varphi)$. Пусть ограниченный справа элемент ξ_f таков, что

$$\langle xf, f\rangle = \langle \pi(x)\xi_f, \xi_f\rangle \qquad (x \in \mathcal{M},\ f \in D_\varphi)$$

(см. [8], предложение 2.14). Тогда в силу (2):

$$\begin{aligned}\gamma(z^*y) \circ \pi^{-1}(J\pi'(\xi_f)^*\pi'(\xi_f)J) &= \beta(z^*y)(\pi'(\xi_f)^*\pi'(\xi_f))\\ &= \langle \pi'(\xi_f)\widehat{y}, \pi'(\xi_f)\widehat{z}\rangle = \langle \pi(y)\xi_f, \pi(z)\xi_f\rangle\\ &= \langle \pi(z^*y)\xi_f, \xi_f\rangle = \langle z^*yf, f\rangle \quad (f \in D_\varphi).\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Мы покажем далее, что изоморфизм γ согласуется с порядковыми свойствами пространств $L_1(\varphi)$ и $\mathcal{M}_*$. При этом конус положительных б.ф. в $L_1(\varphi)$ задаётся естественным образом: $L_1(\varphi)^+ = \{a \in L_1(\varphi)\colon a(f,f) \geq 0\ (f \in D_\varphi)\}$. Через $\mathcal{M}_*^{\mathrm{sa}}$, $(\mathcal{M}_*^+)$ будем обозначать класс всех эрмитовых (соответственно положительных) функционалов из $\mathcal{M}_*$.

Теорема 3. *Пусть* $a \in L_1(\varphi)$.

(i) $a \in L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma(a) \in \mathcal{M}_*^{\mathrm{sa}}$,
(ii) $a \in L_1(\varphi)^+$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma(a) \in \mathcal{M}_*^+$.

Отметим сразу, что достаточность условий теоремы является непосредственным следствием предложения 2. Чтобы доказать необходимость условий, нам понадобится некоторая подготовка. Условимся называть алгебру Неймана $\mathcal{M}$, действующую в гильбертовом пространстве H, стандартной по отношению к точному нормальному полуконечному весу φ на $\mathcal{M}$, если существует обобщённая гильбертова алгебра $\mathfrak{A} \subset H$ ($\mathfrak{A}$ плотно в H и векторные операции в $\mathfrak{A}$ взяты из H) такая, что $\pi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*$ и

$$\varphi(x) = \begin{cases} \|\xi\|^2, & \text{если } \exists \xi \in \mathfrak{A}\ (x = \pi(\xi)^*\pi(\xi)),\\ +\infty & \text{в противном случае}\end{cases} \qquad (x \in \mathcal{M}^+).$$

Лемма 1. *Условия теоремы 3 необходимы для стандартной алгебры Неймана.*

Доказательство. Пусть $a \in L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$ (соответственно $a \in L_1(\varphi)^+$). Из предложения 2 следует, что эрмитовым (соответственно положительным) является ограничение функционала $\gamma(a)$ на $\mathfrak{m}_\varphi = \pi(\mathfrak{A}^2)$. Пусть $x_i \in \pi(\mathfrak{A})^+$ $(i \in I)$ — возрастающее семейство операторов такое, что $x_i \to 1$ ультраслабо (см. [9], лемма 2.3). Для любого $x \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ (соответственно $x \in \mathcal{M}^+$) операторы $x_i x x_i \in \mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ (соответственно $x_i x x_i \in \mathfrak{m}_\varphi^+$). Более того, $x_i x x_i \to x$ ультрасильно. В силу ультраслабой непрерывности функционала $\gamma(a)$ имеем, напр., в случае $a \in L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$:

$$\gamma(a)(x) = \lim_i \gamma(a)(x_i x x_i) = \lim_i \overline{\gamma(a)(x_i x x_i)} = \overline{\gamma(a)(x)} \quad (x \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}).$$

Таким образом, $\gamma(a) \in \mathcal{M}_*^{\mathrm{sa}}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H. Пусть $a \in L_1(\varphi)$ и ψ — нормальное состояние на $\mathcal{M}$ такое, что $\psi \le \varphi$. Пусть $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \langle (\cdot) f_i, f_i \rangle$ на $\mathcal{M}$. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a(f_i, f_i)$ сходится абсолютно.*

Доказательство. Положим $\omega_i = \langle (\cdot) f_i, f_i \rangle$ на $\mathcal{M}$, и пусть ξ_i — ограниченные справа элементы относительно обобщённой гильбертовой алгебры $\widehat{\mathfrak{A}}$. такие, что $\psi = \langle \pi(\cdot)\xi_0, \xi_0 \rangle$, $\omega_i = \langle \pi(\cdot)\xi_i, \xi_i \rangle$ $(i = 1, 2, \dots)$. В силу рассуждений, проводившихся при доказательстве предложения 1, последовательность $\sum_{i=1}^{n} \pi'(\xi_i)^* \pi'(\xi_i)$ $(n = 1, 2, \dots)$ ультраслабо сходится к оператору $\pi'(\xi_0)^*\pi'(\xi_0)$. С учётом предложения 2 имеем;

$$\begin{aligned}\gamma(a) \circ \pi^{-1}(J\pi'(\xi_0)^*\pi'(\xi_0)J) &= \lim_n \gamma(a) \circ \pi^{-1} \left(J\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi'(\xi_i)^*\pi'(\xi_i)\Big)J \right) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{n} a(f_i, f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a(f_i, f_i). \qquad (3)\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Нам осталось доказать необходимость условий теоремы. Пусть $a \in L_1(\varphi)$. Обозначим через a_π билинейную форму в пространстве представления, заданную на линеале веса $\varphi \circ \pi^{-1}$ (см. [5]):

$$a_\pi(\xi, \xi) = \gamma(a) \circ \pi^{-1}(J\pi'(\xi)^*\pi'(\xi)J) \quad (\xi \in D_{\varphi \circ \pi^{-1}}).$$

В силу предложения 2 $a_\pi \in L_1(\varphi \circ \pi^{-1})^{\mathrm{sa}}$ (соответственно $a_\pi \in L_1(\varphi \circ \pi^{-1})^+$) тогда и только тогда, когда $a \in L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$ (соответственно $a \in L_1(\varphi)^+$). Теперь остаётся воспользоваться леммой 1 и соотношением (3). Теорема доказана.

Следствие. *Если $a \in L_1(\varphi)^+$, то $\varphi(a) \ge 0$.*

Отметим, что утверждение следствия никак не усматривается из определения 1. Утверждение нетривиально и для случая следа: соответствующий факт отнесен Сигалом к основным результатам его теории (см. [17], теорема 12).

§3. Интегрируемые билинейные формы и операторы

Как известно, пространство $L_1(\tau)$, ассоциированное с точным нормальным полуконечным следом τ, содержательно описывается операторами. Интересно выяснить, когда интегрируемые б.ф. в нашей схеме сводятся к операторам? Ниже мы дадим ответ на поставленный вопрос. Займёмся необходимой подготовкой к этому.

Пусть $\mathcal{M}^\Sigma$ — подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$, состоящая из операторов инвариантных относительно группы модулярных автоморфизмов $\Sigma = \{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Если x_n — определяющая последовательность для б.ф. $a \in L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$, то последовательность $\sigma_t(x_n)$ также является определяющей для некоторой эрмитовой б.ф., которую мы обозначим $\sigma_t(a)$. По линейности определение $\sigma_t(a)$ распространяется на б.ф. $a \in L_1(\varphi)$.

Определение 2. Билинейную форму $a \in L_1(\varphi)$ назовём Σ-*инвариантной*, если $\sigma_t(a) = a$ $(t \in \mathbb{R})$. Через $L_1(\varphi)^\Sigma$ обозначим класс всех Σ-инвариантных б. ф.

Лемма 3. *Пусть $a \in L_1(\varphi)$. Тогда*

$$\gamma(\sigma_t(a))(x) = \gamma(a)(\sigma_t(x)) \quad (t \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{M}). \tag{4}$$

В частности, $a \in L_1(\varphi)^\Sigma$ тогда и только тогда, когда

$$\gamma(a)(\sigma_t(x)) = \gamma(a)(x) \quad (t \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{M}).$$

Доказательство. Соотношение (4) достаточно установить для б.ф. a, определяемой оператором вида z^*y $(y, z \in \mathfrak{n}_\varphi)$. В этом случае для любого $x \in \mathcal{M}$ имеем[2]:

$$\begin{aligned}
\gamma(\sigma_t(z^*y))(x) &= \langle J\pi(x^*)J\widehat{\sigma_t(y)}, \widehat{\sigma_t(z)}\rangle = \langle J\pi(x^*)J\Delta^{\mathrm{i}\,t}\widehat{y}, \Delta^{\mathrm{i}\,t}\widehat{z}\rangle \\
&= \langle \Delta^{-\mathrm{i}\,t}J\pi(x^*)J\Delta^{\mathrm{i}\,t}\widehat{y}, \widehat{z}\rangle = \langle J\Delta^{-\mathrm{i}\,t}\pi(x^*)\Delta^{\mathrm{i}\,t}J\widehat{y}, \widehat{z}\rangle \\
&= \langle J\pi(\sigma_{-t}(x^*))J\widehat{y}, \widehat{z}\rangle = \langle J\pi(\sigma_t(x)^*)J\widehat{y}, \widehat{z}\rangle \\
&= \beta(z^*y)(J\pi(\sigma_t(x)^*)J) = \gamma(z^*y)(\sigma_t(x)).
\end{aligned}$$

Следствие. *$L_1(\varphi)^\Sigma$ есть замкнутое подпространство пространства $L_1(\varphi)$.*

Лемма 4. *Если $x \in \mathcal{M}^\Sigma \cap \mathfrak{A}$ (где $\mathfrak{A} = \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*$), то $\Delta^{1/2}\widehat{x} = \widehat{x}$. Если, кроме того, $x = x^*$, то $J\widehat{x} = \widehat{x}$.*

Доказательство. Для оператора $x \in \mathcal{M}^\Sigma$:

$$\widehat{x} = \widehat{\sigma_t(x)} = \Delta^{\mathrm{i}\,t}\widehat{x} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Так как $x \in D(\Delta^{1/2})$, функция $t \to \Delta^{\mathrm{i}\,t}\widehat{x}$ $(t \in \mathbb{R})$ продолжается до функции $\alpha \to \Delta^{\mathrm{i}\,\alpha}\widehat{x}$ $(-\dfrac{1}{2} \le \operatorname{Im}\alpha \le 0)$, аналитической в полосе $-\dfrac{1}{2} < \operatorname{Im}\alpha < 0$ и непрерывной в замкнутой полосе $-\dfrac{1}{2} \le \operatorname{Im}\alpha \le 0$ (см. [14], лемма 3.2). В силу свойства единственности аналитических функций мы имеем: $\Delta^{1/2}\widehat{x} = \Delta^{\mathrm{i}(-\frac{\mathrm{i}}{2})}\widehat{x} = \widehat{x}$. Если, кроме того, $x = x^*$, то

$$J\widehat{x} = J\widehat{x^*} = JS\widehat{x} = JJ\Delta^{1/2}\widehat{x} = \Delta^{1/2}\widehat{x} = \widehat{x}.$$

Лемма доказана.

Пусть $k \geq 0$ — самосопряжённый оператор, присоединённый к алгебре $\mathcal{M}^\Sigma$. Через $\varphi \star k$ обозначим регуляризованный в смысле Педерсена и Такесаки [14] вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$:

$$\varphi \star k(x) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0+} \varphi({k_\varepsilon}^{1/2} x {k_\varepsilon}^{1/2}) \quad (x \in \mathcal{M}^+),$$

где $k_\varepsilon = k(1+\varepsilon k)^{-1}$ $(\varepsilon > 0)$. В случае, когда $\varphi\star k(1) < \infty$, этот вес по линейности продолжается до нормального состояния на $\mathcal{M}$, и мы пишем: $\varphi \star k \in \mathcal{M}_*$. Далее, если $D_\varphi \subset D(k^{1/2})$, то через $e \circ k$ обозначим б.ф., определённую равенством

$$e \circ k(f,g) = \langle k^{1/2} f, k^{1/2} g\rangle \quad (f,g \in D_\varphi).$$

Теорема 4. *Пусть $k \geq 0$ — самосопряжённый оператор, присоединённый к $\mathcal{M}^\Sigma$ и $\varphi \star k \in \mathcal{M}_*$. Тогда $D_\varphi \subset D(k^{1/2})$ и $e \circ k \in L_1(\varphi)^\Sigma$. Обратно, если б.ф. $a \in L_1(\varphi)^\Sigma$ положительна, то существует и определён однозначно самосопряжённый оператор $k \geq 0$, присоединённый к $\mathcal{M}^\Sigma$ такой, что $a = e \circ k$. При этом $\gamma(a) = \varphi \star k$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \star k \in \mathcal{M}_*$ и $p^k(\cdot)$ — спектральная проекторная мера для оператора k. Для $f \in D_\varphi$ выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\omega_f(\cdot) = \langle(\cdot)f,f\rangle \leq \lambda\varphi(\cdot)$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^n \mu\langle p^k(d\mu)f,f\rangle = \omega_f\Big(\int_0^n \mu p^k(d\mu)\Big) &\leq \lambda\varphi\Big(\int_0^n \mu p^k(d\mu)\Big) \\ &\leq \lambda\varphi\star k(1) < +\infty.\end{aligned}$$

Следовательно, $f \in D(k^{1/2})$. Из приведённой выкладки следует также, что $\Big(\int_0^n \mu p^k(d\mu)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ — определяющая последовательность для положительной б. ф. $e \circ k$, так что $e \circ k \in L_1(\varphi)^\Sigma$.

Обратно, если $a \in L_1(\varphi)^\Sigma$ — положительная б.ф., то нормальное состояние $\gamma(a)$ является Σ-инвариантным, и по теореме Радона-Никодима ([14], теорема 5.12) существует и определён однозначно самосопряжённый оператор $k \geq 0$, присоединённый к алгебре $\mathcal{M}^\Sigma$, такой, что

$$\gamma(a) = \varphi \star k. \tag{5}$$

С другой стороны, последовательность $k_{1/n} = k(1 + \dfrac{1}{n}k)^{-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ является определяющей для интегрируемой б.ф. $e \circ k$. С учётом леммы 4 мы имеем для любого $x \in \mathcal{M}^+$:

$$\begin{aligned}\gamma(e \circ k) &= \lim_n \gamma(k_{1/n})(x) = \lim_n \langle J\pi(x)J\widehat{k_{1/n}^{1/2}}, \widehat{k_{1/n}^{1/2}}\rangle \\ &= \lim_n \langle \pi(x)\widehat{k_{1/n}^{1/2}}, \widehat{k_{1/n}^{1/2}}\rangle = \lim_n \varphi(k_{1/n}^{1/2} x k_{1/n}^{1/2}) \\ &= \varphi \star k(x).\end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, $\gamma(e \circ k) = \varphi \star k$. Сопоставляя это с (5), получаем: $a = e \circ k$. Нам осталось установить единственность оператора k, обладающего свойством: $a = e \circ k$. Действительно, пусть $l \geq 0$ — ещё один самосопряжённый оператор, присоединённый к алгебре $\mathcal{M}^\Sigma$ и обладающий свойством: $a = e \circ l$. Покажем сначала, что $\varphi \star l \in \mathcal{M}_*$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ из неравенства $e \circ l_{1/n} \leq e \circ l$ следует, что $\gamma(e \circ l_{1/n}) \leq \gamma(e \circ l) = \gamma(a)$. Теперь мы имеем:

$$\varphi \star l(1) = \lim_n \varphi(l_{1/n}) = \lim_n \gamma(l_{1/n})(1) \leq \gamma(a)(1) < +\infty.$$

Итак, $\varphi \star l \in \mathcal{M}_*$. Повторяя теперь выкладку (6) для оператора l, мы получим:

$$\gamma(a)(x) = \gamma(e \circ l)(x) = \varphi \star l(x) \qquad (x \in \mathcal{M}^+).$$

В силу отмеченной выше единственности оператора k, фигурирующего в (5), $l = k$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть τ — точный нормальный, полуконечный след на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Самосопряжённый, оператор $k \geq 0$, присоединённый, к алгебре $\mathcal{M}$, интегрируем по Сигалу* [17] *тогда и только тогда, когда $e \circ k \in L_1(\tau)$.*

Покажем теперь, что соответствие между неотрицательными самосопряжёнными операторами, присоединёнными к $\mathcal{M}^\Sigma$, и интегрируемыми б.ф., согласуется со структурами порядка в указанных множествах (при этом структура порядка в множестве неотрицательных самосопряжённых операторов (возможно, неограниченных) определяется в соответствии с [14]: $k \leq l$, если $k_\varepsilon \leq l_\varepsilon$ для некоторого (и значит для всех) $\varepsilon > 0$, где, как обычно, $k_\varepsilon = k(1 + \varepsilon k)^{-1}$).

Предложение 3. *Пусть $k, l \geq 0$ — самосопряжённые операторы, присоединённые к $\mathcal{M}^\Sigma$, причём $\varphi \star k, \varphi \star l \in \mathcal{M}_*$. Неравенство $l \leq k$ справедливо тогда и только тогда, когда $e \circ l \leq e \circ k$.*

Доказательство. Если $l \leq k$, то $e \circ l \leq e \circ k$ очевидным образом. Обратно, пусть $e \circ l \leq e \circ k$. Пусть $h \geq 0$ — самосопряжённый оператор, присоединённый к $\mathcal{M}^\Sigma$, причём

$$e \circ k - e \circ l = e \circ h \tag{7}$$

(оператор h существует в силу теоремы 4). Линеал

$$D = \{f \in H\colon \sup_\varepsilon \langle (l_\varepsilon + h_\varepsilon)f, f\rangle < +\infty\}$$

объемлет D_φ и, следовательно, плотен в H. В силу леммы 7.9 [14] существует самосопряжённый оператор $\widetilde{k} \geq 0$ такой, что $l_\varepsilon + h_\varepsilon \nearrow \widetilde{k}$, $D = D(\widetilde{k}^{1/2})$. Так как $l_\varepsilon, h_\varepsilon \in \mathcal{M}^\Sigma$, оператор $\widetilde{k}$ присоединён к $\mathcal{M}^\Sigma$. В силу равенства

$$\|l^{1/2}f\|^2 + \|h^{1/2}f\|^2 = \|\widetilde{k}^{1/2}f\|^2 \qquad (f \in D_\varphi)$$

имеем: $e\circ\widetilde{k} - e\circ l = e\circ h$. Сопоставляя это равенство с (7), получаем: $e\circ\widetilde{k} = e\circ k$. В силу теоремы 4: $\widetilde{k} = k$. Осталось показать, что $l \leq \widetilde{k}$. Действительно,

$$\begin{aligned} D(\widetilde{k}^{1/2}) &= D \subset \{f \in H\colon \sup_\varepsilon \langle l_\varepsilon f, f\rangle < +\infty\} = D(l^{1/2}), \\ \|l^{1/2}f\|^2 &= \sup_\varepsilon \|{l_\varepsilon}^{1/2}f\|^2 \leq \sup_\varepsilon [\|{l_\varepsilon}^{1/2}f\|^2 + \|{h_\varepsilon}^{1/2}f\|^2] \\ &= \|\widetilde{k}^{1/2}f\|^2 \quad (f \in D(\widetilde{k}^{1/2})). \end{aligned}$$

В силу замечания, сделанного на стр. 62 работы [14], наше предложение доказано.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана с бициклическим вектором f и $\omega = \langle(\cdot)f, f\rangle$. Пусть $k, l \geq 0$ — — самосопряжённые операторы, присоединённые к $\mathcal{M}$, причём $f \in D(k^{1/2}) \cap D(l^{1/2})$ и $k^{1/2}f = l^{1/2}f$. Тогда $e \circ k = e \circ l\,(\in L_1(\omega))$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что $D_\omega = \mathcal{M}'f \subset D(k^{1/2}) \cap D(l^{1/2})$. Далее, последовательности $\int_0^n \lambda p^k(d\lambda)$, $\int_0^n \lambda p^l(d\lambda)$ $(n \in \mathbb{N})$ являются $\|\cdot\|_\omega$-фундаментальными, причём для любого $g \in D_\omega$:

$$\begin{aligned} &\left\langle \left[\int_0^n \lambda p^k(d\lambda)\right] g, g \right\rangle = \int_0^n \lambda \langle p^k(d\lambda) g, g\rangle \to e \circ k(g,g), \\ &\left\langle \left[\int_0^n \lambda p^l(d\lambda)\right] g, g \right\rangle \to e \circ l(g,g) \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Таким образом, $e \circ k, e \circ l \in L_1(\omega)$. Наконец, для любого $x' \in \mathcal{M}'$:

$$\begin{aligned} e \circ k(x'f, x'f) &= \langle k^{1/2}x'f, k^{1/2}x'f\rangle = \langle (x'^*x')k^{1/2}f, k^{1/2}f\rangle \\ &= \langle (x'^*x')l^{1/2}f, l^{1/2}f\rangle = e \circ l(x'f, x'f). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание. Оказывается, что даже в случае алгебр Неймана с векторными состояниями, определяемыми бициклическими векторами, соответствие $k \to e \circ k$ между неотрицательными самосопряжёнными операторами, присоединёнными к алгебре и интегрируемыми б.ф., может оказаться не инъективным. Поэтому описание $L_1(\varphi)$ в терминах б.ф. носит принципиальный характер. Для обоснования сказанного воспользуемся леммой 5.5 работы Пердризе [15]. В соответствии с этой леммой существуют два различных самосопряжённых оператора $k, l \geq 0$, присоединённых к алгебре Неймана $\mathcal{M}$ с бициклическим вектором f, причём $k^{1/2}f = l^{1/2}f\,(\neq 0)$. Остаётся учесть лемму 5.

§4. Условное ожидание в классе интегрируемых билинейных форм и теорема Фубини

Здесь нами введено и изучено понятие условного ожидания применительно к классу интегрируемых (относительно точного нормального полуконечного веса) билинейных форм. Показано, что это понятие является естественным распространением известного понятия условного ожидания, как отображения алгебры Неймана на свою подалгебру. Здесь же приведён некоммутативный аналог теоремы Фубини для весов.

Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Реализация пространства $L_1(\varphi)$ в виде пространства $\mathcal{M}_*$ ультраслабо непрерывных линейных функционалов на алгебре $\mathcal{M}$ позволяет по-новому взглянуть на известное понятие условного ожидания в алгебрах операторов [1], [19]. Нашей целью является определение условного ожидания на классе всех интегрируемых б.ф. и установление связи этого понятия с понятием условного ожидания, как отображения алгебры Неймана на свою подалгебру.

Пусть $\mathcal{N}$ — подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$ такая, что $\varphi_0 = \varphi|\mathcal{N}^+$ является полуконечным весом на $\mathcal{N}$. Пусть

$$\gamma\colon L_1(\varphi) \to \mathcal{M}_*, \quad \gamma_0\colon L_1(\varphi_0) \to \mathcal{N}_*$$

— канонические изоморфизмы. Условимся снабжать нулевым индексом известные объекты, канонически связанные с φ_0: $\pi_0, \beta_0, \mathfrak{H}_0, J_0$ и т. п.

Предложение 4. *Существует и однозначно определено условием*

$$\gamma(a)(x) = \gamma_0(Ea)(x) \quad (x \in \mathcal{N},\ a \in L_1(\varphi)) \tag{8}$$

отображение $E : L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$. При этом

E1. E *— линейная сюръекция;*
E2. E *положительно и точно;*
E3. $\|E\| = 1$*;*
E4. $\varphi_0(Ea) = \varphi(a)$ $(a \in L_1(\varphi))$*;*
E5. *если* $a_n \nearrow a$ $(n = 1, 2, \dots)$ *в* $L_1(\varphi)^+$*, то* $Ea_n \nearrow Ea$.

(Символ $a_n \nearrow a$ означает, что последовательность a_n не убывает и $\sup a_n = a \in L_1(\varphi)^+$ в смысле порядка, определяемого конусом $L_1(\varphi)^+$.)

Доказательство. Пусть б.ф. $a \in L_1(\varphi)$ произвольна. Тогда функционал $\gamma(a) \in \mathcal{M}_*$ является ультраслабо непрерывным функционалом и на подалгебре $\mathcal{N}$. Следовательно, $\gamma(a) \in \mathcal{N}_*$. Пусть $Ea\,(\in L_1(\varphi_0))$ — б.ф., являющаяся прообразом функционала $\gamma(a) \in \mathcal{N}_*$ относительно отображения $\gamma_0 : L_1(\varphi) \to \mathcal{N}_*$. Тем самым определено отображение $E\colon L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$, удовлетворяющее условию (8). Так как γ_0 — изоморфизм, то требованием (8) отображение E определено однозначно. Проверим теперь выполнение свойств E1 – E5. Свойства E1 – E4 следуют непосредственно из (8). Проверим E5. Пусть $a_n \nearrow a$ в $L_1(\varphi)^+$. Тогда последовательность $\gamma(a_n)$ не убывает и ограничена сверху функционалом $\gamma(a)$. В силу слабой секвенциальной полноты $\mathcal{M}_*$ (см. [16])

существует б.ф. $b \in L_1(\varphi)^+$ такая, что $\gamma(a_n) \to \gamma(b)$ $(n \to \infty)$. Так как изоморфизм γ сохраняет порядковые свойства конусов $L_1(\varphi)^+$ и $\mathcal{M}_*^+$ (см. теорему 3), мы имеем $a = b$. Следовательно, $\gamma(a)(x) = \lim_n \gamma(a_n)(x)$ $(x \in \mathcal{M})$. Последовательность Ea_n также не убывает и ограничена сверху билинейной формой $Ea \in L_1(\varphi_0)^+$. Следовательно, существует б.ф. $c \in L_1(\varphi_0)^+$ такая, что $c = \sup Ea_n$, $\gamma_0(c)(x) = \lim_n \gamma_0(Ea_n)(x)$ $(x \in \mathcal{N})$. Для любого $x \in \mathcal{N}$ имеем, таким образом,

$$\gamma(a)(x) = \lim_n \gamma(a_n)(x) = \lim_n \gamma_0(Ea_n)(x) = \gamma_0(c)(x),$$

откуда $c = Ea$. Предложение доказано.

Теперь мы введём определение условного ожидания. В сущности, нам осталось только постулировать аналог требования идемпотентности условного ожидания, т. к. остальные основные требования, предъявляемые к этому понятию, нами уже получены в предложении 4.

Определение 3. Отображение $E\colon L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$ назовём *условным ожиданием*, если это отображение удовлетворяет условиям (8) и

$$Ex = x \quad (x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}). \tag{9}$$

Замечание. Пусть $\mathcal{N}_1$ — ещё одна подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$ такая, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{M}$, и пусть $\varphi_1 = \varphi|\mathcal{N}_1^+$ полуконечен. Справедливо следующее свойство транзитивности условного ожидания: коммутативная диаграмма условных ожиданий

$$\begin{tikzcd} L_1(\varphi) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "E_1"'] & L_1(\varphi_0) \\ L_1(\varphi_1) \arrow[ur, "E_2"'] & \end{tikzcd}$$

имеет место, коль скоро определены условные ожидания E_1 и E_2, либо E и E_1.

Пусть б.ф. $a \in L_1(\varphi_0)$. Через $\widetilde{a}$, условимся обозначать её ограничение на линеал $D_\varphi (\subset D_{\varphi_0})$:

$$\widetilde{a}(f,g) = a(f,g) \quad (f, g \in D_\varphi).$$

Лемма 6. *Пусть* $a \in L_1(\varphi_0)$. *Тогда* $\widetilde{a} \in L_1(\varphi)$, *причём* $\|\widetilde{a}\|_\varphi \le \|a\|_{\varphi_0}$.

Доказательство. Установим сначала неравенство

$$\|\beta(x)\| \le \|\beta_0(x)\| \quad (x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}). \tag{10}$$

Пусть p — ортогональный проектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{H}_0$, являющееся замыканием $\widehat{\mathfrak{n}_{\varphi_0}}$. Нетрудно видеть, что для любого $x' \in \pi(\mathcal{M})'$ оператор $(px'|\mathfrak{H}_0) \in \pi_0(\mathcal{N})'$. Для любых $y, z \in \mathfrak{n}_{\varphi_0}$ имеем

$$\begin{aligned} \|\beta(y^*z)\| &= \sup\{\, |\langle x'\widehat{z}, \widehat{y}\rangle| \colon x' \in \pi(\mathcal{M})', \|x'\| = 1\} \\ &= \sup\{\, |\langle (px'|\mathfrak{H}_0)\widehat{z}, \widehat{y}\rangle| \colon x' \in \pi(\mathcal{M})', \|x'\| = 1\} \\ &\le \sup\{\, |\langle x'\widehat{z}, \widehat{y}\rangle| \colon x' \in \pi_0(\mathcal{N})', \|x'\| = 1\} \\ &= \|\beta_0(y^*z)\|. \end{aligned}$$

Далее, пусть x_n — определяющая последовательность для б.ф. $a \in L_1(\varphi_0)^{\mathrm{sa}}$. Ясно, что x_n удовлетворяет условию $\widetilde{a}(f,f) = \lim_n \langle x_n f, f\rangle$ $(f \in D_\varphi)$. Кроме того,

$$\|x_n - x_m\|_\varphi = \|\beta(x_n - x_m)\| \leq \|\beta_0(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\|_{\varphi_0} \to 0,$$

так что x_n является определяющей последовательностью для б.ф. $\widetilde{a}$. Таким образом, $\widetilde{a} \in L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$, и утверждение теперь сразу следует из определения $L_1(\varphi)$ и неравенства (10).

Лемма 7. *Если $E\colon L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$ — условное ожидание, то*

(i) $E\widetilde{a} = a$ $(a \in L_1(\varphi_0))$;

(ii) *отображение* $\widetilde{\ }\,)\colon L_1(\varphi_0) \to L_1(\varphi)$ *есть изометрический изоморфизм* $L_1(\varphi_0)$ *на замкнутое подпространство* $L_1^{\sim}(\varphi)$ *банахова пространства* $L_1(\varphi)$.

Доказательство. Утверждение (i) достаточно доказать для б.ф. $a \in L_1(\varphi_0)^{\mathrm{sa}}$. Если $x_n (\in \mathfrak{m}_{\varphi_0}^{\mathrm{sa}})$ — определяющая последовательность для a, то по лемме 6 она же — определяющая для б.ф. $\widetilde{a} \in L_1(\varphi_0)^{\mathrm{sa}}$. В силу E3 x_n — определяющая последовательность для б.ф. $E\widetilde{a}$. Следовательно, $E\widetilde{a} = a$. Утверждение (ii) справедливо в силу следующей выкладки, верной для любой б.ф. $a \in L_1(\varphi_0)$:

$$\|\widetilde{a}\|_\varphi \leq \|a\|_{\varphi_0} = \|E\widetilde{a}\|_{\varphi_0} \leq \|\widetilde{a}\|_\varphi.$$

Лемма доказана.

Перейдём теперь к установлению связи условного ожидания в смысле определения 3 с понятием условного ожидания, как отображения алгебры Неймана на свою подалгебру. Для того, чтобы отличать последнее (традиционное) понятие условного ожидания от нашего, примем ещё одно определение (см. [19]).

Определение 4. Пусть $\mathcal{N}$ — подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$ и φ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{N}$, причём вес $\varphi_0 = \varphi|\mathcal{N}^+$ полуконечен на $\mathcal{N}$. Отображение $\varepsilon\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ назовём *ограниченным условным ожиданием относительно* φ, если

ε1. ε — линейная сюръекция, $\varepsilon^2 = \varepsilon$;

ε2. ε положительно и точно;

ε3. $\|\varepsilon\| = 1$;

ε4. $\varphi_0(\varepsilon(x)) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi^+)$;

ε5. ε ультраслабо непрерывно.

Отметим, что если ограниченное условное ожидание ε существует, то оно единственно и обладает также следующими свойствами:

ε6. $\varepsilon(yx) = y\varepsilon(x)$ $(x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N})$;

ε7. $\varepsilon(x)^*\varepsilon(x) \leq \varepsilon(x^*x)$ $(x \in \mathcal{M})$.

Томияма показал [20], что свойства ε6, ε7 и положительность ε выполняются для любой линейной проекции нормы 1 C^*-алгебры на свою C^*-подалгебру. Покажем единственность условного ожидания. Пусть $\varepsilon_1 : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — ещё одно отображение, удовлетворяющее условиям определения 4. Для любого $x \in \mathfrak{m}_\varphi$ мы имеем:

$$\begin{aligned}\varphi([\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x)]^*[\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x)]) &= \varphi([\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x)]^*\varepsilon(x)-[\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x)]^*\varepsilon_1(x))\\ &= \varphi(\varepsilon([\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x)]^*x))-\varphi(\varepsilon_1([\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x)]^*x))\\ &= \varphi([\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x)]^*x)-\varphi([\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x)]^*x)=0.\end{aligned}$$

Так как φ точен, то отсюда следует, что $\varepsilon(x)=\varepsilon_1(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$. Из свойства $\varepsilon 5$ с учётом ультраслабой плотности $\mathfrak{m}_\varphi$ в $\mathcal{M}$ теперь следует, что $\varepsilon=\varepsilon_1$.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{N}$ — подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$, φ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ и $\varphi_0=\varphi|\mathcal{N}^+$ — полуконечный вес. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует условное ожидание $E\colon L_1(\varphi)\to L_1(\varphi_0)$;*

(ii) *существует ограниченное условное ожидание $\varepsilon\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ относительно φ.*

При этом ограничение $E|\,\mathfrak{m}_\varphi$ условного ожидания E на алгебру $\mathfrak{m}_\varphi$ совпадает с $\varepsilon|\mathfrak{m}_\varphi$ — ограничением на ту же алгебру ограниченного условного ожидания ε.

Лемма 8. *Если сеть $x_i \in \mathfrak{m}_\varphi^+$ $(i \in I)$ возрастает к 1, то $\varphi=\sup\limits_{i\in I}[\gamma(x_i)](\cdot)$ на $\mathfrak{m}_\varphi^+$.*

Доказательство. Лемма справедлива в силу выкладки, верной для любого $x \in \mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned}\varphi(x^*x) &= \|\widehat{x}\|^2=\|J\widehat{x}\|^2=\sup_i\langle\pi(x_i)J\widehat{x},J\widehat{x}\rangle=\sup_i\beta(x_i)(J\pi(x^*x)J)\\ &= [\sup_i\gamma(x_i)](x^*x). \quad \square\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 5. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $E\colon L_1(\varphi)\to L_1(\varphi_0)$ и $\widetilde{\ }\colon L_1(\varphi_0)\to L_1^{\sim}(\varphi)$ — изометрия, рассмотренная в лемме 7. При фиксированном $x\in\mathcal{M}$ функционал $F_x(a)\equiv\gamma(\widetilde{a})(x)$ $(a\in L_1(\varphi_0))$ линеен на $L_1(\varphi_0)$, причём для любого $a\in L_1(\varphi_0)$ имеем

$$|F_x(a)|\le\|\gamma(\widetilde{a})\|\,\|x\|=\|x\|\,\|\widetilde{a}\|_\varphi=\|x\|\,\|a\|_{\varphi_0}.$$

Вспоминая, что γ_0 осуществляет изометрический изоморфизм банахова пространства $L_1(\varphi_0)$ на $\mathcal{N}_*$, заключаем, что существует и определён однозначно элемент $\varepsilon(x)\in\mathcal{N}$ такой, что $F_x(a)=\gamma_0(a)(\varepsilon(x))$ $(a\in L_1(\varphi_0))$, причём $\|\varepsilon(x)\|\le\|x\|$. Отображение $\varepsilon\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, определённое таким образом, очевидно, линейно. Если, в частности, $x\in\mathcal{N}$, то в силу равенств

$$\gamma(\widetilde{a})(x)=\gamma_0(E\widetilde{a})(x)=\gamma_0(a)(x)\quad(a\in L_1(\varphi_0))$$

мы имеем $\varepsilon(x)=x$. Таким образом, свойства $\varepsilon 1$ и $\varepsilon 3$ установлены. Установим $\varepsilon 4$. Возьмём возрастающую к 1 сеть $x_i\in\mathfrak{m}_{\varphi_0}^+$ $(i\in I)$. В силу леммы 8 имеем для любого $x\in\mathfrak{m}_\varphi^+$:

$$\varphi(x)=\sup_i\gamma(x_i)(x)=\sup_i\gamma(\widetilde{x_i})(x)=\sup_i\gamma_0(x_i)(\varepsilon(x))=\varphi_0(\varepsilon(x)).$$

Установим $\varepsilon 5$. Пусть $x \in \mathcal{M}$ произволен и сеть $x_i \to x$ ультраслабо. Для произвольного функционала $F \in \mathcal{N}_*$ пусть б.ф. $a \in L_1(\varphi_0)$ такова, что $F = \gamma_0(a)$. Тогда

$$F(\varepsilon(x_i)) = \gamma_0(a)(\varepsilon(x_i)) = \gamma(\widetilde{a})(x_i) \to \gamma(\widetilde{a})(x) = \gamma_0(a)(\varepsilon(x)) = F(\varepsilon(x)).$$

Итак, ε — ультраслабо непрерывное отображение. Осталось установить $\varepsilon 2$. Достаточно установить точность (см. замечание после определения 4). Пусть при некотором $x \in \mathcal{M}^+$: $\varepsilon(x) = 0$. Для любого $y \in \mathfrak{n}_{\varphi_0}$: $y^*xy \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. Следовательно,

$$\varphi(y^*xy) = \varphi(\varepsilon(y^*xy)) = \varphi(y^*\varepsilon(x)y) = 0.$$

Так как φ точен, отсюда следует, что $y^*xy = 0$. Пусть сеть $y_i \in \mathfrak{n}_{\varphi_0}^{\mathrm{sa}}$ сильно сходится к 1. Тогда $y_ixy_i \to x$ слабо. Отсюда $x = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть определено ограниченное условное ожидание $\varepsilon\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Отметим, что

$$\pi_0(x)p = \pi(x)p, \tag{11}$$

где p — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}$, и

$$p\widehat{x} = \widehat{\varepsilon(x)} \qquad (x \in \mathfrak{A}). \tag{12}$$

Последнее равенство следует из выкладки, верной для любого $y \in \mathfrak{A}_0$ $(= \mathfrak{n}_{\varphi_0} \cap \mathfrak{n}_{\varphi_0}^*)$:

$$\langle p\widehat{x}, \widehat{y}\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle = \varphi(y^*x) = \varphi(\varepsilon(y^*x)) = \varphi(y^*\varepsilon(x)) = \langle \widehat{\varepsilon(x)}, \widehat{y}\rangle.$$

Несколько ниже мы установим равенство:

$$J_0p = Jp = pJ, \tag{13}$$

а теперь завершим доказательство теоремы, пользуясь равенствами (11) – (13). Для этого рассмотрим отображение E, однозначно определённое равенством (8). В частности,

$$\gamma(y^*x)(z) = \gamma_0(E(y^*x))(z) \qquad (x, y \in \mathfrak{A},\ z \in \mathfrak{A}_0). \tag{14}$$

С другой стороны, для любых $z \in \mathfrak{A}_0,\ x, y \in \mathfrak{A}$, имеем

$$\begin{aligned}\gamma_0(\varepsilon(y^*x))(z) &= \langle \widehat{z}, J_0\varepsilon(\widehat{y^*x})\rangle = \langle \varepsilon(\widehat{y^*x}), J\widehat{z}\rangle = \langle \widehat{y^*x}, pJ\widehat{z}\rangle \\ &= \langle \widehat{y^*x}, Jp\widehat{z}\rangle = \langle \widehat{z}, J(\widehat{y^*x})\rangle \\ &= \gamma(y^*x)(z).\end{aligned}$$

Сопоставляя это равенство с (14) и учитывая ультраслабую плотность в $\mathcal{N}$ многообразия $\mathfrak{A}_0$, имеем

$$\gamma_0(E(y^*x))(z) = \gamma_0(\varepsilon(y^*x))(z) \qquad (x, y \in \mathfrak{A}).$$

Следовательно, $E(y^*x) = \varepsilon(y^*x)$ $(x, y \in \mathfrak{A})$, так что $E|\mathfrak{m}_\varphi = \varepsilon|\mathfrak{m}_\varphi$. Итак, нам осталось установить равенство (13). Пусть S (соответственно S_0) — замыкание антилинейного отображения $\widehat{x} \to \widehat{x^*}$ $(x \in \mathfrak{A})$ в пространстве $\mathfrak{H}$ (соответственно отображения $\widehat{x} \to \widehat{x^*}$ $(x \in \mathfrak{A}_0)$ в $\mathfrak{H}_0$) и $S = J\Delta^{1/2}$, $S_0 = J_0\Delta_0^{1/2}$ — их полярные разложения. Покажем, что оператор S коммутирует с p. Для любого $x \in \mathfrak{A}$ имеем

$$pS\widehat{x} = p\widehat{x}^* = \widehat{\varepsilon(x)}^* = S\widehat{\varepsilon(x)} = Sp\widehat{x} = S_0p\widehat{x}.$$

Пусть теперь $\xi \in D(S)$ произволен и последовательность $x_n \in \mathfrak{A}$ такова, что $\widehat{x_n} \to \xi$, $S\widehat{x_n} \to S\xi$. Тогда $p\widehat{x_n} \to p\xi$, $S(p\widehat{x_n}) = pS\widehat{x_n} \to pS\xi$, так что $p\xi \in D(S)$ и $Sp\xi = pS\xi$. Таким образом, $Sp \supset pS$. Поэтому с оператором p коммутируют и компоненты J и $\Delta^{1/2}$ полярного разложения S. В частности, отсюда следует второе равенство в (13). Обратим теперь внимание на то, что оператор S_0 является ограничением S на $\mathfrak{H}_0$. Отсюда без труда следует, что $\Delta_0 p = \Delta p$, и потому $J_0 p = Jp$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $E\colon L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$ — условное ожидание и ε — соответствующее ограниченное условное ожидание. Если (x_n) — определяющая последовательность для б.ф. $a \in L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$, то $\varepsilon(x_n)$ — определяющая для б. ф. $Ea \in L_1(\varphi_0)^{\mathrm{sa}}$.*

Займёмся теперь аналогом теоремы Фубини для нашей схемы интегрирования. Соответствующая техника идейно связана с рассмотренным понятием условного ожидания. Пусть $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, 2)$ — алгебры Неймана с точными нормальными полуконечными весами φ_i, H_i — гильбертовы пространства, в которых действуют алгебры $\mathcal{M}_i$. Через $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ обозначим тензорное произведение этих весов в смысле определения 1.1.3 [10]. Таким образом, $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ есть единственный точный нормальный полуконечный вес на алгебре $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, определённый условиями:

(i) $x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}$ влечёт $x_1 \otimes x_2 \in \mathfrak{m}_{\varphi_1\otimes\varphi_2}$ и $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$;

(ii) $\sigma_t^{\varphi_1\otimes\varphi_2} = \sigma_t^{\varphi_1} \otimes \sigma_t^{\varphi_2}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{H}, \pi, J, \gamma$ $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{H}_i, \pi_i, J_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2))$ — канонические объекты, определяемые весом $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ (соответственно весом φ_i $(i = 1, 2)$). Тогда (см. [10], [19])

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2, \quad \pi = \pi_1 \otimes \pi_2, \quad J = J_1 \otimes J_2. \tag{15}$$

Теорема 6. *Существует единственная пара точных положительных линейных сюръекций $\mathcal{E}_i\colon L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \to L_1(\varphi_i)$ с нормой 1 таких, что*

$$\mathcal{E}_1(x_1 \otimes x_2) = \varphi_2(x_2)x_1,\ \mathcal{E}_2(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1)x_2 \quad (x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}; i = 1, 2).$$

При этом $\varphi_1 \otimes \varphi_2(a) = \varphi_1(\mathcal{E}_1 a) = \varphi_2(\mathcal{E}_2 a)$ $(a \in L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2))$.

Лемма 9. *Множество элементов вида $x_1 \otimes x_2$ $(x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i})$ порождает линеал, плотный в банаховом пространстве $L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$, причём*

$$\gamma(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = \gamma_1(x_1)(y_1) \cdot \gamma_2(x_2)(y_2) \ (x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}, y_i \in \mathcal{M}_i). \tag{16}$$

Доказательство. Покажем, что $y = 0$ ($y \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$), коль скоро $\gamma(x_1 \otimes x_2)(y) = 0$ для всех $x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}$ ($i = 1, 2$). Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}\gamma(u_1^* z_1 \otimes u_2^* z_2)(y) &= \langle J\pi(y^*)J\widehat{z_1 \otimes z_2}, \widehat{u_1 \otimes u_2}\rangle \\ &= \langle J\pi(y^*)J(\widehat{z_1} \otimes \widehat{z_2}), \widehat{u_1} \otimes \widehat{u_2}\rangle \quad (u_i, z_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i},\ i = 1, 2).\end{aligned}$$

Так как $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ и $\widehat{\mathfrak{A}}_i$ плотны в $\mathfrak{H}_i$ ($i = 1, 2$), то $J\pi(y^*)J = 0$, а значит и $y = 0$. Равенство (16), очевидно, достаточно установить для элементов x_i вида $x_i = u_i^* z_i$ ($u_i, z_i \in \mathfrak{A}_i$). С учётом (15) имеем

$$\begin{aligned}\gamma(u_1^* z_1 \otimes u_2^* z_2)(y_1 \otimes y_2) &= \langle J\pi(y_1^* \otimes y_2^*)J\widehat{z_1 \otimes z_2}, \widehat{u_1 \otimes u_2}\rangle \\ &= \langle (J_1\pi_1(y_1^*)J_1) \otimes (J_2\pi_2(y_2^*)J_2)(\widehat{z_1} \otimes \widehat{z_2}), \widehat{u_1} \otimes \widehat{u_2}\rangle \\ &= \prod_{j=1}^{2} \langle J_j\pi_j(y_j^*)J_j\widehat{z_j}, \widehat{u_j}\rangle = \prod_{j=1}^{2} \gamma_j(u_j^* z_j)(y_j).\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 6. Для $a \in L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ и $y \in \mathcal{M}$ положим $F_a(y) = \gamma(a)(y \otimes 1_{H_2})$. Поскольку соответствие $y \longleftrightarrow y \otimes 1_{H_2}$ определяет изоморфизм алгебр Неймана $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_1 \otimes \mathbb{C}_{H_2}$, то F_a является ультраслабо непрерывным линейным функционалом на $\mathcal{M}_1$. Вспоминая, что γ_1 осуществляет изометрический изоморфизм $L_1(\varphi_1)$ на $(\mathcal{M}_1)_*$, заключаем о существовании единственной б.ф. $\mathcal{E}_1 a \in L_1(\varphi_1)$ такой, что

$$F_a(y) = \gamma_1(\mathcal{E}_1 a)(y) \quad (y \in \mathcal{M}_1).$$

Отображение $\mathcal{E}_1 : L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \to L_1(\varphi_1)$, определённое этим равенством, обладает, очевидно, следующими свойствами: $\mathcal{E}_1$ — линейная положительная точная сюръекция нормы 1. Кроме того,

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2(a) = \varphi_1(\mathcal{E}_1 a) \quad (a \in L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)), \tag{17}$$

$$\mathcal{E}_1(x_1 \otimes x_2) = \varphi_2(x_2)x_1 \quad (x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}\ (i = 1, 2)). \tag{18}$$

Действительно, для любой б.ф. $a \in L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ имеем

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2(a) = \gamma(a)(1_{H_1} \otimes 1_{H_2}) = \gamma_1(\mathcal{E}_1 a)(1_{H_1}) = \varphi_1(\mathcal{E}_1 a).$$

Свойство (18) вытекает из следующей выкладки, справедливой в силу (16) для любых $x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}$ ($i = 1, 2$) и $y \in \mathcal{M}_1$:

$$\begin{aligned}\gamma_1(\mathcal{E}_1(x_1 \otimes x_2))(y) &= \gamma(x_1 \otimes x_2)(y \otimes 1_{H_2}) = \gamma_1(x_1)(y) \cdot \gamma_2(x_2)(1_{H_2}) \\ &= \gamma_1(\varphi_2(x_2)x_1)(y).\end{aligned}$$

Единственность отображения $\mathcal{E}_1$ с указанными свойствами есть следствие плотности в пространстве $L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ линеала, порождённого элементами вида $x_1 \otimes x_2$ ($x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}$). Аналогичные рассуждения справедливы для отображения $\mathcal{E}_2$. Теорема доказана.

§5. Заключение

В заключение статьи обсудим вопрос о включении пространства интегрируемых б.ф. $L_1(\varphi)$ в традиционную тройку $\{L_1,\ L_2,\ L_\infty\}$, а также коснёмся феноменологии интегрируемых б.ф. и сделаем ряд библиографических примечаний, имеющих отношение к обсуждаемой проблеме.

Пусть, как обычно, φ — точный нормальный полуконечный вес, заданный на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H. Как известно, аналогами существенно ограниченных измеримых функций являются в данном случае операторы из алгебры $\mathcal{M}$. Их можно реализовать ограниченными б.ф., заданными на линеале веса D_φ. Каждому оператору $x \in \mathcal{M}$ сопоставим ограниченную б.ф. $x(\cdot,\cdot)$, заданную на D_φ: $x(f,g) \equiv \langle xf, g\rangle$ $(f,g \in D_\varphi)$. Положим по определению $\|x(\cdot,\cdot)\|_\infty = \|x\|$ $(x \in \mathcal{M})$. Приведённая конструкция доставляет нам содержательное описание пространства $L_\infty(\varphi)$. Как банахово пространство, $L_\infty(\varphi)$ изометрически изоморфно пространству $\mathcal{M}$. Это двойственное описание уже не зависит от конкретной реализации W^*-алгебры $\mathcal{M}$, как алгебры Неймана. Отметим также, что этот факт согласуется с известным в традиционной теории изоморфизмом пространства L_∞ с сопряжённым к L_1: $L_1(\varphi)^* \simeq (\mathcal{M}_*)^* \simeq \mathcal{M} \simeq L_\infty(\varphi)$. Кроме того, как нетрудно видеть, $L_\infty(\varphi) \cap L_1(\varphi)$ плотно в $L_1(\varphi)$.

Перейдём к пространству $L_2(\varphi)$. L_2-метрикой относительно точного нормального полуконечного веса φ является метрика, определяемая скалярным произведением $\{x,y\} \to \varphi(y^*x)$ $(x,y \in \mathfrak{n}_\varphi)$. Пополнение левого идеала $\mathfrak{n}_\varphi$ по этой метрике приводит к гильбертову пространству $\mathfrak{H}$ представления алгебры $\mathcal{M}$, индуцированному весом φ. Пространство $\mathfrak{H}$ не зависит от реализации W^*-алгебры $\mathcal{M}$, как алгебры Неймана. Это даёт нам двойственное описание искомого пространства $L_2(\varphi)$. Может быть предложено и содержательное описание $L_2(\varphi)$ в терминах б.ф., заданных на линеале веса. Именно, б.ф. a, заданная на D_φ, принадлежит $L_2(\varphi)$, если существует последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ такая, что

(i) $a(f,g) = \lim\limits_n \langle x_n f, g\rangle \quad (f,g \in D_\varphi)$,

(ii) $\varphi((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) \to 0 \quad (n,m \to \infty)$.

Развёрнутая теория пространства $L_2(\varphi)$ обладает важными специфическими особенностями, определяющими её вполне самостоятельное значение. Эта теория будет изложена в отдельной публикации.

Теория алгебр операторов является в настоящее время одним из основных математических инструментов, используемых в общей теории полей и частиц. Основными объектами, связанными с физической системой, являются наблюдаемые и состояния. Распространёнными моделями систем являются модели, основанные на теории алгебр Неймана.

Одним из методологических приемов исследования системы является ограничение этой системы. Например, рассматривают алгебры ограниченных операторов, порождённые основными ("поименованными") переменными. Ещё одно ограничение можно связать с наличием априорной доминирующей меры φ: в нашем контексте — это точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана. Наличие такой меры выделяет класс состояний, допустимых для системы: это нормальные состояния, мажорируемые с точностью до скалярного множителя весом φ. Реализация алгебры как алгебры, действующей в гильбертовом пространстве представления, индуцированного весом, позволяет реализовать все нормальные состояния векторными состояниями. В частности, допустимые состояния описываются единичными векторами из линеала веса D_φ.

Общеизвестны трудности, которые возникают при введении неограниченных наблюдаемых. Они столь серьёзны, что математический формализм понятия неограниченной наблюдаемой до сих пор не установился. Идея включения понятия б.ф. в математический формализм квантовых систем не нова. Трудности, которые сопутствуют такому включению, связаны с отсутствием спектральной теоремы для б.ф. Это уже делает невозможным последовательное развитие исчисления вероятностей для наблюдаемых. Возможности, которые открываются в связи с наличием теории интегрирования для б.ф., ещё подлежат изучению. Феноменологический аспект теории интегрируемых б.ф. — это теория средних значений (ожиданий) наблюдаемых. Для интегрируемой б.ф. a величины $a(f,f)$ — суть средние значения соответствующей наблюдаемой в допустимых состояниях $\langle(\cdot)f,f\rangle$ $(f\in D_\varphi,\ \|f\|=1)$. Как и в традиционной феноменологии, наблюдаемая задана, если известны все её средние значения в допустимых состояниях. Двойственное описание пространства интегрируемых б.ф. как пространства, преддвойственного к алгебре, также согласуется с двойственной ролью наблюдаемых и состояний в традиционной феноменологии. Отметим также смысл выделения класса допустимых состояний указанным выше способом: все наблюдаемые, обладающие ожиданием относительно доминирующей меры φ, обладают ожиданием в любом из допустимых состояний.

Сделаем в заключение примечания, имеющие отношение к истории обсуждаемой в данной статье проблемы. Идея включения понятия б.ф. в основной аппарат общей теории интегрирования в алгебрах операторов, по-видимому, впервые выдвинута в работе [2]. Задача содержательного описания некоммутативного аналога пространства L_1 для случая алгебры всех ограниченных операторов была решена в работе [3]. Для нормальных состояний на алгебре Неймана соответствующая задача решена в 1972 г. [4][3]). Независимо попытка построения некоммутативного аналога пространства L_1, ассоциированного с весом, была предпринята японским математиком Иноу [12]. Метод Иноу основан на идее перенесения на веса сигаловской нормы

$$x\to\sup\{|\tau(yx)|\colon \|y\|\le 1, y\in\mathfrak{m}_\tau\}\quad (x\in\mathfrak{m}_\tau).$$

В случае точного нормального полуконечного веса φ для этого необходимо сузить $\mathfrak{m}_\varphi$ так, чтобы соответствующее выражение имело смысл. Этому требованию отвечает в случае стандартной алгебры Неймана многообразие $\ell_\varphi=\pi(\mathfrak{B}^2)$, где $\mathfrak{B}$ — модулярная гильбертова алгебра, эквивалентная соответствующей обобщённой гильбертовой алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда функция

$$x\to\sup\{|\varphi(yx)|\colon \|y\|\le 1, y\in\ell_\varphi\}\quad (x\in\ell_\varphi) \tag{19}$$

является нормой на ℓ_φ, и можно рассмотреть пополнение ℓ_φ по этой норме. Однако, Иноу не занимался задачей содержательного описания своего пространства L_1; оно у него состоит просто из фундаментальных последовательностей операторов из ℓ_φ относительно нормы (19).

Литература

1. Голодец В. Я., *Условные ожидания и модулярные автоморфизмы неймановских алгебр*, Функц. анализ и его прилож. **6** (1972), вып. 3, 68–69.
2. Шерстнев А.Н., *О представлении мер, заданных на ортопректорах пространства Гильберта, билинейными формами*, Изв.вузов. Математика (1970), 12, 90–97.
3. Шерстнев А. Н., *Общая схема интеграла относительно мер, заданных на ортопроекторах пространства Гильберта*, Вероятностные методы и кибернетика, вып. 9, Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1971, 108–119.
4. Шерстнев А. Н., *К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана*, Функц. анализ и его прилож. **8** (1974), 3, 89-90.
5. Шерстнев А. Н., *Каждый гладкий вес является l-весом*, Изв. вузов. Матем. (1977), 8, 88–91.
6. Шерстнев А. Н., *О некоммутативном аналоге пространства L_1*, Успехи матем. наук **33** (1978), вып. 1, 231–232.
7. Шерстнев А. Н., *Об одном некоммутативном аналоге пространства L_1*, Матем. анализ, Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1978, 112–123.
8. Combes F., *Poids associés à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compos. math. **23** (1971), no. 1, 49–77.
9. Combes F., *Poids et espérances conditionelles dans les algèbres de von Neumann*, Bull. Soc. math. France **99** (1971), no. 4, 73–112.
10. Connes A., *Une classification des facteurs de type III*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **6** (1973), 133–252.
11. Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, 2^e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1969, 367 p.
12. Inoue A., *L_1-spaces associated with a weight*, Mem. Fac. Sci. Kyushu. Univ. **A27** (1973), no. 2, 291–308.
13. Haagerup U., *Normal weights on W^*-algebras*, J. Funct. Anal. **19** (1975), no. 3, 302–317.
14. Pedersen G. K., Takesaki M., *The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87.
15. Perdrizet F., *Éléments positifs relatifs à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compos. math. **23** (1971), no. 1, 25–47.
16. Sakai S., *C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1971, 256 p.
17. Segal I., *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. **57** (1953), 401–457.
18. Takesaki M., *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lect. Notes Math., v. 128, 1970, Springer-Verlag.
19. Takesaki M., *Conditional expectations in von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **9** (1972), no. 3, 306–321.
20. Tomiyama J., *On the projection of norm one in W^*-algebras*, Proc. Japan Acad. Sci. **33** (1957), 608–612.
21. Van Daele A., *A new approach to the Tomita-Takesaki theory of generalized Hilbert algebras*, J. Funct. Anal. **15** (1974), no. 4, 378–393.

Примечания

[1] Для ограниченного справа элемента $\xi \in \mathfrak{H}$ ограниченный оператор $\pi'(\xi)$ однозначно определён равенством: $\pi'(\xi)\widehat{x} = \pi(x)\xi \ (x \in \mathfrak{A})$.

[2] По поводу 4-го равенства в написанной ниже цепочки см. [20], с. 382.

[3] В 1972 г. упомянутая работа получена редакцией журнала "Функциональный анализ и его приложения".

II. УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ В ОДНОЙ СХЕМЕ НЕКОММУТАТИВНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ[1]

(В соавторстве с А. Н. Шерстневым)

В кн.: Trans. VIII Prague Conf. on Inform Theory, Stat. Decis. Funct. Random Processes, Vol. B, Prague, 1978, 287–299

Резюме. В рамках теории состояний на алгебре фон Неймана дано двойственное описание класса всех наблюдаемых, обладающих ожиданием. На этой основе вводится понятие условного ожидания, изучаются его свойства и показывается, что оно является естественным распространением известного понятия условного ожидания, связанного с точным нормальным состоянием на алгебре ограниченных наблюдаемых.

Примечание

[1] Результаты этой статьи перекрываются публикацией **I**.

III. О НЕКОММУТАТИВНОМ АНАЛОГЕ ПРОСТРАНСТВА L_p

Изв. вузов. Математика,
1979, 11, 69–77.

Пусть M – полуконечная алгебра Неймана в гильбертовом пространстве H, и φ – точное нормальное состояние на M ($\varphi(1) = 1$). Цель настоящей работы состоит в построении пространств $L_p(\varphi)$ ($1 \leq p < \infty$), являющихся некоммутативными аналогами классических пространств L_p с конечной мерой. Для $p = 1$ предлагаемая конструкция является частным случаем некоммутативного пространства L_1, построенного в работах [4] и [5] по точному нормальному полуконечному весу на (не обязательно полуконечной) алгебре Неймана. В случае центрального состояния φ (т. е. конечного следа) пространство $L_p(\varphi)$ фактически сводится к известному пространству операторов, интегрируемых с p-той степенью относительно φ (см. [1], [8], [11], [12]). В общем случае содержательное описание $L_p(\varphi)$ дается в виде пространства билинейных форм на линеале состояния φ, не сводящихся к операторам уже для $p = 1$ (см. [4]). Для пространств $L_p(\varphi)$ доказывается аналог классической двойственности, включающий каноническую двойственность между $M_* \cong L_1$ и $M \cong L_\infty$.

1. Пусть τ – некоторый точный нормальный полуконечный след на M и $\mathcal{L}_p(\tau)$ ($1 \leq p < \infty$) – банахово пространство измеримых (в смысле [1]) операторов, интегрируемых с p-той степенью относительно τ. Вся дальнейшая конструкция существенно опирается на основные свойства пространств $\mathcal{L}_p(\tau)$, по поводу их доказательства мы отсылаем к работам [1], [8], [11], [12]. Напомним, что норма в $\mathcal{L}_p(\tau)$ задается равенством $\|S\|_p^\tau = \tau(|S|^p)^{1/p}$ ($S \in \mathcal{L}_p(\tau)$). Для точного нормального состояния φ имеет место представление

$$\varphi(X) = \tau(X \cdot T) = \tau(TX) \quad (X \in M), \tag{1}$$

где $T \geq 0$ – однозначно определенный несингулярный самосопряженный оператор из $\mathcal{L}_1(\tau)$ (см. [1], теорема 14). В (1), а также в дальнейшем, значком "$\cdot$" обозначается сильное (т. е. замыкание обычного) произведение операторов; сумма операторов всегда будет пониматься в сильном смысле. Напомним, что класс всех измеримых относительно M операторов является кольцом с инволюцией относительно сильных алгебраических операций (см. [1]).

Представление (1) позволяет задать на M для каждого числа $1 \leq p < \infty$ некоторую норму $\|\cdot\|_p$, связанную с φ (и, пока что, с τ). Пусть $X \in M$, тогда оператор $T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p} \in \mathcal{L}_p(\tau)$, и поэтому имеет смысл следующее

Определение 1. *Для каждого $1 \le p < \infty$ определим на M функцию*

$$X \to \|X\|_p = \tau(|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}|^p)^{1/p} = \|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau \tag{2}$$

и будем считать, что $\|X\|_\infty = \|X\|$ $(X \in M)$.

Теорема 1. *Отображение $X \to \|X\|_p$ не зависит от выбора точного нормального полуконечного следа τ и является нормой на M.*

Доказательство. Предположим, что τ_1 – еще один точный нормальный полуконечный след на M. Тогда наряду с (1) имеет место представление

$$\varphi(X) = \tau_1(T_1 X) = \tau_1(X \cdot T_1) \quad (X \in M), \tag{3}$$

где $T_1 \ge 0$ – несингулярный самосопряженный оператор из $\mathcal{L}_1(\tau_1)$, однозначно определяемый равенством (3). Пусть, далее, присоединенный к центру алгебры M самосопряженный оператор $R \ge 0$ таков, что $\tau = \tau_1(R\,\cdot)$ (см. [1], теорема 15). В силу единственности операторов T и T_1 в представлениях (1) и (3) имеет место равенство

$$T_1 = R \cdot T = T \cdot R. \tag{4}$$

Так как операторы R и T перестановочны, то для всякого $1 \le p < \infty$ из (4) следует, что $T_1^{1/2p} = R^{1/2p} \cdot T^{1/2p}$. Используя единственность полярного разложения, теперь нетрудно получить равенство

$$R^{1/p} \cdot |T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}| = |T_1^{1/2p} \cdot X \cdot T_1^{1/2p}| \quad (X \in M),$$

из которого в свою очередь следует, что для каждого $X \in M$

$$R \cdot |T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}|^p = |T_1^{1/2p} \cdot X \cdot T_1^{1/2p}|^p. \tag{5}$$

Из равенства (5) с учетом [1] (теорема 15) вытекает справедливость следующей выкладки:

$$\tau_1(|T_1^{1/2p} \cdot X \cdot T_1^{1/2p}|^p) = \tau_1(R \cdot |T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}|^p) =$$

$$= \tau(|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}|^p) \quad (X \in M).$$

Таким образом, показана независимость отображения $X \to \|X\|_p$ от выбора следа τ.

Проверим теперь, что функция $X \to \|X\|_p$ является нормой на M. Учитывая, что $\|\cdot\|_p^\tau = \tau(|\cdot|^p)^{1/p}$ – норма на $\mathcal{L}_p(\tau)$, имеем для любых $X, Y \in M$ и $1 \le p < \infty$:

$$\|X+Y\|_p = \|T^{1/2p} \cdot (X+Y) \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau = \|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p} + T^{1/2p} \cdot Y \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau \le$$

$$\le \|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau + \|T^{1/2p} \cdot Y \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau = \|X\|_p + \|Y\|_p$$

и $\|\lambda X\|_p = |\lambda|\|X\|_p$ $(\lambda \in \mathbb{C})$. Если $\|X\|_p = 0$ для некоторого $X \in M$, то это означает, что оператор $T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p} = 0$. В силу несингулярности оператора T отсюда следует, что $X = 0$. Теорема доказана.

Пусть $\gamma\colon M \to M_*$ – каноническое вложение, определяемое состоянием φ (см. [3], [4]). Напомним определение γ. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, являющееся пополнением M по скалярному произведению $\{X, Y\} \to \varphi(Y^*X)$ $(X, Y \in M)$, и $\widehat{\ }) : M \to \mathcal{H}$ – тождественное вложение. Отображение π алгебры M в алгебру ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, заданное равенством $\pi(X)\widehat{Y} = \widehat{XY}$ $(X, Y \in M)$, определяет точное нормальное $*$-представление M, индуцированное φ. Пусть S – (антилинейный) оператор в $\mathcal{H}$, являющийся замыканием отображения $\widehat{X} \to \widehat{X}^*$ $(X \in M)$, и $S = J\Delta^{1/2}$ – полярное разложение S (J – антилинейная изометрия в Δ, а Δ – модулярный оператор теории Томита–Такесаки [2]). Для каждого $X \in M$ функционал $\gamma(X) \in M_*$ определяется равенством

$$\gamma(X)(Y) = (J\pi(Y)^*J\widehat{X}, \widehat{1}) \quad (Y \in M). \tag{6}$$

Отображение γ является линейной положительной биекцией M на плотную часть пространства M_* (см. [3], [4]), причем для любых $X, Y \in M$

$$\begin{aligned}\gamma(X)(Y^*) &= (J\pi(Y)J\widehat{X}, \widehat{1}) = (\widehat{X}, J\pi(Y)^*J\widehat{1}) \\ &= (\widehat{X}, JS\widehat{Y}) = (\widehat{X}, \Delta^{1/2}\widehat{Y}) = (\Delta^{1/2}\widehat{X}, \widehat{Y}).\end{aligned} \tag{7}$$

Дальнейшие построения будут существено опираться на следующий результат.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\gamma(X)(Y) = \tau(T^{1/2} \cdot X \cdot T^{1/2}Y) \quad (X, Y \in M). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $s = s(\cdot, \cdot)$ – билинейная (т. е. линейная по первому и антилинейная по второму аргументу) форма на M, определенная равенством $s(X, Y) = \tau(T^{1/2} \cdot X \cdot T^{1/2}Y^*)$ $(X, Y \in M)$. Для каждого $X \in M$ через s_X^* обозначим функционал из M_*, заданный соотношением $s_X^*(Y) = s(Y, X) = \tau(T^{1/2} \cdot Y \cdot T^{1/2}X^*)$ $(Y \in M)$. Для доказательства утверждения теоремы достаточно в силу (7) проверить, что

$$s(X, Y) = (\Delta^{1/2}\widehat{X}, \widehat{Y}) \quad (X, Y \in M). \tag{9}$$

Согласно одному результату А. Конна (см. [6], теорема 1.3) равенство (9) будет установлено, если мы покажем, что форма s удовлетворяет следующим условиям:

(a) $s(X, X) \geq 0$ $(X \in M)$ и равенство $s(X, X) = 0$ имеет место только при $X = 0$;

(b) множество $\{s_X^* | X \in M^+\}$ является гранью в конусе всех линейных положительных функционалов на M;

(c) $s_1^* = \varphi$.

Для проверки условия (a) возьмем $X \in M$, тогда

$$s(X,X) = \tau(T^{1/2} \cdot X \cdot T^{1/2}X^*) = \tau((T^{1/4} \cdot X \cdot T^{1/4})(T^{1/4} \cdot X \cdot T^{1/4})^*) \geq 0.$$

При этом, если $s(X,X) = 0$, то оператор $T^{1/4} \cdot X \cdot T^{1/4} = 0$. В силу несингулярности T последнее равенство означает, что $X = 0$.

Условие (c) очевидно выполнено в силу равенства (1).

Для проверки (b) отметим, прежде всего, что для любых $X, Y \in M^+$

$$0 \leq s_X^*(Y) = \tau(T^{1/2} \cdot Y \cdot T^{1/2}X) \leq \|X\|\tau(T^{1/2} \cdot Y \cdot T^{1/2}) = \|X\|\,\varphi(Y). \qquad (10)$$

Если теперь ψ – линейный положительный функционал на M такой, что $\psi \leq s_X^*$ для некоторого $X \in M^+$, то $\psi \in M_*$ (см., напр., [9], I, §4, лемма 1). Пусть тогда положительный самосопряженный оператор $K \in \mathcal{L}_1(\tau)$ является производной нормального функционала ψ по следу τ в смысле Сигала (см. [1], теорема 14), т. е. $\psi(X) = \tau(KX) = \tau(X{\cdot}K)$ $(X \in M)$. Тогда в силу (10) для некоторого $\lambda > 0$ имеет место неравенство $\psi = \tau(K\cdot) \leq \lambda\varphi = \lambda\tau(T\cdot)$, означающее, согласно ([4], предложение 3), что $D(T^{1/2}) \subset D(K^{1/2})$ и $|K^{1/2}f|^2 \leq \lambda|T^{1/2}f|^2$ $(f \in D(T^{1/2}))$.[1)]Определим теперь на плотном в H линеале векторов

$$\{T^{1/2}f + g \mid f, g \in D(T^{1/2}),\ T^{1/2}g = 0\}$$

линейный оператор U следующим образом: $U(T^{1/2}f + g) = K^{1/2}f$. Нетрудно проверить, что оператор U определен корректно, ограничен, и его замыкание, которое мы обозначим через V, принадлежит M (ср. [9], I, §1, лемма 2). Из определения оператора V следует включение $V \cdot T^{1/2} \subset K^{1/2}$. Но, будучи измеримыми, операторы $V \cdot T^{1/2}$ и $K^{1/2}$ тогда должны совпадать (см. [1], следствие 5.1). В таком случае

$$K = (K^{1/2})^*K^{1/2} = (V \cdot T^{1/2})^*(V \cdot T^{1/2}) = T^{1/2} \cdot (V^*V) \cdot T^{1/2}.$$

Полагая, наконец, $Z = V^*V (\in M^+)$, имеем

$$\psi(Y) = \tau(KY) = \tau(T^{1/2} \cdot Z \cdot T^{1/2}Y) = s_Z^*(Y) \quad (Y \in M).$$

Таким образом, мы проверили условие (b), завершив этим доказательство теоремы.

Следствие 1. *Если* $X \in M$, *то* $\|X\|_1 = \|\gamma(X)\|$.

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства (8) и следующего известного соотношения (см., напр., [1]):

$$\tau(|T^{1/2} \cdot X \cdot T^{1/2}|) = \sup_{Y \in M,\ \|Y\| \leq 1} |\tau(T^{1/2} \cdot X \cdot T^{1/2}Y)| \quad (X \in M).$$

2. Перейдем к содержательному описанию пополнения M по норме $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p < \infty)$. Напомним (см. [3]–[5]), что линеалом состояния φ называется плотное в H линейное многообразие

$$D_\varphi = \{f \in H \mid \exists\lambda > 0 : (Xf, f) \leq \lambda\varphi(X)\ (X \in M^+)\}.$$

Под билинейной формой (б. ф.) на D_φ мы понимаем отображение $a : D_\varphi \times D_\psi \to \mathbb{C}$, линейное по первому и антилинейное по второму аргументу.

[1)] Здесь мы также воспользовались естественной согласованностью некоммутативных теорем Радона–Никодима: Сигала ([1], теорема 14), Педерсена и Такесаки ([10], теорема 5.12).

Определение 2. *Скажем, что б. ф. a на D_φ является p-интегрируемой* ($1 \le p < \infty$), *если существует последовательность* $(X_n) \subset M$ (*называемая p-определяющей для a*) *такая, что:*

(*i*) $a(f,g) = \lim (X_n f, g) \quad (f, g \in D_\varphi)$;

(*ii*) $\|X_n - X_m\|_p \to 0 \quad (m, n \to \infty)$.

Отметим, что понятие б. ф., интегрируемой относительно φ, рассматриваемое в [3] и [4], совпадает, в силу следствия 1, с понятием 1-интегрируемой б. ф. Это соображение позволяет использовать при доказательстве следующей теоремы справедливость ее утверждения в случае $p = 1$, установленного в [4].

Теорема 3. *Для каждой p-интегрируемой б. ф. a на D_φ величина $\|a\|_p \equiv \lim \|X_n\|_p$ не зависит от выбора p-определяющей последовательности (X_n). Линейное пространство $L_p(\varphi)$ всех p-интегрируемых б. ф. на D_φ является банаховым относительно нормы $a \to \|a\|_p$.*

Лемма 1. *Пусть $X \in M$ и $1 \le p \le q \le \infty$. Тогда $\|X\|_p \le \|X\|_q$.*

Доказательство. Пусть $q < \infty$ и число s удовлетворяет уравнению $1/s + 1/q = 1/p$. Тогда согласно [8] (следствие 3, с. 26) для каждого $X \in M$

$$\begin{aligned}\|X\|_p &= \|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau = \|T^{1/2s} \cdot (T^{1/2q} \cdot X \cdot T^{1/2q}) \cdot T^{1/2s}\|_p^\tau \\ &\le \|T^{1/2s}\|_{2s}^\tau \, \|T^{1/2q} \cdot X \cdot T^{1/2q}\|_q^\tau \, \|T^{1/2s}\|_{2s}^\tau \\ &= \|T^{1/2q} \cdot X \cdot T^{1/2q}\|_q^\tau = \|X\|_q.\end{aligned}$$

(Напомним, что $\|T\|_1^\tau = \tau(T) = \varphi(1) = 1$.) Если же $q = \infty$, то, в силу того же следствия 3, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\|X\|_p &= \|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau \le \|T^{1/2p}\|_{2p}^\tau \, \|X\| \, \|T^{1/2p}\|_{2p}^\tau \\ &= \|X\| \equiv \|X\|_\infty.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно, очевидно, показать, что каждая последовательность $(X_n) \subset M$, являющаяся p-определяющей для нулевой б. ф. на D_φ, обладает свойством:

$$\lim \|X_n\|_p = 0. \tag{11}$$

Для проверки (11) отметим, прежде всего, что в силу условия (ii) определения 2 последовательность операторов $T^{1/2p} \cdot X_n \cdot T^{1/2p}$ является фундаментальной в $\mathcal{L}_p(\tau)$ и, следовательно, сходится по $\|\cdot\|_p^\tau$ к некоторому оператору $A \in \mathcal{L}_p(\tau)$. Если число q удовлетворяет уравнению $1/p + 1/q = 1$, то $T^{1/2q} \cdot A \cdot T^{1/2q} \in \mathcal{L}_1(\tau)$ и

$$\begin{aligned}\|T^{1/2q} \cdot A \cdot T^{1/2q} - T^{1/2} \cdot X_n \cdot T^{1/2}\|_1^\tau &= \|T^{1/2q} \cdot (A - T^{1/2p} \cdot X_n \cdot T^{1/2p}) \cdot T^{1/2q}\|_1^\tau \\ &\le \|A - T^{1/2p} \cdot X_n \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned} \tag{12}$$

Теперь заметим, что в силу леммы 1 последовательность (X_n) является и 1-определяющей для нулевой б. ф. на D_φ. Но это означает, согласно [4] (теорема 1), что $\lim \|X_n\|_1 = 0$. В таком случае из выкладки (12) следует, что

$$\|T^{1/2q} \cdot A \cdot T^{1/2q}\|_1^\tau = \lim \|T^{1/2r} \cdot X_n \cdot T^{1/2r}\|_1^\tau = 0.$$

Таким образом, $T^{1/2q} \cdot A \cdot T^{1/2q} = 0$ и в силу несингулярности оператора T имеем $A = 0$. Следовательно,

$$\lim \|X_n\|_p = \lim \|T^{1/2p} \cdot A \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau = 0.$$

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно, очевидно, проверить, что для каждой $\|\cdot\|_p$-фундаментальной последовательности $(Y_n) \subset M$ предел $\lim(Y_n f, g)$ $(f, g \in D_\varphi)$ существует и не меняется при замене (Y_n) на любую эквивалентную ей по $\|\cdot\|_p$ последовательность. В силу леммы 1 здесь можно ограничиться случаем $p = 1$. Но справедливость утверждения для $p = 1$ установлена в [4]. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем отождествлять операторы из M с ограниченными б. ф. на D_φ, которые они определяют. В этом смысле естественно считать, что $L_\infty(\varphi) = M$.

Следствие 2. *Если* $1 \le p \le q \le \infty$, *то* $L_q(\varphi) \subset L_p(\varphi)$ *и* $\|a\|_p \le \|a\|_q$ $(a \in L_q(\varphi))$.

Доказательство сразу вытекает из леммы 1.

3. В этом разделе мы перенесем на пространства $L_p(\varphi)$ классическое утверждение двойственности.

Определим линейное по обоим аргументам отображение $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon M \times M \to \mathbb{C}$ следующей формулой:

$$\langle X, Y\rangle = \gamma(X)(Y) \quad (X, Y \in M).$$

Справедливо неравенство $|\langle X, Y\rangle| \le \|X\|_p \|Y\|_q$ $(X, Y \in M)$, коль скоро $1/p + 1/q = 1$ $(1 \le p, q \le \infty)$. Действительно, для таких p и q вследствие (8) и [8] (теорема 6) справедлива следующая выкладка:

$$\begin{aligned}|\langle X, Y\rangle| &= |\tau(T^{1/2} \cdot X \cdot T^{1/2} Y)| = |\tau(T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p} \cdot T^{1/2q} \cdot Y \cdot T^{1/2q})| \\ &\le \|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau \|T^{1/2q} \cdot Y \cdot T^{1/2q}\|_q^\tau \\ &= \|X\|_p \|Y\|_q \quad (X, Y \in M).\end{aligned}$$

Следовательно, при $1/p + 1/q = 1$ мы можем продолжить форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ с $M \times M$ по непрерывности до формы $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon L_p(\varphi) \times L_q(\varphi) \to \mathbb{C}$, линейной по обоим аргументам и такой, что

$$|\langle a, b\rangle| \le \|a\|_p \|b\|_q \quad (a \in L_p(\varphi),\ b \in L_p(\varphi)).$$

Следующая теорема показывает, что сопряженным к банахову пространству $L_p(\varphi)$ $(1 \le p < \infty)$ является банахово пространство $L_q(\varphi)$, где $1/p + 1/q = 1$. Для $p = 1$ этот результат (в более общей ситуации) был получен в [4], где также установлено, что $L_1(\varphi) \cong M_*$.

Теорема 4. *Пусть $1 \le p \le \infty$, а q удовлетворяет уравнению $1/p + 1/q = 1$. Всякая б. ф. a из $L_q(\varphi)$ определяет непрерывный линейный функционал F на $L_p(\varphi)$ по формуле*

$$F(b) = \langle b,\, a\rangle \quad (b \in L_p(\varphi)), \tag{13}$$

при этом $\|F\| = \|a\|_q$. Наоборот, при $1 \le p < \infty$ всякий непрерывный линейный функционал F на $L_p(\varphi)$ имеет вид (13) для некоторой б. ф. $a \in L_q(\varphi)$.

Лемма 2. *Пусть $1 \le p < \infty$. Отображение $X \to T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}$ $(X \in M)$ продолжается до изометрического изоморфизма банаховых пространств $\sigma_p : L_p(\varphi) \to \mathcal{L}_p(\tau)$. При этом, если $1/p + 1/q = 1$, то*

$$\langle a,\, b\rangle = \tau(\sigma_p(a) \cdot \sigma_q(b)) \quad (a \in L_p(\varphi),\, b \in L_q(\varphi)) \tag{14}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно, очевидно, показать плотность в $\mathcal{L}_p(\tau)$ множества операторов вида $T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}$ $(X \in M)$. В силу известного утверждения о двойственности пространств $\mathcal{L}_p(\tau)$ для этого, в свою очередь, достаточно убедиться в равенстве нулю оператора $A \in \mathcal{L}_q(\tau)$ $(1/p + 1/q = 1)$, если

$$A \cdot T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p} \equiv 0 \quad (X \in M).$$

Но для такого A оператор $T^{1/2p} \cdot A \cdot T^{1/2p} \in \mathcal{L}_1(\tau)$ и

$$\|T^{1/2p} \cdot A \cdot T^{1/2p}\|_1^\tau = \sup_{X \in M,\ \|X\| \le 1} |\tau(T^{1/2p} \cdot A \cdot T^{1/2p} X| = 0.$$

Таким образом, $T^{1/2p} \cdot A \cdot T^{1/2p} = 0$ и, следовательно, $A = 0$ в силу несингулярности T. Равенство (14) сразу вытекает из следующей выкладки, справедливой в силу теоремы 2:

$$\begin{aligned}\langle X,\, Y\rangle &= \tau(T^{1/2} \cdot X \cdot T^{1/2} Y) = \tau(T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p} \cdot T^{1/2q} \cdot Y \cdot T^{1/2q}) \\ &= \tau(\sigma_p(X) \cdot \sigma_q(Y)) \quad (X,\, Y \in M).\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 4 теперь легко получить из известного утверждения о двойственности пространств $\mathcal{L}_p(\tau)$ (см. [8], [12]) и леммы 2.

Следствие 3. *При $1 < p < \infty$ пространство $L_p(\varphi)$ рефлексивно.*

Следствие 4. *Пусть б. ф. $a \in L_p(\varphi)$. Тогда комплексно сопряженная к a б. ф. $a^* \in L_p(\varphi)$ и $\|a\|_p = \|a^*\|_p$. Пространство $L_2(\varphi)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения $\{a,\, b\} \to \langle a,\, b^*\rangle$, индуцирующего норму $\|\cdot\|_2$.*

Доказательство сразу следует из выкладки, справедливой для любого $X \in M$ и $1 \le p < \infty$:

$$\begin{aligned}\|X^*\|_p &= \|T^{1/2p} \cdot X^* \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau = \|(T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p})^*\|_p^\tau \\ &= \|T^{1/2p} \cdot X \cdot T^{1/2p}\|_p^\tau = \|X\|_p.\end{aligned}$$

Замечание. Пусть φ_1 – еще одно точное нормальное состояние на M и $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ – соответствующая ему форма. Для каждого $1 \le p < \infty$ банаховы пространства $L_p(\varphi)$ и $L_p(\varphi_1)$ изометрически изоморфны, причем отображение $\delta_p\colon L_p(\varphi) \to L_p(\varphi_1)$, определяющее этот изоморфизм, может быть выбрано с условием $\langle\delta_p(a),\, \delta_q(b)\rangle_1 = \langle a,\, b\rangle \quad (a \in L_p(\varphi),\, b \in L_q(\varphi),\, 1/p + 1/q = 1)$.

Действительно, пусть σ_p (соответственно, σ_p^1) – изометрический изоморфизм $L_p(\varphi)$ (соответственно, $L_p(\varphi_1)$) на $\mathcal{L}_p(\tau)$, построенный в лемме 2. Нетрудно убедиться в том, что отображение $\delta_p = (\sigma_p^1)^{-1} \circ \sigma_p$ осуществляет искомый изоморфизм.

4. В этом разделе мы предположим, что состояние φ центрально (т. е. является точным нормальным конечным следом) и установим связь предлагаемой конструкции пространства $L_p(\varphi)$ с теорией интегрирования относительно следа, развитой в работах [1], [8], [11], [12].

Отметим, прежде всего, очевидные равенства:

$$\|X\|_p = \varphi(|X|^p)^{1/p}, \quad \langle X,\, Y\rangle = \varphi(XY) \quad (X,\, Y \in M,\, 1 \le p < \infty).$$

Далее через $\mathcal{L}_p(\varphi)$ $(1 \le p < \infty)$ мы будем обозначать банахово пространство операторов, интегрируемых с p-той степенью относительно следа φ в смысле [11], [12].

Лемма 3. *Пусть $2 \le p < \infty$ и оператор $A \in \mathcal{L}_p(\varphi)$. Линеал D_φ является существенной областью определения A, причем заданная на D_φ б. ф. $(A(\cdot),\, (\cdot)) \in L_p(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть $A = U|A|$ – полярное разложение оператора A и $|A| = \int_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ – спектральное представление оператора $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Тогда для любого вектора $f \in D_\varphi$ найдется такое число $\mu > 0$, что

$$\int_1^\infty \lambda^2\; d(e(\lambda)f,\, f) \le \mu \int_1^\infty \lambda^2\, d\varphi(e(\lambda)) \le \mu \int_1^\infty \lambda^p\, d\varphi(e(\lambda)) \le$$
$$\le \mu \int_0^\infty \lambda^p\, d\varphi(e(\lambda)) = \mu\varphi(|A|^p) < \infty.$$

Таким образом, показано включение $D_\varphi \subset D(A)$. Обозначив через A_1 замыкание ограничения оператора A на D_φ, нетрудно показать, используя очевидную инвариантность D_φ относительно M', что оператор A_1 присоединен к M. В силу конечности алгебры M из включения $A_1 \subset A$ следует равенство $A_1 = A$ (см. [7], с. 264), показывающее, что D_φ – существенная область определения оператора A. Рассмотрим теперь последовательность операторов $X_n = U(\int_0^n \lambda\, de(\lambda))$ $(\in M)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Легко видеть, что эта последовательность сходится к A по норме $\|\cdot\|_p$, причем $X_n f \to Af$ для любого $f \in D_\varphi$. Таким образом, (X_n) – p-определяющая последовательность для б. ф. $(A(\cdot),\, (\cdot))$ на D_φ. Лемма доказана.

Предположим теперь, что оператор $A \in \mathcal{L}_p(\varphi)$ $1 \le p < \infty$, и определим на D_φ некоторую б. ф. $a_A \in L_p(\varphi)$, совпадающую при $p \ge 2$ с б. ф. $(A(\cdot),\, (\cdot))$. Пусть оператор A представлен в виде

$$A = C^* \cdot B, \tag{15}$$

где $B \in \mathcal{L}_r(\varphi)$, $C \in \mathcal{L}_s(\varphi)$, а числа $r \geq 2$ и $s \geq 2$ таковы, что $1/r + 1/s = 1/p$ (такое представление, очевидно, всегда возможно). Выберем последовательность $(X_n) \subset M$ (соответственно, $(Y_n) \subset M$), сходящуюся к оператору B (соответственно, C) по норме $\|\cdot\|_r$ ($\|\cdot\|_s$) и такую, что $X_n f \to Bf$ (соответственно, $Y_n f \to Cf$) для каждого вектора $f \in D_\varphi$ (см. доказательство леммы 3). Тогда последовательность $Z_n = Y_n^* X_n$ является p-определяющей для б. ф. a_A, заданной на D_φ равенством $a_A(f, g) = (Bf, Cf)$ $(f, g \in D_\varphi)$. Действительно, при $n \to \infty$

$$\|A - Z_n\|_p = \|A - C^* X_n + C^* X_n - Z_n\|_p \leq$$

$$\leq \|C^*\|_s \|B - X_n\|_r + \|C^* - Y_n^*\|_r \|X_n\|_s \to 0.$$

Из последней выкладки в силу теоремы 3 также следует, что б. ф. $a_A (\in L_p(\varphi))$ определена корректно, т. е. не зависит от выбора представления оператора A в виде (15), причем при $p \geq 2$ б. ф. $a_A = (A(\cdot), (\cdot))$.

Доказательство следующей теоремы 5 очевидным образом вытекает из предыдущих расмотрений.

Теорема 5. *Отображение $A \to a_A$ задает изометрический изоморфизм банахова пространства $\mathcal{L}_p(\varphi)$ $(1 \leq p < \infty)$ операторов, интегрируемых с p-той степенью относительно φ, на банахово пространство $L_p(\varphi)$ p-интегрируемых б. ф.*

В заключение автор выражает глубокую признательность А. Н. Шерстневу за внимание к настоящей работе.

Литература

1. Сигал И. Е., *Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования*, Математика (сб. перев.) **6** (1962), 1, 65–132.
2. Такесаки М., *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения*, Математика (сб. перев.) **18** (1974), 3, 84–120; **18** (1974), 4, 34–63.
3. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *Условное ожидание в одной схеме некоммутативной теории вероятностей*, Trans. VIII Prague Conf. Infor. Theor., Prague, 1978, pp. 287–299.
4. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I*, Изв. вузов. Матем. (1978), 7, 79–88.
5. Шерстнев А. Н., *Каждый гладкий вес является l-весом*, Изв. вузов. Матем. (1977), 8, 88–91.
6. Connes A., *Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algébres de von Neumann*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **24** (1974), no. 1, 121–155.
7. Dye H., *The Radon–Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), no. 2, 243–280.
8. Dixmier J., *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs*, Bull. Soc. Math. France **81** (1953), no. 1, 9–39.
9. Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann).* 2nd ed., Gauthier–Villars, Paris, 1969.
10. Pedersen G. K., Takesaki M., *The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87.
11. Ogasavara T., Yoshinaga K., *A non-commutative theory of integration for operators*, J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A **18** (1955), no. 3, 311–347.
12. Yeadon F. J., *Non-commutative L^p-spaces*, Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc. **77** (1975), no. 1, 91–102.

IV. О НЕКОММУТАТИВНОМ АНАЛОГЕ ПРОСТРАНСТВА L_2

Конструкт. теория функций и функц. анализ,
Казань, Изд–во Казанск. ун–та,
вып. 2, 1979, 93–114

В схеме некоммутативного интегрирования относительно веса на алгебре Неймана принципиальное значение имеет задача содержательного описания аналогов классических пространств L_1 и L_2. Для случая следа эта задача была решена Сигалом [1]; содержательное описание пространства L_1, ассоциированного с весом, было предложено А. Н. Шерстневым [4 – 7]. В данной работе вводится и изучается реализация пространства L_2, ассоциированного с весом, в виде гильбертова пространства "интегрируемых с квадратом" билинейных форм на линеале веса идейно близкая к конструкции А. Н. Шерстнева. Одним из основных вопросов, обсуждаемых в работе, является вопрос о представлении билинейных форм класса L_2 с помощью операторов. Вообще говоря, такое представление не всегда возможно, однако в случае следа существует естественная биекция между билинейными формами из L_2 и "интегрирумыми с квадратом" (по Сигалу [1]) операторами. В этом смысле предлагаемая конструкция явяляется принципиальным обобщением соответствующей теории Сигала.

Работа состоит из шести параграфов. В §1 собраны необходимые определения и предварительные сведения. В §2 дается содержательное описание пространства L_2. В §3 изучаются некоторые классы билинейных форм из L_2. Вопросу о представлении билинейных форм с помощью операторов посвящен §4. В §5 устанавливается связь с теорией Сигала. В §6 рассмотрен случай конечной алгебры Неймана.

§1. Предварительные сведения

Всюду ниже через $\mathcal{M}$ мы будем обозначать алгебру Неймана, действующую в гильбертовом пространстве H. В терминологии, связанной с алгебрами Неймана, мы будем придерживаться монографии [9]; используемые в дальнейшем сведения из теории весов и обобщенных гильбертовых алгебр содержатся в работах [2, 8, 13]. Пусть φ – точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$,

$$\mathfrak{n}_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < +\infty\}, \quad \mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < +\infty\},$$

$\mathfrak{m}_\varphi$ $(\mathfrak{m}_\varphi^э)$ – комплексная (соответственно вещественная) линейная оболочка конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+$; той же буквой φ мы обозначаем и единственное линейное продолжение на $\mathfrak{m}_\varphi$ ограничения веса $\varphi|\mathfrak{m}_\varphi^+$. Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство, являющееся пополнением левого идеала $\mathfrak{n}_\varphi$ по скалярному произведению

$$\{x,y\} \to \varphi(y^*x) \quad (x,y \in \mathfrak{n}_\varphi), \qquad \|x\|_2 \equiv [\varphi(x^*x)]^{1/2} \quad (x \in \mathfrak{n}_\varphi),$$

и $\widehat{\ }$): $\mathfrak{n}_\varphi \to \mathfrak{H}$ – каноническое вложение. Отображение π алгебры $\mathcal{M}$ в алгебру всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$, заданное равенством

$$\pi(x)\widehat{y} = \widehat{xy} \quad (x \in \mathcal{M}, y \in \mathfrak{n}_\varphi),$$

определяет представление $\mathcal{M}$, индуцированное весом φ. Инволюция $^\sharp$): $\widehat{x}^\sharp \equiv \widehat{x^*}$ и произведение $\widehat{x}\widehat{y} \equiv \widehat{xy}$ определяют в $\mathfrak{A} \equiv \widehat{\mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*}$ структуру совершенной обобщенной гильбертовой алгебры, для которой $\pi(\mathcal{M})$ является левой алгеброй Неймана. Пусть S – замыкание в $\mathfrak{H}$ отображения $^\sharp$) и $S = J\Delta^{1/2}$ – полярное разложение S (J – антилинейная изометрия в $\mathfrak{H}$, Δ – модулярный оператор), $D^\sharp \equiv D(S)$, $D^\flat \equiv D(S^*)$. Для $\xi \in D^\flat$ полагаем, как обычно, $\xi^\flat \equiv S^*\xi$. Через $\mathfrak{A}_0$ (соответственно, $\mathfrak{A}_0'$) будем обозначать множество векторов из $\mathfrak{H}$ ограниченных слева (соответственно, справа) относительно обобщенной гильбертовой алгебры $\mathfrak{A}$ [9]. Отметим, что $\mathfrak{A}_0 = \widehat{\mathfrak{n}_\varphi}$ и $\mathfrak{A}_0' = J\mathfrak{A}_0$. Для каждого $\xi \in \mathfrak{A}_0'$ через $\pi'(\xi)$ обозначим оператор из $\pi(\mathcal{M})'$, однозначно определенный равенством

$$\pi'(\xi)\widehat{x} = \pi(x)\xi \quad (x \in \mathfrak{n}_\varphi).$$

Инволюция $^\flat$) и произведение $\xi\eta \equiv \pi'(\eta)\xi$ определяют в $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}_0' \bigcap D^\flat$ структуру обобщенной гильбертовой алгебры, канонически ассоциированной с $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{M}_*$ – множество всех ультраслабо непрерывных функционалов на $\mathcal{M}$ и

$$\Gamma_\varphi = \{\psi \in \mathcal{M}_*^+ \mid \exists \lambda > 0 : \psi \leq \lambda\varphi\}.$$

Отметим, что для вектора $\xi \in \mathfrak{H}$ функционал $(\pi(\cdot)\xi, \xi) \in \Gamma_\varphi$ тогда и только тогда, когда $\xi \in \mathfrak{A}_0'$. Для каждого функционала $\psi \in \Gamma_\varphi$ через ξ_ψ будем обозначать вектор из $\mathfrak{A}'$, однозначно определяемый условиями

$$\psi(x) = (\pi(x)\xi_\psi, \xi_\psi) \quad (x \in \mathcal{M}), \qquad \pi'(\xi_\psi) \geq 0 \qquad (\text{см. [9]}).$$

Линеалом веса φ (см. [6, 7]) называется плотное в гильбертовом пространстве H линейное многообразие

$$\mathcal{D}_\varphi = \{f \in H \mid \exists\, \lambda > 0 : (xf, f) \leq \lambda\varphi(x)\ (x \in \mathcal{M}^+)\}.$$

Учитывая, что вектор $f (\in H)$ принадлежит $\mathcal{D}_\varphi$ тогда и только тогда, когда функционал $\omega_f \equiv ((\cdot)f, f) \in \Gamma_\varphi$, условимся для $f \in \mathcal{D}_\varphi$ полагать $\xi_f \equiv \xi_{\omega_f}$. Под билинейной формой (б. ф.) на $\mathcal{D}_\varphi$ будем понимать отображение a, сопоставляющее каждой паре векторов $f, g \in \mathcal{D}_\varphi$ комплексное число $a(f,g)$, причем это отображение линейно по первому и антилинейно по второму аргументу. Для ограниченного линейного оператора x в H через $x(\cdot,\cdot)$ условимся обозначать ограниченную б. ф., заданную на $\mathcal{D}_\varphi$ равенством

$$x(f,g) = (xf, g) \quad (f, g \in \mathcal{D}_\varphi).$$

§2. Гильбертово пространство $L_2(\varphi)$

1. Определение. Будем говорить, что б. ф. a на $\mathcal{D}_\varphi$ *принадлежит классу* $L_2(\varphi)$, если существует последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ (называемая *определяющей для* a) такая, что:

(i) $a(f,g) = \lim(x_n f, g) \quad (f,g \in \mathcal{D}_\varphi)$,
(ii) $\|x_m - x_n\|_2 \to 0 \quad (m,n \to \infty)$.

2. Лемма. *Каждая $\|\cdot\|_2$-фундаментальная последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ является определяющей для некоторой б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$.*

Доказательство. Пусть $\xi \equiv \lim \widehat{x_n} (\in \mathfrak{H})$. Для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$ существует предел

$$\lim(x_n f, f) = \lim(\pi(x_n)\xi_f, \xi_f) = \lim(\pi'(\xi_f)\widehat{x_n}, \xi_f) = (\pi'(\xi_f)\xi, \xi_f).$$

Следовательно, (x_n) – определяющая последовательность для б. ф.

$$a(f,g) \equiv \lim(x_n f, g) \quad (f,g \in \mathcal{D}_\varphi).$$

3. Лемма. *Пусть $(x_n)(\subset \mathfrak{n}_\varphi)$ – определяющая последовательность для б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ и $\psi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i, f_i) \in \Gamma_\varphi$ $(f_i \in H)$. Тогда $\psi(a) \equiv \lim \psi(x_n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a(f_i, f_i)$, причем ряд в правой части равенства сходится абсолютно.*

Доказательство. Обозначим через π_ψ представление $\mathcal{M}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_\psi$, индуцированное нормальным функционалом ψ, и пусть $\alpha : \mathcal{M} \to \mathfrak{H}_\psi$ – каноническая факторизация. Определим для каждого $m = 1, 2, \ldots$ вектор $\xi_m \in \mathfrak{H}_\psi$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{m}(xf_i, f_i) = (\pi_\psi(x)\xi_m, \xi_m) \quad (x \in \mathcal{M}) \quad (\text{см. [9], III, §1.4}).$$

Все вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются ограниченными справа элементами относительно обобщенной гильбертовой алгебры $\alpha(\mathcal{M})$ и последовательность операторов $(y_m) \subset \pi_\psi(\mathcal{M})'$, определенных условием $y_m\alpha(1) = \xi_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такова, что операторы $y_m^* y_m \to 1$ $(m \to \infty)$ в слабой топологии (ср. [3], доказательство предложения 3). При $m, n \to \infty$ $\psi((x_m - x_n)^*(x_m - x_n)) \to 0$, так как $\psi \leq \lambda\varphi$ для некоторого $\lambda > 0$. Следовательно, существует $\lim \alpha(x_n) \equiv \xi (\in \mathfrak{H}_\psi)$ и для каждого $m = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a(f_i, f_i) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}(x_n f_i, f_i) = \lim_{n\to\infty}(\pi_\psi(x_n)\xi_m, \xi_m) \\ &= \lim_{n\to\infty}(y_m \pi_\psi(x_n)\alpha(1), y_m\alpha(1)) = \lim_{n\to\infty}(\alpha(x_n), y_m^* y_m \alpha(1)) \\ &= (\xi, y_m^* y_m \alpha(1)).\end{aligned}$$

Переходя теперь к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} a(f_i, f_i) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} a(f_i, f_i) = \lim_{m\to\infty} (\xi, y_m^* y_m \alpha(1))$$
$$= (\xi, \alpha(1)) = \lim_{n\to\infty} (\alpha(x_n), \alpha(1)) = \psi(x_n).$$

Лемма доказана.

4. Теорема. *Пусть* $(x_n)(\subset \mathfrak{n}_\varphi)$ *- определяющая последовательность для нулевой б. ф. на* $\mathcal{D}_\varphi$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_2 = 0$.

Доказательство. Пусть $\xi \equiv \lim \widehat{x_n} (\in \mathfrak{H})$. Для каждого вектора $\eta \in \mathfrak{A}_0'$, полагая $\psi = (\pi(\cdot)\eta, \eta)(\in \Gamma_\varphi)$, имеем в силу леммы 3

$$(\pi'(\eta)\xi, \eta) = \lim(\pi'(\eta)\widehat{x_n}, \eta) = \lim(\pi(x_n)\eta, \eta) = \lim \psi(x_n) = 0.$$

Поскольку $\mathfrak{A}'^2$ плотно в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (см., например, [2]), то множество $\{\eta\eta^\flat \mid \eta \in \mathfrak{A}'\}$ тотально в $\mathfrak{H}$. Из выкладки

$$(\xi, \eta\eta^\flat) = (\xi, \pi'(\eta)^*\eta) = (\pi'(\eta)\xi, \eta) = 0$$

теперь следует, что $\xi = 0$. Теорема доказана.

5. Следствие. *Пусть б. ф.* $a, b \in L_2(\varphi)$. *Предел* $\lim \varphi(y_n^* x_n) \equiv (a, b)$ *существует и не зависит от выбора определяющих последовательностей* (x_n) *для* a *и* (y_n) *для* b. *Скалярное произведение* $\{a, b\} \to (a, b)$ *превращает* $L_2(\varphi)$ *в гильбертово пространство изометрически изоморфное* $\mathfrak{H}$.

Будем через $\widehat{\ }): L_2(\varphi) \to \mathfrak{H}$ обозначать изометрический изоморфизм гильбертовых пространств, продолжающий вложение $x(\cdot,\cdot) \to \widehat{x} (x \in \mathfrak{n}_\varphi)$ и пусть $\|a\|_2 \equiv |\widehat{a}|$ $(a \in L_2(\varphi))$. Отметим следующие полезные соотношения, справедливость которых для каждой б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ следует из доказательства леммы 3 и теоремы 4:

$$\psi(a) = (\pi'(\xi_\psi)\widehat{a}, \xi_\psi) \quad (\psi \in \Gamma_\varphi), \tag{1}$$

$$a(f, f) = (\pi'(\xi_f)\widehat{a}, \xi_f) \quad (f \in \mathcal{D}_\varphi). \tag{2}$$

Отображение $\varphi \circ \pi^{-1}$ является точным нормальным полуконечным весом на алгебре Неймана $\pi(\mathcal{M})$, причем линеал веса $\mathcal{D}_{\varphi\circ\pi^{-1}} = \mathfrak{A}_0'$ (см. [5]). Пусть б. ф. $a \in L_2(\varphi)$. Обозначим через a_π б. ф., заданную на линеале веса $\mathcal{D}_{\varphi\circ\pi^{-1}}$ равенством

$$a_\pi(\xi, \eta) = (\pi'(\xi)\widehat{a}, \eta) \quad (\xi, \eta \in \mathcal{D}_{\varphi\circ\pi^{-1}}). \tag{3}$$

Ясно, что соответствие $a \to a_\pi$ устанавливает изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $L_2(\varphi)$ и $L_2(\varphi\circ\pi^{-1})$. Из равенств (1) – (3) непосредственно вытекают следующие соотношения:

$$\psi(a) = a_\pi(\xi_\psi, \xi_\psi) \quad (a \in L_2(\varphi),\ \psi \in \Gamma_\varphi), \tag{4}$$

$$a(f, f) = a_\pi(\xi_f, \xi_f) \quad (a \in L_2(\varphi),\ f \in \mathcal{D}_\varphi). \tag{5}$$

6. Замечание. Пусть θ – еще один точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Тогда гильбертовы пространства $L_2(\varphi)$ и $L_2(\theta)$ изометрически изоморфны. Действительно, в силу основного результата теории обобщенных гильбертовых алгебр ([2], теорема 10.1) и ([9], III, §1, теорема 6) представления алгебры $\mathcal{M}$, индуцированные весами φ и θ, унитарно эквивалентны.

Пусть $L_1(\varphi)$ – банахово пространство интегрируемых относительно веса φ билинейных форм на $\mathcal{D}_\varphi$ (см. [3]). Как и в [3] через $\|\cdot\|_\varphi$ будем обозначать соответствующую норму в $L_1(\varphi)$; напомним, что для б. ф. из $L_1(\varphi)$ вида $y^*x(\cdot,\cdot)$ $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$:

$$\|y^*x(\cdot,\cdot)\|_\varphi \equiv \|y^*x\|_\varphi = \sup_{x' \in \pi(\mathcal{M})',\, \|x'\|=1} |(x'\widehat{x}, \widehat{y})|. \tag{6}$$

Отметим, что б. ф. из $L_1(\varphi) \bigcap L_2(\varphi)$ составляют множество плотное и в $L_1(\varphi)$, и в $L_2(\varphi)$ (так как $\widehat{\mathfrak{m}_\varphi} = \mathfrak{A}^2$ плотно в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ [8]).

7. Предложение. *Если* $\varphi(1) < +\infty$, *то* $L_2(\varphi) \subset L_1(\varphi)$ *и*

$$\|a\|_\varphi \le [\varphi(1)]^{1/2}\|a\|_2 \quad (a \in L_2(\varphi)).$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{M}$, тогда

$$\|x\|_\varphi = \|x^*\|_\varphi = \sup_{x' \in \pi(\mathcal{M})',\, \|x'\|=1} |(x'\,\widehat{1}, \pi(x)\widehat{1})| \le \|1\|_2\,|\pi(x)\widehat{1}| = [\varphi(1)]^{1/2}\|x\|_2.$$

Если б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ и $(x_n)(\subset \mathcal{M})$ – определяющая последовательность для a (в смысле определения 1), то

$$\|x_m - x_n\|_\varphi \le [\varphi(1)]^{1/2}\|x_m - x_n\|_2 \to 0 \quad (m, n \to \infty).$$

Следовательно, $a \in L_1(\varphi)$ и

$$\|a\|_\varphi = \lim \|x_n\|_\varphi \le [\varphi(1)]^{1/2} \lim \|x_n\|_2 = [\varphi(1)]^{1/2}\|a\|_2.$$

Отметим теперь следующую характеризацию ограниченных б. ф. из $L_2(\varphi)$, являющихся аналогами ограниченных интегрируемых с квадратом функций в традиционной схеме интегрирования.

8. Теорема. *Пусть б. ф.* $a \in L_2(\varphi)$. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) a *– ограниченная б. ф. на* $\mathcal{D}_\varphi$;
(ii) $a = x(\cdot,\cdot)$ *для некоторого* $x \in \mathfrak{n}_\varphi$;
(iii) $\widehat{a}$ *– ограниченный слева вектор* $\mathfrak{H}$;
(iv) a_π *– ограниченная б. ф. на* $\mathcal{D}_{\varphi\circ\pi^{-1}}$;
(v) $\sup\{|\psi(a)| \mid \psi \in \Gamma_\varphi, \|\psi\| = 1\} < +\infty$.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (v). Пусть число $\lambda > 0$ такое, что $|a(f,g)| \leq \lambda |f|\,|g|$ $(f,g \in \mathcal{D}_\varphi)$. Если $\psi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i, f_i) \in \Gamma_\varphi$, то в силу леммы 3

$$|\psi(a)| = \Big|\sum_{i=1}^{\infty} a(f_i, f_i)\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a(f_i, f_i)| \leq \lambda \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 = \lambda\|\psi\|.$$

(v) $\Longrightarrow$ (iv). Пусть $\lambda > 0$ такое, что для всех $\psi \in \Gamma_\varphi : |\psi(a)| \leq \lambda\|\psi\|$. Если вектор $\xi \in \mathfrak{A}_0'$, то функционал $\psi = (\pi(\cdot)\xi, \xi) \in \Gamma_\varphi$ и

$$|a_\pi(\xi,\xi)| = |\psi(a)| \leq \lambda\|\psi\| = \lambda|\xi|^2.$$

Следовательно, б. ф. a_π ограничена.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii). Согласно (iv) найдется $\lambda > 0$ такое, что для любых векторов $\xi, \eta \in \mathfrak{A}'$

$$|(\pi'(\xi)\widehat{a}, \eta)| = |a_\pi(\xi,\eta)| \leq \lambda|\xi||\eta|.$$

Отсюда следует, что вектор $\widehat{a}$ ограничен слева.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Так как $\mathfrak{A}_0 = \widehat{\mathfrak{n}_\varphi}$ и $\widehat{\ })\colon \mathfrak{n}_\varphi \to \mathfrak{H}$ – вложение, то найдется оператор $x \in \mathfrak{n}_\varphi$ такой, что $\widehat{a} = \widehat{x}$. Отсюда в силу следствия 5 $a = x(\cdot,\cdot)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Эта импликация очевидна. Теорема доказана.

§3. Классы $L_2^\sharp(\varphi), L_2^э(\varphi)$ и $L_2^+(\varphi)$

Условимся для б. ф. a на $\mathcal{D}_\varphi$ через a^* обозначать б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$, сопряженную к a, то есть

$$a^*(f,g) = \overline{a(g,f)} \quad (f,g \in \mathcal{D}_\varphi).$$

1. Определение. Введем следующие классы билинейных форм на $\mathcal{D}_\varphi$:

$$\begin{aligned} L_2^\sharp(\varphi) &= \{a \in L_2(\varphi) \mid a^* \in L_2(\varphi)\},\\ L_2^э(\varphi) &= \{a \in L_2(\varphi) \mid a = a^*\},\\ L_2^+(\varphi) &= \{a \in L_2(\varphi) \mid a(f,f) \geq 0\,(f \in \mathcal{D}_\varphi)\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $L_2^+(\varphi) \subset L_2^э(\varphi) \subset L_2^\sharp(\varphi)$. Отметим, что б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$ принадлежит $L_2^\sharp(\varphi)$ тогда и только тогда, когда эрмитовы билинейные формы

$$a_R \equiv \frac{a + a^*}{2} \ \text{ и } \ a_I \equiv \frac{a - a^*}{2i}$$

принадлежат $L_2^э(\varphi)$.

2. Теорема. *Для б. ф.* $a \in L_2(\varphi)$ *утверждения* (i) *и* (ii) (*соответственно,* (i$'$) *и* (ii$'$), (i$''$) *и* (ii$''$)) *эквивалентны.*

$$\begin{array}{ll} \text{(i) } a \in L_2^\sharp(\varphi), & \text{(ii) } \widehat{a} \in D^\sharp \quad (\textit{При этом } \widehat{a}^\sharp = \widehat{a^*}\ (a \in L_2^\sharp(\varphi)).).\\ \text{(i}'\text{) } a \in L_2^э(\varphi), & \text{(ii}'\text{) } \widehat{a} \in D^\sharp \textit{ и } \widehat{a}^\sharp = \widehat{a}.\\ \text{(i}''\text{) } a \in L_2^+(\varphi), & \text{(ii}''\text{) } \widehat{a} \in P^\sharp. \end{array}$$

(Здесь $P^\sharp$ – замыкание множества векторов $\{\xi\xi^\sharp \mid \xi \in \mathfrak{A}\}$ – конус положительных элементов $\mathfrak{H}$ относительно обобщенной гильбертовой алгебры $\mathfrak{A}$, введенный Пердризе [12].)

3. Лемма. *Б. ф. a из $L_2(\varphi)$ принадлежит $L_2^\sharp(\varphi)$ (соответственно, $L_2^э(\varphi)$, $L_2^+(\varphi)$) тогда и только тогда, когда б. ф. a_π принадлежит $L_2^\sharp(\varphi\circ\pi^{-1})$ (соответственно, $L_2^э(\varphi\circ\pi^{-1}), L_2^+(\varphi\circ\pi^{-1})$), причем $(a_\pi)^* = a_\pi^*$ $(a \in L_2^\sharp(\varphi))$.*

Доказательство леммы 3 сразу следует из равенств (1) – (5), установленных в §2.

Доказательство теоремы 2. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть б. ф. $a \in L_2^\sharp(\varphi)$, тогда по лемме 3: $a_\pi \in L_2^\sharp(\varphi\circ\pi^{-1})$ и $(a_\pi)^* = a_\pi^*$. Следовательно, для любых $\xi,\eta \in \mathfrak{A}'$

$$\begin{aligned}(\widehat{a}, \eta\xi^\flat) &= (\widehat{a}, \pi'(\xi)^*\eta) = (\pi'(\xi)\widehat{a}, \eta) = a_\pi(\xi,\eta) = \overline{a_\pi^*(\eta,\xi)}\\ &= (\xi, \pi'(\eta)\widehat{a^*}) = (\pi'(\eta)^*\xi, \widehat{a^*}) = (\xi\eta^\flat, \widehat{a^*}).\end{aligned}$$

Так как $\mathfrak{A}'^2$ является существенной областью определения оператора S^* (см., например, [13]), то из предыдущей выкладки следует, что $\widehat{a} \in D^\sharp$ и $\widehat{a}^\sharp = \widehat{a^*}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ такова, что $\widehat{a} \in D^\sharp$. Если вектора $\xi,\eta \in \mathfrak{A}'_0 = \mathcal{D}_{\varphi\circ\pi^{-1}}$, то, учитывая, что вектор $\pi'(\eta)^*\xi \in D^\flat$ и $(\pi'(\eta)^*\xi)^\flat = \pi'(\xi)^*\eta$ (см. [8], доказательство леммы 2.4), имеем:

$$\overline{a_\pi(\eta,\xi)} = (\xi, \pi'(\eta)\widehat{a}) = (\pi'(\eta)^*, \widehat{a}) = (\widehat{a}^\sharp, \pi'(\xi)^*\eta) = (\pi'(\xi)\widehat{a}^\sharp, \eta).$$

Отсюда следует, что б. ф. $(a_\pi)^* \in L_2(\varphi\circ\pi^{-1})$ и, значит, по лемме 3 б. ф. $a \in L_2^\sharp(\varphi)$.

(i$'$) $\Longleftrightarrow$ (ii$''$). Равносильность этих утверждений следует из леммы 3 и уже установленного равенства $\widehat{a}^\sharp = \widehat{a^*}$ $(a \in L_2^\sharp(\varphi))$.

(i$''$) $\Longrightarrow$ (ii$''$). Если б. ф. $a \in L_2^+(\varphi)$, то по лемме 3 б. ф. $a_\pi \in L_2^+(\varphi\circ\pi^{-1})$ и, следовательно, для каждого $\xi \in \mathfrak{A}'$

$$(\widehat{a}, \xi\xi^\flat) = (\widehat{a}, \pi'(\xi)^*\xi) = (\pi'(\xi)\widehat{a}, \xi) = a_\pi(\xi,\xi) \geq 0.$$

Отсюда в силу [12] (предложение 2.5) $\widehat{a} \in P^\sharp$.

(ii$'$) $\Longrightarrow$ (i$'$). Пусть вектор $\xi \in \mathfrak{A}'_0$ и $\pi'(\xi) = ux$ – полярное разложение оператора $\pi'(\xi) \in \pi(\mathcal{M})'$. Положим $\eta = u^*\xi$. Согласно [8] (лемма 2.4) $\eta \in \mathfrak{A}'$ и оператор $\pi'(\eta) = u^*\pi'(\xi)$. Следовательно,

$$\eta\eta^\flat = \pi'(\eta)^*\eta = \pi'(\eta)^*u^*u\eta = \pi'(u\eta)^*u\eta = \pi'(\xi)^*\xi.$$

Таким образом, в силу [12] (предложение 2.5)

$$a_\pi(\xi,\xi) = (\pi'(\xi)\widehat{a}, \xi) = (\widehat{a}, \pi'(\xi)^*\xi) = (\widehat{a}, \eta\eta^\flat) \geq 0.$$

Отсюда б. ф. $a_\pi \in L_2^+(\varphi\circ\pi^{-1})$, так что по лемме 3 б. ф. $a \in L_2^+(\varphi)$. Теорема доказана.

Справедливость утверждений следствий 4 – 6 вытекает из соответствующих свойств линеала $D^\sharp$ и замкнутого выпуклого конуса положительных элементов $P^\sharp(\subset \mathfrak{H})$ (см. [12]).

4. Следствие. *Заданная на $\mathcal{D}_\varphi$ б. ф. a принадлежит $L_2^\sharp(\varphi)$ в том и только том случае, когда существует такая определяющая a последовательность операторов $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*$, что последовательность (x_n^*) является определяющей для б. ф. a^*; в частности, $a \in L_2^\flat(\varphi)$ тогда и только тогда, когда для a найдется определяющая последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi^\flat$.*

5. Следствие. *Для б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $a \in L_2^+(\varphi)$,

(ii) *существует определяющая a последовательность из $\mathfrak{n}_\varphi^+$,*

(iii) *существует определяющая a последовательность из $\mathfrak{m}_\varphi^+$.*

6. Следствие. *Множество $L_2^\sharp(\varphi)$ (соответственно, $L_2^\flat(\varphi)$) совпадает с комплексной (соответственно, вещественной) линейной оболочкой замкнутого выпуклого конуса $L_2^+(\varphi)$.*

7. Замечание. Отметим, что включение $L_2^\sharp(\varphi) \subset L_2(\varphi)$ в общем случае является строгим, так как, вообще говоря, $D^\sharp \neq \mathfrak{H}$ (см. [12], 5.7).

§4. Представление билинейных форм из $L_2(\varphi)$ с помощью операторов

Если A – линейный оператор в гильбертовом пространстве H такой, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(A)$, то будем через $A(\cdot,\cdot)$ обозначать б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$, определенную равенством

$$A(f,g) = (Af,g) \quad (f,g \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Отметим, что если линеал $\mathcal{D}_\varphi$ является существенной областью определения замкнутых операторов A и B, то равенство б. ф. $A(\cdot,\cdot) = B(\cdot,\cdot)$ возможно, в силу плотности $\mathcal{D}_\varphi$, только в том случае, если $A = B$.

1. Определение. Будем говорить, что б. ф. a на $\mathcal{D}_\varphi$ *определяется оператором*, если найдется такой замкнутый оператор A в H, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(A)$ и $a = A(\cdot,\cdot)$; в этом случае через $\Lambda(a)$ будем обозначать наименьший среди таких операторов (т. е. $\Lambda(a)$ – единственный замкнутый оператор в H с существенной областью определения $\mathcal{D}_\varphi$ такой, что $a = \Lambda(a)(\cdot,\cdot)$).

Займемся теперь вопросом о том, какие билинейные формы из $L_2(\varphi)$ определяются операторами. Сделаем в связи с этим, прежде всего, следующее замечание.

2. Замечание. В общем случае существуют б. ф. из $L_2(\varphi)$, не сводящиеся к операторам в смысле определения 1. Действительно, нетрудно видеть, что б. ф. $a_\pi \in L_2(\varphi \circ \pi^{-1})$ $(a \in L_2(\varphi))$ определяется оператором тогда и только тогда, когда в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ предзамкнуто отображение $\xi \to \pi'(\xi)\widehat{a}$ $(\xi \in \mathfrak{A}')$. Однако Пердризе ([12], 5.7) привел пример совершенной гильбертовой алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что в $\mathfrak{H}$ (пополнении $\mathfrak{A}$) существует вектор η, для которого отображение $\xi \to \pi'(\xi)\eta$ $(\xi \in \mathfrak{A}')$ не замыкаемо.

3. Предложение. *Пусть б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ определяется оператором. Тогда оператор $\Lambda(a)$ присоединен к $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Также как в [4] (лемма 3) нетрудно убедиться в том, что линеал $\mathcal{D}_\varphi$ инвариантен относительно алгебры $\mathcal{M}'$. Теперь заметим, что для каждой б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ и унитарного оператора $u \in \mathcal{M}'$

$$a(uf, ug) = a(f, g) \quad (f, g \in \mathcal{D}_\varphi). \qquad (*)$$

Действительно, если $(x_n)(\subset \mathfrak{n}_\varphi)$ – определяющая последовательность для a и $f, g \in \mathcal{D}_\varphi$, то

$$a(uf, ug) = \lim_{n\to\infty}(x_n uf, ug) = \lim_{n\to\infty}(u^* x_n uf, g) = \lim_{n\to\infty}(x_n f, g) = a(f, g).$$

Пусть б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ определяется оператором. Для любого унитарного оператора $u \in \mathcal{M}'$ и $f \in \mathcal{D}_\varphi$: $\Lambda(a)uf = u\Lambda(a)f$. Это следует из выкладки, справедливой в силу $(*)$ для каждого вектора $g \in \mathcal{D}_\varphi$:

$$(\Lambda(a)uf, g) = a(uf, g) = a(f, u^*g) = (\Lambda(a)f, u^*g) = (u\Lambda(a)f, g).$$

Если вектор $f \in \mathcal{D}_\varphi$, то, выбирая последовательность $(f_n) \subset \mathcal{D}_\varphi$ таким образом, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda(a)f_n = \Lambda(a)f$, имеем для любого унитарного $u \in \mathcal{M}'$:

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(a)uf_n = \lim_{n\to\infty} u\Lambda(a)f_n = u\Lambda(a)f.$$

Отсюда следует, что $uf \in D(\Lambda(a))$ и $\Lambda(a)uf = u\Lambda(a)f$. Тем самым доказано, что оператор $\Lambda(a)$ присоединен к $\mathcal{M}$.

4. Теорема. *Каждая б. ф. a из $L_2^\sharp(\varphi)$ определяется оператором, причем $\Lambda(a) \subset \Lambda(a^*)^*$.*

5. Лемма. *Каждая б. ф. a из $L_2^+(\varphi)$ определяется оператором.*

Доказательство. В силу теоремы 2 из §3 вектор $\widehat{a} \in P^\sharp$. Согласно [12] (предложение 2.5) в таком случае отображение $\xi \to \pi'(\xi)\widehat{a}$ $(\xi \in \mathfrak{A}')$ предзамкнуто и оператор $\pi(\widehat{a})$, являющийся замыканием этого отображения, положителен и присоединен к алгебре $\pi(\mathcal{M})$. Обозначим через h расширение по Фридрихсу положительного оператора $\pi(\widehat{a})$; из конструкции этого расширения нетрудно усмотреть, что и оператор h присоединен к $\mathcal{M}$. Таким образом, если $h = \int\limits_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$ – спектральное представление h, то все проектора $E(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ из разложения единицы оператора h принадлежат $\pi(\mathcal{M})$. Полагая $E'(\lambda) = \pi^{-1}(E(\lambda))$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, получим, очевидно, некоторое разложение единицы $(E'(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ и, следовательно, можно определить положительный самосопряженный оператор $A \equiv \int\limits_0^\infty \lambda\, dE'(\lambda)$, присоединенный к $\mathcal{M}$. Проверим, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(A)$. Если вектор $f \in \mathcal{D}_\varphi$, то, вспоминая определение вектора $\xi_f \in \mathfrak{A}'$ из §1, сопоставляемого f, имеем

$$(E'(\lambda)f, f) = (E(\lambda)\xi_f, \xi_f) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

С учетом включения $\mathfrak{A}' \subset D(h)$ отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \lambda^2 \, d(E'(\lambda)f, f) = \int_0^\infty \lambda^2 \, d(E(\lambda)\xi_f, \xi_f) < +\infty.$$

Таким образом, вектор $f \in D(A)$. Установим теперь равенство б. ф. $a = A(\cdot, \cdot)$. Действительно, для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$:

$$\begin{aligned} a(f,f) &= (\pi'(\xi_f)\widehat{a}, \xi_f) = (h\xi_f, \xi_f) \\ &= \int_0^\infty \lambda \, d(E(\lambda)\xi_f, \xi_f) = \int_0^\infty \lambda \, d(E'(\lambda)f, f) = (Af, f). \end{aligned}$$

В силу поляризационного тождества отсюда следует, что $a = A(\cdot, \cdot)$, так что б. ф. a определяется оператором.

Доказательство теоремы 4. Пусть б. ф. $a \in L_2^\sharp(\varphi)$ представлена в виде $a = a_1 - a_2 + ia_3 - ia_4$, где б. ф. $a_k \in L_2^+(\varphi)$ $(k = 1,2,3,4)$ (возможность такого представления вытекает из следствия 6 §3). В силу леммы 5 найдутся замкнутые операторы A_k в H такие, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(A_k)$ и $a_k = A_k(\cdot, \cdot)$ $(k = 1,2,3,4)$. Определим теперь оператор A в H следующим образом:

$$\mathcal{D}_\varphi = D(A), \; Af = A_1 f - A_2 f + iA_3 f - iA_4 f \quad (f \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Нетрудно заметить, что б. ф. $a = A(\cdot, \cdot)$. Покажем, что оператор A предзамкнут. Для этого, заменяя в предыдущем рассуждении б. ф. a на б. ф. $a^* (\in L_2^\sharp(\varphi))$, определим такой оператор B в H, что $\mathcal{D}_\varphi = D(B)$ и $a^* = B(\cdot, \cdot)$. Тогда для любых векторов $f, g \in \mathcal{D}_\varphi$

$$(Af, g) = a(f, g) = \overline{a^*(g, f)} = \overline{(Bg, f)} = (f, Bg).$$

Из предыдущей выкладки следует включение $A \subset B^*$, показывающее предзамкнутость оператора A. Из этого включения следует, что $\Lambda(a) = \overline{A} \subset B^* = (\overline{B})^* = \Lambda(a^*)^*$. Теорема доказана.

6. Следствие. *Пусть б. ф. $a \in L_2^\sharp(\varphi)$. Тогда $a \in L_2^з(\varphi)$ (соответственно, $L_2^+(\varphi)$) в том и только том случае, когда оператор $\Lambda(a)$ симметричен (соответственно, положителен).*

7. Следствие. *Для каждой б. ф. $a \in L_2^+(\varphi)$ существует такой положительный самосопряженный оператор A, присоединенный к $\mathcal{M}$, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(A)$ и $a = A(\cdot, \cdot)$.*

8. Замечание. Отметим, что в общем случае для б. ф. $a \in L_2^\sharp(\varphi)$ оператор $\Lambda(a) \neq \Lambda(a^*)^*$ и оператор A в следствии 7 может определяться по б. ф. $a \in L_2^+(\varphi)$ не единственным образом. Это следует из соответствующих примеров Пердризе ([12], 5.7) с учетом легко проверяемого замечания о том, что для б. ф. $a_\pi \in L_2(\varphi \circ \pi^{-1})$ $(a \in L_2^\sharp(\varphi))$ оператор $\Lambda(a_\pi)$ в $\mathfrak{H}$ совпадает с замыканием отображения $\xi \to \pi'(\xi)\widehat{a}$ $(\xi \in \mathfrak{A}')$.

9. Замечание. Класс б. ф. из $L_2(\varphi)$, определяемых операторами, вообще говоря, шире, чем $L_2^\sharp(\varphi)$, так как последний класс в общем случае уже не содержит всех б. ф. вида $x(\cdot,\cdot)$ $(x \in \mathfrak{n}_\varphi)$, поскольку, вообще говоря, $\widehat{\mathfrak{n}_\varphi} \equiv \mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{A}$ (по поводу последнего неравенства см., например, [12], 5.6).

Следующее предложение устанавливает критерий принадлежности классу $L_2^\sharp(\varphi)$ б. ф. из $L_2(\varphi)$, определяемой оператором.

10. Предложение. *Пусть б. ф. a из $L_2(\varphi)$ определяется оператором. Тогда $a \in L_2^\sharp(\varphi)$ в том и только том случае, когда $\mathcal{D}_\varphi \subset D(\Lambda(a)^*)$ и б. ф. $\Lambda(a)^*(\cdot,\cdot) \in L_2(\varphi)$.*

Доказательство. Необходимость условий без труда следует из теоремы 4. Покажем достаточность. Если вектора $f, g \in \mathcal{D}_\varphi$, то

$$a^*(f,g) = \overline{a(g,f)} = \overline{(\Lambda(a)g,f)} = (f,\Lambda(a)g) = (\Lambda(a)^*f,g) = \Lambda(a)^*(f,g).$$

Отсюда следует, что б. ф. $a^* = \Lambda(a)^*(\cdot,\cdot) \in L_2(\varphi)$, так что б. ф. $a \in L_2^\sharp(\varphi)$.

§5. Случай следа: связь с теорией Сигала

В этом параграфе мы будем предполагать, что $\varphi \equiv \tau$ является точным нормальным полуконечным следом на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. В этом случае модулярный оператор $\Delta = 1$, $D^\sharp = \mathfrak{H}$ и, следовательно, $L_2^\sharp(\tau) = L_2(\tau)$. В силу теоремы 4 из §4 все б. ф. из $L_2(\tau)$ определяются операторами. Мы покажем, что класс операторов вида $\Lambda(a)$ $(a \in L_2(\tau))$ совпадает с $\mathcal{L}_2(\tau)$ – множеством операторов, интегрируемых с квадратом относительно меры на проекторах алгебры $\mathcal{M}$, определенной следом τ (см. Сигал [1], определение 3.7).

1. Теорема. *Отображение $a \to \Lambda(a)$ является изометрическим изоморфизмом гильбертова пространства $L_2(\tau)$ на гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\tau)$, причем $\Lambda(a^*) = \Lambda(a)^*$ $(a \in L_2(\tau))$.*

2. Лемма. *Пусть оператор $A \in \mathcal{L}_2(\tau)$. Тогда $\mathcal{D}_\tau \subset D(A)$ и б. ф. $A(\cdot,\cdot) \in L_2(\tau)$.*

Доказательство. Пусть $A = U|A|$ – полярное разложение оператора A и $|A| = \int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$ – спектральное представление положительного самосопряженного оператора $|A|$, присоединенного к $\mathcal{M}$. Отметим, что в силу [1] (следствие 12.13)

$$\|A\|_2^2 = \|\,|A|\,\|_2^2 = \int_0^\infty \lambda^2\, d\tau(E(\lambda)) < +\infty.$$

(Здесь через $\|\cdot\|_2$ обозначена норма оператора в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\tau)$, для операторов из $\mathfrak{n}_\tau$ это обозначение, очевидно, согласуется с введенным в §1 определением $\|\cdot\|_2$). Если вектор $f \in \mathcal{D}_\tau$, то найдется число $C > 0$ такое, что $(E(\lambda)f,f) \le C\tau(E(\lambda))$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ и, следовательно,

$$\int_0^\infty \lambda^2\, d(E(\lambda)f,f) \le C \int_0^\infty \lambda^2\, d\tau(E(\lambda)) < +\infty.$$

Таким образом $f \in D(|A|) \equiv D(A)$, так что $\mathcal{D}_\tau \subset D(A)$. Определим теперь операторы $h_n = \int\limits_0^n \lambda\, dE(\lambda)$ и $x_n = Uh_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Поскольку $\tau(h_n^2) = \int\limits_0^n \lambda^2\, d\tau(E(\lambda)) < +\infty$, то $h_n \in \mathfrak{n}_\tau$ и, следовательно, $x_n = Uh_n \in \mathfrak{n}_\tau$ $(n = 1, 2, \dots)$. Покажем, что последовательность $(x_n)(\subset \mathfrak{n}_\tau)$ является определяющей для б. ф. $A(\cdot,\cdot)$. Действительно, если $m, n \to \infty$, то

$$\|x_m - x_n\|_2^2 = \|U(h_m - h_n)\|_2^2 = \|h_m - h_n\|_2^2 = \left|\int\limits_m^n \lambda^2 d\tau(E(\lambda))\right| \to 0.$$

Для каждого вектора $f \in \mathcal{D}_\tau$:

$$(Af, f) = (U|A|f, f) = (|A|f, U^* f) = \lim_{n\to\infty}(h_n f, U^* f) = \lim_{n\to\infty}(Uh_n f, f)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(x_n f, f).$$

Таким образом, требования (i) и (ii) определения 1 из §2 выполнены и, следовательно, б. ф. $A(\cdot,\cdot) \in L_2(\tau)$.

3. Лемма. *Пусть оператор A в гильбертовом пространстве H, измеримый относительно алгебры $\mathcal{M}$ (в смысле* [1], *определение* 2.1), *таков, что $\mathcal{D}_\tau \subset D(A)$ и б. ф. $A(\cdot,\cdot) \in L_2(\tau)$. Тогда $A = \Lambda(A(\cdot,\cdot))$.*

Доказательство. Замкнутый оператор $(\Lambda(A(\cdot,\cdot)))^*$ присоединен к алгебре $\mathcal{M}$ вследствие предложения 3 из §3. Из включения $\Lambda(A(\cdot,\cdot)) \subset A$ следует включение $(\Lambda(A(\cdot,\cdot)))^* \supset A^*$, показывающее, что область определения оператора $(\Lambda(A(\cdot,\cdot)))^*$ содержит сильно плотное множество $D(A^*)$ (в силу [1], теорема 4, оператор A^* измерим). Отсюда следует, что оператор $(\Lambda(A(\cdot,\cdot)))^*$ измерим, так что в силу [1] (следствие 5.1) $(\Lambda(A(\cdot,\cdot)))^* = A^*$. Учитывая замкнутость операторов $\Lambda(A(\cdot,\cdot))$ и A получаем, наконец, равенство $A = \Lambda(A(\cdot,\cdot))$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим отображение $\rho : \mathcal{L}_2(\tau) \to L_2(\tau)$, корректно определенное в силу леммы 2 равенством $\rho(A) = A(\cdot,\cdot)$ $(A \in \mathcal{L}_2(\tau))$. Ясно, что отображение ρ линейно (сумма в $\mathcal{L}_2(\tau)$ понимается в сильном смысле ([1], определение 2.2)). Покажем, что ρ – изометрия. Действительно, если $A \in \mathcal{L}_2(\tau)$ и последовательность операторов $(x_n)(\subset \mathfrak{n}_\tau)$ определена как при доказательстве леммы 2, то

$$\|\rho(A)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_2 = \|A\|_2.$$

Учитывая, что ρ переводит плотное в $\mathcal{L}_2(\tau)$ множество операторов $\mathfrak{n}_\tau$ на плотное в $L_2(\tau)$ множество б. ф. вида $x(\cdot,\cdot)$ $(x \in \mathfrak{n}_\tau)$, делаем вывод о том, что ρ является изометрическим изоморфизмом гильбертовых пространств. Равенство $A = \Lambda(\rho(A))$ $(A \in \mathcal{L}_2(\tau))$, справедливое в силу леммы 3, показывает, что отображение $a \to \Lambda(a)$ $(a \in L_2(\tau))$ является обратным к ρ и, следовательно, устанавливает изометрический изоморфизм $L_2(\tau)$ на $\mathcal{L}_2(\tau)$. Для каждой б. ф. $a \in L_2(\tau)$ по теореме 4 из §4 справедливо включение $\Lambda(a^*) \subset \Lambda(a)^*$. Оба оператора $\Lambda(a^*)$ и $\Lambda(a)^*$ принадлежат $\mathcal{L}_2(\tau)$ и, в частности, измеримы. Равенство $\Lambda(a^*) = \Lambda(a)^*$ теперь следует из [1] (следствие 5.1). Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет нам предложить новое описание операторов класса $\mathcal{L}_2(\tau)$, не связанное с понятием измеримости.

4. Следствие. *Замкнутый оператор A в гильбертовом пространстве H интегрируем с квадратом относительно следа τ тогда и только тогда, когда линеал $\mathcal{D}_\tau$ является его существенной областью определения и б. ф. $A(\cdot,\cdot)$ принадлежит $L_2(\tau)$.*

Рассмотрим теперь вопрос о связи между банаховым пространством $L_1(\tau)$ билинейных форм, интегрируемых относительно следа τ (см. [3]), и банаховым пространством $\mathcal{L}_1(\tau)$ интегрируемых относительно τ операторов (см. [1]). Отметим, прежде всего, что отображение $x \to x(\cdot,\cdot)$ $(x \in \mathfrak{m}_\tau)$ изометрически переводит плотное в $\mathcal{L}_1(\tau)$ множество операторов $\mathfrak{m}_\tau$ на плотное в $L_1(\tau)$ множество б. ф. (равенство $\|x\|_1 = \|x\|_\tau$ $(x \in \mathfrak{m}_\tau)$ непосредственно следует из соотношения (6) §2 и определения нормы $\|\cdot\|_1$ банахова пространства $\mathcal{L}_1(\tau)$). Обозначим через $\varkappa\colon \mathcal{L}_1(\tau) \to L_1(\tau)$ изометрический изоморфизм банаховых пространств, продолжающий это отображение. Следующая теорема дает простой способ определения б. ф. $\varkappa(a)$ по оператору $A = C^* \circ B \in \mathcal{L}_1(\tau)$, где операторы $B, C \in \mathcal{L}_2(\tau)$ (здесь через $C^* \circ B$ обозначено сильное произведение двух измеримых операторов в смысле [1]).

5. Теорема. *Пусть операторы $B, C \in \mathcal{L}_2(\tau)$. Тогда $\varkappa(C^* \circ B)(f,g) = (Bf, Cg)$ $(f, g \in \mathcal{D}_\tau)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma\colon L_1(\tau) \to \mathcal{M}_*$ – канонический изоморфизм банаховых пространств, определенный в [3]. Отметим, что для каждого оператора $A \in \mathcal{L}_1(\tau)$

$$\gamma(\varkappa(A))(x) = \tau(Ax) \quad (x \in \mathcal{M}). \tag{7}$$

Действительно, справедливость равенства (7) для $A \in \mathfrak{m}_\tau$ сразу следует из определения отображения γ, общий случай получается путем предельного перехода. Определим теперь две последовательности операторов (x_n) и (y_n) из $\mathfrak{n}_\tau$, являющиеся определяющими для б. ф. $b \equiv B(\cdot,\cdot)$ и $c \equiv C(\cdot,\cdot)$ соответственно, такие, что $x_n f \to Bf$ и $y_n f \to Cf$ при $n \to \infty$ для каждого $f \in \mathcal{D}_\tau$. Далее нам понадобятся следующие соотношения:

$$\tau(C^* \circ B) = (b, c), \tag{8}$$

$$x \circ \widehat{C^*(\cdot,\cdot)} = \pi(x)\widehat{c^*} = \pi(x)J\widehat{c}. \tag{9}$$

Равенство (8) здесь следует из теоремы 1, а для доказательства (9) достаточно заметить, что последовательность $xy_n^* (\subset \mathfrak{n}_\tau)$ является определяющей для б. ф. $x \circ C^*(\cdot,\cdot)$. Пусть теперь $f \in \mathcal{D}_\tau$ и оператор $x \equiv \pi^{-1}(J\pi'(\xi_f)^*\pi'(\xi_f)J)$. Следующая выкладка справедлива в силу предложения 5 работы [3] и равенств (7) – (9):

$$\begin{aligned}
\varkappa(C^* \circ B)(f,f) &= \gamma(\varkappa(C^* \circ B))(x) = \tau(C^* \circ Bx) = \tau(x \circ C^* \circ B) \\
&= (\pi(x)J\widehat{c}, J\widehat{b}) = (J\pi'(\xi_f)^*\pi'(\xi_f)JJ\widehat{c}, J\widehat{b}) \\
&= (\pi'(\xi_f)\widehat{b}, \pi'(\xi_f)\widehat{c}) = \lim_{n\to\infty}(\pi'(\xi_f)\widehat{x_n}, \pi'(\xi_f)\widehat{y_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty}(\pi(y_n^* x_n)\xi_f, \xi_f) = \lim_{n\to\infty}(y_n^* x_n f, f) = \lim_{n\to\infty}(x_n f, y_n f) \\
&= (Bf, Cf).
\end{aligned}$$

Утверждение теоремы теперь следует из поляризационного тождества.

6. Следствие. *Пусть б. ф. $a \in L_1(\tau)$. Существует, притом единственный, оператор $A \in \mathcal{L}_1(\tau)$ такой, что*

$$a(f,g) = (|A|^{1/2} f, |A|^{1/2} U^* g) \quad (f, g \in \mathcal{D}_\tau),$$

где $A = U|A|$ – полярное разложение A.

7. Следствие. *Пусть A – замкнутый плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, присоединенный к $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $A \in \mathcal{L}_2(\tau)$,
(ii) $\mathcal{D}_\tau \subset D(A)$ *и б. ф.* $(A(\cdot), A(\cdot))$ *на* $\mathcal{D}_\tau$ *принадлежит* $L_1(\tau)$.

§6. Случай конечной алгебры Неймана

В этом разделе мы установим, что в случае конечной алгебры Неймана $\mathcal{M}$ и конечного веса φ все билинейные формы из $L_2(\varphi)$ определяются операторами, класс которых составляет гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\mathcal{M}, \varphi)$, введенное Даем [10].

1. Теорема. *Пусть $\mathcal{M}$ – конечная алгебра Неймана и φ – точный нормальный положительный функционал на $\mathcal{M}$. Тогда каждая б. ф. из $L_2(\varphi)$ определяется оператором.*

Доказательство. Пусть б. ф. $a \in L_2(\varphi)$. Так как множество векторов вида $\pi(x)\widehat{1}$ $(x \in \mathcal{M})$ плотно в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то в силу BT-теоремы ([11], лемма 9.2.1) $\widehat{a} = BT\widehat{1}$, где $B \in \pi(\mathcal{M})$, а T – замкнутый плотно определенный оператор в $\mathfrak{H}$, присоединенный к $\pi(\mathcal{M})$. Заметим теперь, что множество замкнутых плотно определенных операторов, присоединенных к конечной алгебре Неймана, образует алгебру относительно операций сильной суммы и произведения (см. [1], впрочем, в дополнительном предположении о σ-конечности алгебры Неймана, которое в нашем случае выполняется, этот факт, как отмечено в [10], непосредственно следует из [11] (стр. 221–229)). Таким образом, в $\mathfrak{H}$ существует замкнутый плотно определенный оператор A, присоединенный к $\pi(\mathcal{M})$, такой, что $\widehat{a} = A\widehat{1}$. Пусть $A = U|A|$ – полярное разложение этого оператора и $|A| = \int\limits_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$ – спектральное представление оператора $|A| \equiv (A^*A)^{1/2}$. Полагая $E'(\lambda) = \pi^{-1}(E(\lambda))$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, определим таким образом некоторое разложение единицы $E'(\lambda)$ и, следовательно, положительный самосопряженный оператор $h \equiv \int\limits_0^\infty \lambda\, dE'(\lambda)$ присоединен к $\mathcal{M}$. Покажем, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(h)$. Действительно, для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$, вспоминая определение вектора $\xi_f \in \pi(\mathcal{M})'\,\widehat{1}$, имеем

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2\, d(E'(\lambda)f, f) = \int\limits_0^\infty \lambda^2\, d(E(\lambda)\xi_f, \xi_f) < +\infty.$$

Последнее неравенство здесь следует из включения $\pi(\mathcal{M})'\,\widehat{1} \subset D(A) \equiv D(|A|)$. Определим теперь оператор A' в H как замыкание произведения $\pi^{-1}(U)h$. В силу сделанного выше замечания оператор A' корректно определен, плотно задан и присоединен к $\mathcal{M}$. Кроме того, $\mathcal{D}_\varphi \subset D(h) \subset D(A')$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ положим $x_n = U \int\limits_0^n \lambda\, dE(\lambda)$ и $x'_n = \pi^{-1}(U) \int\limits_0^n \lambda\, dE'(\lambda)$. Нетрудно видеть, что $\pi(x_n) = x'_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ и для каждого $\xi \in D(A)$ (соответственно, $f \in D(h)$) $x_n\xi \to A\xi$ (соответственно, $x'_n f \to A'f$) при $n \to \infty$. В таком случае для любого $f \in \mathcal{D}_\varphi$

$$\begin{aligned} a(f,f) &= (\pi'(\xi_f)\widehat{a}, \xi_f) = (\pi'(\xi_f)A\widehat{1}, \xi_f) = (A\pi'(\xi_f)\widehat{1}, \xi_f) = (A\xi_f, \xi_f) \\ &= \lim_{n\to\infty}(x_n\xi_f, \xi_f) = \lim_{n\to\infty}(x'_n f, f) = (A'f, f). \end{aligned}$$

Из поляризационного тождества теперь следует, что $a = A'(\cdot,\cdot)$. Теорема доказана.

2. Следствие. *Если, в предположениях теоремы 1,* $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i, f_i)$ $(f_i \in H)$, *то для любых* $a, b \in L_2(\varphi)$

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty}(\Lambda(a)f_i, \Lambda(b)f_i),$$

причем ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Доказательство. Используя конструкцию, приведенную при доказательстве теоремы 1, определим две последовательности (x_n) и (y_n) операторов из $\mathcal{M}$ таким образом, чтобы

$$x_n f \to \Lambda(a)f, \quad y_n f \to \Lambda(b)f \quad (f \in \mathcal{D}_\varphi)$$

и

$$\pi(x_n)\xi \to \pi'(\xi)\widehat{a}, \quad \pi(y_n)\xi \to \pi'(\xi)\widehat{b} \quad (\xi \in \pi(\mathcal{M})'\,\widehat{1}).$$

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ определим вектор $\xi_m \in \pi(\mathcal{M})'\,\widehat{1}$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{m}(xf_i, f_i) = (\pi(x)\xi_m, \xi_m) \quad (x \in \mathcal{M}).$$

В таком случае при любом $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}(\Lambda(a)f_i, \Lambda(b)f_i) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}(x_n f_i, f_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}(y_n^* x_n f_i, f_i) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\pi(y_n^* x_n)\xi_m, \xi_m) = \lim_{n\to\infty}(\pi(x_n)\xi_f, \pi(y_n)\xi_m) \\ &= (\pi'(\xi_m)\widehat{a}, \pi'(\xi_m)\widehat{b}) = (\pi'(\xi_m)^*\pi'(\xi_m)\widehat{a}, \widehat{b}). \end{aligned}$$

Переходя теперь к пределу при $m \to \infty$ и учитывая, что $\pi'(\xi_m)^*\pi'(\xi_m) \to 1$ слабо, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\Lambda(a)f_i, \Lambda(b)f_i) = \lim_{m\to\infty}(\pi'(\xi_m)^*\pi'(\xi_m)\widehat{a}, \widehat{b}) = (\widehat{a}, \widehat{b}) = (a,b).$$

Следствие доказано.

3. Предложение. *Пусть* $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i, f_i)$ $(f_i \in H)$ – *точный нормальный положительный функционал на конечной алгебре Неймана* $\mathcal{M}$. *Для замкнутого плотно определенного оператора* A, *присоединенного к* $\mathcal{M}$, *следующие условия эквивалентны:*

(i) $f_i \in D(A)$ $(i = 1, 2, \dots)$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |Af_i|^2 < +\infty$,

(ii) $\mathcal{D}_\varphi \subset D(A)$ *и б. ф.* $A(\cdot,\cdot) \in L_2(\varphi)$.

При выполнении этих условий $\Lambda(A(\cdot,\cdot)) = A$.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть $A = U|A|$ – полярное разложение оператора A и $|A| = \int\limits_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$ – спектральное представление оператора $|A| \equiv (A^*A)^{1/2}$. Определим в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ оператор A' как замыкание произведения $\pi(U)\int\limits_0^\infty \lambda\, d\pi(E(\lambda))$. В силу замечания, сделанного при доказательстве теоремы 1, этот оператор корректно определен, плотно задан и присоединен к $\pi(\mathcal{M})$. Покажем, что $\widehat{1} \in D(A')$. Для этого рассмотрим операторы $x_n = \int\limits_0^n \lambda\, dE(\lambda)$ и $x_n' = \int\limits_0^n \lambda\, d\pi(E(\lambda))$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ясно, что $\pi(x_n) = x_n'$ и $|x_n f| \le |Af|$ для любого $f \in D(A)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$

$$\int\limits_0^n \lambda^2\, d(\pi(E(\lambda))\widehat{1}, \widehat{1}) = ({x_n'}^2\,\widehat{1}, \widehat{1}) = (\pi(x_n)^2\,\widehat{1}, \widehat{1}) = \varphi(x_n^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |x_n f_i|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} |Af_i|^2 < +\infty.$$

Переходя теперь к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2\, d(\pi(E(\lambda))\widehat{1}, \widehat{1}) < +\infty,$$

так что $\widehat{1} \in D(A')$. Отметим, что $\pi(\mathcal{M})'\,\widehat{1} \subset D(A')$, так как оператор A' присоединен к $\pi(\mathcal{M})$. Проверим, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(|A|) \equiv D(A)$. Действительно, для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2\, d(E(\lambda)f, f) = \int\limits_0^\infty \lambda^2\, d(\pi(E(\lambda))\xi_f, \xi_f) < +\infty.$$

Обозначим через a такую б. ф. из $L_2(\varphi)$, что $\widehat{a} = A'\,\widehat{1}$. Тогда для любого $f \in \mathcal{D}_\varphi$

$$(Af, f) = \lim_{n\to\infty}(Ux_n f, f) = \lim_{n\to\infty}(\pi(U)x_n'\xi_f, \xi_f) = (A'\xi_f, \xi_f)$$
$$= (A'\pi'(\xi_f)\widehat{1}, \xi_f) = (\pi'(\xi_f)\widehat{a}, \xi_f) = a(f, f).$$

Из поляризационного тождества теперь следует, что $a = A(\cdot,\cdot)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Эта импликация следует из теоремы 1.

Покажем, наконец, что при выполнении (ii) $\Lambda(A(\cdot,\cdot)) = A$. Это равенство справедливо в силу того, что два замкнутых плотно определенных оператора $\Lambda(A(\cdot,\cdot))$ и A, присоединенных к конечной алгебре Неймана $\mathcal{M}$, связаны включением $\Lambda(A(\cdot,\cdot)) \subset A$ (см. [10], 5.1, стр. 264).

Приводимое ниже следствие непосредственно вытекает из следствия 2 и предложения 3 путем перехода к редуцированной (на носитель нормального функционала) алгебре Неймана.

4. Следствие [10]. *Пусть* $\mathcal{M}$ *– конечная алгебра Неймана,* $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i, f_i)$ $(f_i \in H)$ *– нормальный положительный функционал на* $\mathcal{M}$ *и* E *– носитель* φ. *Множество* $\mathcal{L}_2(\mathcal{M},\varphi)$ *замкнутых плотно определенных операторов* A, *присоединенных к* $\mathcal{M}$ *и обладающих следующими свойствами:*

(i) $AE = A$,

(ii) $f_i \in D(A)$ $(i = 1, 2, \dots)$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |Af_i|^2 < +\infty$,

является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(A, B) \equiv \sum\limits_{i=1}^{\infty}(Af_i, Bf_i)$ $(A, B \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M},\varphi))$ *и операции сильной суммы. Гильбертово пространство* $\mathcal{L}_2(\mathcal{M},\varphi)$ *не зависит от выбора векторов* f_i *в представлении функционала* φ.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А. Н. Шерстневу за внимание, проявленное им к настоящей работе.

Литература

1. Сигал И., *Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования*, Математика (сб. перев.) **6** (1962), 1, 65–132.
2. Такесаки М., *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения*, Математика (сб. перев.) **18** (1974), 3, 83–122.
3. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I*, Изв. вузов. Математика (1978), 7, 79–88.
4. Шерстнев А. Н., *К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана*, Функц. анализ и его прил. **8** (1974), вып. 3, 89-90.
5. Шерстнев А. Н., *Каждый гладкий вес является l-весом*, Изв. вузов. Математика (1977), 8, 88–91.
6. Шерстнев А. Н., *О некоммутативном аналоге пространства L_1*, Успехи матем. наук **33** (1978), вып. 1, 231–232.
7. Шерстнев А. Н., *Об одном некоммутативном аналоге пространства L_1*, Мат. анализ, Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1978, 112–123.
8. Combes F., *Poids associés à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compos. math. **23** (1971), no. 1, 49–77.
9. Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, 2^e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1969, 367 p.
10. Dye H., *The Radon–Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), no. 2, 243–280.
11. Murray F. J., von Neumann J., *On rings of operators*, Ann. Math. **37** (1936), 116–229.

12. Perdrizet F., *Éléments positifs relatifs à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compos. math. **23** (1971), no. 1, 25–47.
13. Van Daele A., *A new approach to the Tomita-Takesaki theory of generalised Hilbert algebras*, J. Funct. Anal. **15** (1974), no. 4, 378–393.

V. ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ ВЕСА НА АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА

Казань, Казанск. ун–т,
1978, 24 с., Рукопись деп. в ВИНИТИ
10 января 1979 г., 101-79 Деп.

В предлагаемой работе изучаются нормальные веса на алгебрах Неймана, локально конечные в следующем смысле: каждый положительный оператор из алгебры, значение веса на котором отлично от нуля, мажорирует положительный оператор с ненулевым конечным весом. В первом разделе получено описание нормальных локально конечных весов на алгебре всех ограниченных операторов и показано, что для нормального веса требование локальной конечности строго сильнее обычного требования полуконечности. Во втором разделе условие локальной конечности точного нормального полуконечного веса связывается со свойствами определяемого им отображения γ, введенного в работе [3]. Здесь также получено новое описание этого отображения. В третьем разделе установлена локальная конечность широкого класса весов на полуконечных алгебрах Неймана.

I. Напомним сначала основные определения, касающиеся весов на алгебрах Неймана (см. [4], [7]).

Весом на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ называется отображение $\varphi\colon \mathcal{M}^+ \to [0,+\infty]$ такое, что

a) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ $(x, y \in \mathcal{M}^+)$,

b) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ $(x \in \mathcal{M}^+,\ \lambda \geq 0)$, причем $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Если φ — вес на $\mathcal{M}$, то множество

$$\mathfrak{n}_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < +\infty\}$$

— левый идеал $\mathcal{M}$, а $\mathfrak{m}_\varphi = \mathfrak{n}_\varphi^*\mathfrak{n}_\varphi$ — самосопряженная подалгебра $\mathcal{M}$, линейно порождаемая своей положительной частью

$$\mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < +\infty\}.$$

Ограничение веса $\varphi|\mathfrak{m}_\varphi^+$ продолжается до единственной положительной линейной формы на $\mathfrak{m}_\varphi$, также обозначаемой через φ. Вес φ называется *точным*, если из равенства $\varphi(x) = 0$ $(x \in \mathcal{M}^+)$ следует, что $x = 0$. Вес φ *нормален*, если $\varphi(\sup x_i) = \sup \varphi(x_i)$ для любой ограниченной возрастающей сети $(x_i) \subset \mathcal{M}^+$. У. Хаагеруп [7] показал, что каждый нормальный вес есть верхняя грань положительных нормальных функционалов. Вес φ называется *полуконечным*, если подалгебра $\mathfrak{m}_\varphi$ плотна в $\mathcal{M}$ в ультраслабой топологии.

Дадим теперь основное в данной работе

Определение 1.1. Назовем вес φ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ *локально конечным,* если для любого $x \in \mathcal{M}^+$ с $\varphi(x) > 0$ существует $y \in \mathcal{M}^+$ такой, что $y \leq x$ и $0 < \varphi(y) < +\infty$.

В дальнейшем мы ограничимся изучением нормальных локально конечных весов.

Следующее предложение дает ряд условий, эквивалентных для нормального веса требованию локальной конечности.

Предложение 1.2. *Пусть φ — нормальный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *вес φ локально конечен,*
(ii) *для любого $x \in \mathcal{M}^+$ существует семейство $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такое, что $x = \sum x_i$,*
(iii) *для любого $x \in \mathcal{M}^+$ существует возрастающая сеть $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такая, что $x = \sup x_i$,*
(iv) *для любого $x \in \mathcal{M}^+$: $\varphi(x) = \sup\{\varphi(y) \mid y \leq x,\ y \in \mathfrak{m}_\varphi^+\}$.*

Доказательство. Заметим, что импликации (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i) здесь очевидны. Для проверки (i) $\Longrightarrow$ (ii) мы фиксируем $(0 \neq)x \in \mathcal{M}^+$ и обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех таких наборов ненулевых операторов из $\mathfrak{m}_\varphi^+$, любая конечная сумма элементов каждого из которых мажорируется оператором x. Из леммы Цорна тогда следует существование максимального (в смысле упорядоченности по включению) набора $(x_i) \in \mathcal{F}$. Из определения $\mathcal{F}$ следует, что ряд $\sum x_i$ сильно сходится к некоторому $z \in \mathcal{M}^+$, причем $z \leq x$. Однако, строгое неравенство здесь невозможно, так как в силу локальной конечности веса φ это противоречило бы максимальности набора (x_i). Таким образом, $x = \sum x_i$ и предложение доказано.

Следствие 1.3. *Каждый нормальный локально конечный вес полуконечен.*

Замечание 1.4. Отметим в связи с п° (iii) предложения 1.2 одно полезное достаточное условие локальной конечности: нормальный вес φ локально конечен, если $\mathfrak{m}_\varphi$ содержит некоторый двусторонний идеал, ультраслабо плотный в $\mathcal{M}$ (см. [6, гл. 1, §3, следствие 5]). Отсюда, в частности, следует локальная конечность каждого нормального полуконечного следа. Однако, для нормальных весов требование локальной конечности оказывается строго сильнее требования полуконечности (см. ниже следствие 1.7).

Следующая теорема дает описание нормальных локально конечных весов на алгебре $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H.

Теорема 1.5. *Пусть φ — нормальный вес на $\mathcal{B}(H)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *вес φ локально конечен,*
(ii) *$\mathfrak{m}_\varphi$ содержит все ядерные операторы в H,*
(iii) *существует оператор $h \in \mathcal{B}(H)^+$ такой, что*

$$\varphi(x) = \mathrm{Tr}\,(hx) \qquad (x \in \mathcal{B}(H)^+),$$

где $\mathrm{Tr}\,(\cdot)$ — канонический след на $\mathcal{B}(H)$.

Доказательство. Импликация (iii) $\Longrightarrow$ (ii) здесь очевидна, (ii) $\Longrightarrow$ (i) следует из замечания 1.4. Для доказательства (i) $\Longrightarrow$ (iii) нам понадобится следующая

Лемма 1.6. *Пусть $h \geq 0$ — некоторый самосопряженный оператор в H и, заданный на $\mathcal{B}(H)$, вес $\varphi = \mathrm{Tr}\,(h\,\cdot)$ (правая часть здесь понимается в смысле [9]). Если $f \in H$ и оператор $p_f = ((\cdot), f)f$, то*

$$\varphi(p_f) = \begin{cases} |h^{1/2}f|^2, & \textit{если } f \in D(h^{1/2}), \\ +\infty & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство леммы 1.6. Пусть (e_i) — некоторый ортонормированный базис в H. Полагая $h_\varepsilon = h(1+\varepsilon h)^{-1}$ ($\varepsilon > 0$), имеем:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(h_\varepsilon^{1/2} p_f h_\varepsilon^{1/2}) &= \sum_i (p_f h_\varepsilon^{1/2} e_i, h_\varepsilon^{1/2} e_i) = \sum_i |(f, h_\varepsilon^{1/2} e_i)|^2 = \sum_i |(h_\varepsilon^{1/2} f, e_i)|^2 \\ &= (h_\varepsilon f, f). \end{aligned}$$

Переходя к sup по $\varepsilon > 0$ в крайних частях этой выкладки, получаем в силу [9, лемма 7.9] требуемое соотношение.

Закончим теперь доказательство теоремы 1.4. Если вес φ нормален и локально конечен, то он полуконечен в силу следствия 1.3. Тогда согласно теореме Радона–Никодима для весов [9, теорема 5.12] имеет место представление $\varphi = \mathrm{Tr}\,(h\,\cdot)$, где $h \geq 0$ — некоторый самосопряженный оператор в H. Для любого вектора $f \in H$ оператор $p_f = ((\cdot), f)f \in \mathfrak{m}_\varphi$, так как каждый положительный оператор, мажорируемый p_f, кратен p_f. Из леммы 1.6 тогда следует равенство $D(h^{1/2}) = H$, означающее ограниченность оператора h. Теорема доказана.

Следствие 1.7. *Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $h \geq 0$ — самосопряженный оператор в H, не являющийся ограниченным. Тогда нормальный полуконечный вес $\varphi = \mathrm{Tr}\,(h\,\cdot)$ на $\mathcal{B}(H)$ не является локально конечным.*

Определение 1.8. Скажем, что вес ψ продолжает вес φ (оба веса определены на одной алгебре Неймана), если ограничения φ и ψ на $\mathfrak{m}_\varphi^+$ совпадают.

Замечание 1.9. Утверждение следствия 1.6 допускает некоторое усиление, а именно: ни один нормальный полуконечный вес φ на $\mathcal{B}(H)$ не допускает собственного локально конечного продолжения. Действительно, в противном случае вес φ в силу леммы 1.6 имел бы ограниченную производную относительно следа Tr, т. е. являлся бы локально конечным. Однако, в силу предложения 1.2 (iii) ни один нормальный локально конечный вес не допускает собственного нормального продолжения.

Закончим этот раздел еще одним простым достаточным условием локальной конечности.

Предложение 1.10. *Пусть φ — точный нормальный локально конечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ и нормальный полуконечный вес ψ удовлетворяет К.М.Ш.-условию относительно группы модулярных автоморфизмов, связанной с φ (см. [4], [9]). Тогда вес ψ локально конечен.*

Доказательство. Согласно [9, теорема 5.4] существует такой самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к центру алгебры $\mathcal{M}$, что $\psi = \varphi(h\,\cdot)$. Пусть $h = \int_0^{+\infty} \lambda\, de(\lambda)$ — спектральное представление h и проектор $p_n = \int_0^n de(\lambda)$ $(n = 1, 2, \dots)$. По условию для любого $(0 \neq) x \in \mathcal{M}^+$ существует $y \in \mathcal{M}^+$ такой, что $y \leq x$ и $0 < \varphi(y) < +\infty$. В таком случае

$$0 \leq p_n y p_n = y^{1/2} p_n y^{1/2} \leq y \leq x \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

и в силу равенства

$$\varphi(y) = \lim \varphi(p_n h p_n y) = \lim \psi(p_n y p_n),$$

для достаточно больших n имеет место неравенство $0 < \psi(p_n y p_n) < +\infty$. Предложение доказано.

II. Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. В работе [3] было введено некоторое вложение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$, играющее существенную роль в теории некоммутативного интегрирования относительно веса. В этом разделе мы покажем, что дополнительное требование локальной конечности веса φ эквивалентно возможности некоторого естественного продолжения отображения $\gamma|\mathfrak{m}_\varphi^+$, и исследуем это продолжение.

Дадим прежде всего описание отображения γ, формально не связанное с понятием обобщенной гильбертовой алгебры (ср. [3]). Следующий результат, обладая определенным самостоятельным значением, будет так же существенно использован в последнем разделе работы.

Теорема 2.1. *Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Существует, и притом единственное, отображение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$,

(ii) $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^+) = \{\omega \in \mathcal{M}_*^+ \mid \exists \lambda > 0 : \omega \leq \lambda\varphi\}$,

(iii) *отображение* $\{x, y\} \mapsto \gamma(x)(y^*)$ — *невырожденная положительная билинейная форма на* $\mathfrak{m}_\varphi$.

Доказательство. Напомним сначала конструкцию обобщенной гильбертовой алгебры, определяемой весом φ (см. [4]). Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathfrak{n}_\varphi$ по скалярному произведению

$$\{x, y\} \mapsto \varphi(y^* x) \qquad (x, y \in \mathfrak{n}_\varphi),$$

и $\widehat{\ }\colon \mathfrak{n}_\varphi \to \mathfrak{H}$ — тождественное вложение. Отображение π алгебры $\mathcal{M}$ в алгебру всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$, заданное равенством

$$\pi(x)\widehat{y} = \widehat{xy} \qquad (x \in \mathcal{M},\ y \in \mathfrak{n}_\varphi),$$

определяет точное нормальное $*$-представление $\mathcal{M}$, индуцированное весом φ. Инволюция $^\sharp)\colon \widehat{x} \mapsto \widehat{x^*}$ задает в $\mathfrak{A} = \widehat{\mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*}$ структуру совершенной обобщенной гильбертовой алгебры, левая алгебра Неймана которой отождествляется с $\pi(\mathcal{M})$. Пусть S — замыкание в $\mathfrak{H}$ отображения $^\sharp)$ и $S = J\Delta^{1/2}$ — полярное разложение S (здесь J — антилинейная изометрия в $\mathfrak{H}$, а Δ — модулярный оператор теории Томита–Такесаки [2]).

Мы проверим теперь, что вложение $\gamma\colon \mathfrak{n}_\varphi \to \mathcal{M}_*$, введенное в [3] как единственное линейное продолжение отображения, заданного на операторах вида v^*u $(u, v \in \mathfrak{n}_\varphi)$ формулой

$$\gamma(v^*u)(w) = (J\pi(w)^*J\widehat{u}, \widehat{v}) \qquad (w \in \mathcal{M}), \tag{1}$$

удовлетворяет условиям (i) – (iii). Требование (i) здесь очевидно выполнено, (iii) будет сразу следовать из равенства

$$\gamma(x)(y^*) = (\Delta^{1/2}\widehat{x}, \widehat{y}) \qquad (x, y \in \mathfrak{n}_\varphi). \tag{2}$$

Для проверки (2) достаточно взять $x = v^*u$ $(u, v \in \mathfrak{n}_\varphi)$ и тогда:

$$\begin{aligned}\gamma(x)(y^*) &= (J\pi(y)J\widehat{u}, \widehat{v}) = (\widehat{u}, J\pi(y^*)J\widehat{v}) = (\widehat{u}, \pi(v)\Delta^{1/2}\widehat{y}) \\ &= (\pi(v^*)\widehat{u}, \Delta^{1/2}\widehat{y}) = (\Delta^{1/2}\widehat{x}, \widehat{y}).\end{aligned}$$

Для проверки (ii) возьмем $x, y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. Тогда в силу равенства (2) и (i)

$$\gamma(x)(y) = \gamma(y)(x) \le \|\gamma(y)\| \cdot \|x\| = \|x\| \cdot \gamma(y)(1) = \|x\| \cdot \varphi(y).$$

С другой стороны, если для некоторого $\lambda > 0$ положительный нормальный функционал $\omega \le \lambda\varphi$, то существует положительный оператор $x' \in J\pi(\mathfrak{m}_\varphi)J$ такой, что

$$\omega(v^*u) = (x'\widehat{u}, \widehat{v}) \qquad (u, v \in \mathfrak{n}_\varphi)$$

(см. [4, предложение 2.1]). Полагая $x = \pi^{-1}(Jx'J)$ $(\in \mathfrak{m}_\varphi^+)$, получаем, с учетом (1), равенство

$$\omega(y) = \gamma(x)(y) \qquad (y \in \mathfrak{m}_\varphi).$$

В силу ультраслабой плотности $\mathfrak{m}_\varphi$ отсюда следует, что $\omega = \gamma(x)$.

Отметим, что из приведенных выше рассуждений также вытекает следующее полезное соотношение:

$$\varphi(x) = \sup_{y \le 1,\ y \in \mathfrak{m}_\varphi^+} \gamma(y)(x) \qquad (x \in \mathcal{M}^+). \tag{3}$$

Предположим теперь, что некоторое отображение $\gamma'\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$ также удовлетворяет условиям (i) – (iii), и покажем, что тогда оно совпадает с отображением γ, определяемым равенством (1). Отметим, прежде всего, что такое отображение γ' есть положительная линейная биекция $\mathfrak{m}_\varphi$ на $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi)$, причем

$$\gamma'(x)(y) = \gamma'(y)(x) \qquad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi) \tag{4}$$

(это сразу следует из условий (i) – (iii)). Отсюда, в свою очередь, вытекает, что отображение $\alpha = \gamma^{-1} \circ \gamma'$ является положительной линейной биекцией $\mathfrak{m}_\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi$ и в силу условия (i)

$$\varphi(\alpha(x)) = \varphi(x) \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi).$$

Покажем далее, что ограничение α на $\mathfrak{m}_\varphi^э$ (эрмитову часть $\mathfrak{m}_\varphi$) является изометрией в норме $\|\cdot\|_\varphi$ (см. [3]). Действительно, для каждого $x \in \mathfrak{m}_\varphi^э$

$$\begin{aligned}\|x\|_\varphi &= \inf\{\varphi(x_1 + x_2) \mid x = x_1 - x_2;\ x_1, x_2 \in \mathfrak{m}_\varphi^+\} \\ &= \inf\{\varphi(\alpha(x_1 + x_2)) \mid \alpha(x) = \alpha(x_1) - \alpha(x_2);\ x_1, x_2 \in \mathfrak{m}_\varphi^+\} \\ &= \inf\{\varphi(y_1 + y_2) \mid \alpha(x) = y_1 - y_2;\ y_1, y_2 \in \mathfrak{m}_\varphi^+\} \\ &= \|\alpha(x)\|_\varphi.\end{aligned}$$

В силу изометричности $\alpha|\mathfrak{m}_\varphi^э$, линейная биекция $\beta\colon \gamma(\mathfrak{m}_\varphi^э) \to \gamma(\mathfrak{m}_\varphi^э)$, определенная соотношением

$$\beta(\gamma(x)) = \gamma'(x) \quad (\equiv \gamma(\alpha(x))) \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi^э)$$

— также изометрия. Так как $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^э)$ плотно в $\mathcal{M}_*^э$ (эрмитовой части $\mathcal{M}_*$) (см. [3]), то отображение β может быть продолжено до линейной изометрии вещественного банахова пространства $\mathcal{M}_*^э$ на $\mathcal{M}_*^э$, также обозначаемой через β. Транспонированное отображение $\beta^t\colon \mathcal{M}^э \to \mathcal{M}^э$, однозначно определяемое равенством

$$\gamma(y)(\beta^t(x)) = \gamma'(y)(x) \qquad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi^э), \tag{5}$$

тогда является линейной изометрией $\mathcal{M}^э$ на $\mathcal{M}^э$, причем $\beta^t(1) = 1$. В таком случае, согласно [8, теорема 2], линейное продолжение β^t на $\mathcal{M}$ (также обозначенное через β^t) является йордановым $*$-изоморфизмом $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$, т. е.

$$\beta^t(xy + yx) = \beta^t(x)\beta^t(y) + \beta^t(y)\beta^t(x) \qquad (x, y \in \mathcal{M}).$$

Заметим, что ограничение $\beta^t|\mathfrak{m}_\varphi$ совпадает с α. Действительно, согласно равенств (4) и (5), для любых $x, y \in \mathfrak{m}_\varphi$:

$$\gamma(y)(\beta^t(x)) = \gamma'(y)(x) = \gamma'(x)(y) = \gamma(\alpha(x))(y) = \gamma(y)(\alpha(x)).$$

Таким образом, $\alpha\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathfrak{m}_\varphi$ — йорданов $*$-изоморфизм $\mathfrak{m}_\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi$ и, следовательно, для каждого $x \in \mathfrak{m}_\varphi$

$$\varphi(x^*x + xx^*) = \varphi(\alpha(x^*x + xx^*)) = \varphi(\alpha(x)^*\alpha(x) + \alpha(x)\alpha(x)^*).$$

Из последней выкладки вытекает возможность продолжения линейной биекции $\alpha\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathfrak{m}_\varphi$ до унитарного оператора U в гильбертовом пространстве $D^\sharp = D(S)$ со скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_\sharp = (\xi, \eta) + (S\eta, S\xi) \qquad (\xi, \eta \in D^\sharp)$$

(напомним, что $\widehat{\mathfrak{m}_\varphi}$ плотно в гильбертовом пространстве $D^\sharp$ [2], [4]). Нам осталось показать, что оператор $U = 1$. Для доказательства этого равенства мы воспользуемся техникой А. Конна (ср. [5, лемма 1.9]).

Лемма 2.2. *Пусть p — ограничение оператора $\Delta^{1/2}(1+\Delta)^{-1}$ на $D^\sharp$. Тогда p и pU — ограниченные положительные операторы в гильбертовом пространстве $D^\sharp$ и, следовательно, $U = 1$.*

Доказательство. Поскольку $0 \le \lambda(1+\lambda^2)^{-1} \le \frac{1}{2}$ $(\lambda \ge 0)$, то оператор p ограничен и

$$(p\xi, \xi)_\sharp = (p\xi, \xi) + (\Delta^{1/2}p\xi, \Delta^{1/2}p\xi) \ge 0 \qquad (\xi \in D^\sharp).$$

Далее, если $\xi_1, \xi_2 \in D^\sharp$, то $(p\xi_1, \xi_2)_\sharp = (\Delta^{1/2}\xi_1, \xi_2)$ и, следовательно, для каждого $x \in \mathfrak{m}_\varphi$

$$\begin{aligned}(pU\widehat{x}, \widehat{x}) &= (\Delta^{1/2}U\widehat{x}, \widehat{x}) = (U\widehat{x}, \Delta^{1/2}\widehat{x})\\ &= (\widehat{\alpha(x)}, J\widehat{x^*}) = \gamma(\alpha(x))(x^*) = \gamma'(x)(x^*) \ge 0,\end{aligned}$$

причем равенство достигается только при $x = 0$. Отсюда следует, что в гильбертовом пространстве $D^\sharp$ оператор $pU \ge 0$ и отображает $D^\sharp$ на $D^\sharp$. Из единственности (правого) полярного разложения в $D^\sharp$ теперь следует, что $U = 1$.

Следующая теорема дает критерий локальной конечности в терминах отображения γ.

Теорема 2.3. *Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *вес φ локально конечен,*

(ii) *для каждого $x \in \mathcal{M}^+$ существует такой нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, что*

$$\psi(y) = \gamma(y)(x) \qquad (y \in \mathfrak{m}_\varphi^+). \tag{6}$$

При этом для локально конечного веса φ нормальный вес ψ определяется по $x \in \mathcal{M}^+$ условием (6) однозначно.

Доказательство. Предположим сначала, что вес φ локально конечен и $x \in \mathcal{M}^+$. Тогда, согласно предложению 1.2 (iii), существует возрастающая сеть $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такая, что $x = \sup x_i$. Положим для каждого $y \in \mathcal{M}^+$

$$\psi(y) = \sup \gamma(x_i)(y).$$

Легко видеть, что ψ — нормальный вес на $\mathcal{M}$ (как верхняя грань возрастающей сети положительных нормальных функционалов). Если же $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, то в силу (4)

$$\psi(y) = \sup \gamma(x_i)(y) = \sup \gamma(y)(x_i) = \gamma(y)(x).$$

Для проверки единственности ψ предположим, что нормальный вес θ на $\mathcal{M}$ также удовлетворяет условию (6). Пусть $z \in \mathcal{M}^+$ и возрастающая сеть $(z_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такова, что $z = \sup z_i$ (см. предложение 1.2 (iii)). Тогда

$$\theta(z) = \sup \theta(z_i) = \sup \gamma(z_i)(x) = \sup \psi(z_i) = \psi(z).$$

Таким образом, импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) и единственность нормального веса ψ с условием (6) доказаны.

Для доказательства обратного утверждения (ii) $\Longrightarrow$ (i) предположим, что $(0 \neq) x \in \mathcal{M}^+$ и нормальный вес ψ удовлетворяет условию (6). Тогда для любого $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$

$$\psi(y) \leq \|\gamma(y)\| \cdot \|x\| = \gamma(y)(1) \cdot \|x\| = \|x\| \cdot \varphi(y).$$

Таким образом, $\psi \leq \|x\|\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi^+$, а следовательно, и на $\mathcal{M}^+$. Отметим, далее, что $\psi \not\equiv 0$, т. к. в силу (3)

$$0 < \varphi(x) = \sup_{y \leq 1,\ y \in \mathfrak{m}_\varphi^+} \psi(y).$$

Тогда, вследствие нормальности веса ψ, найдется такой положительный нормальный функционал ω на $\mathcal{M}$, что $\omega \leq \psi \leq \|x\|\varphi$, причем $\omega(1) > 0$. Согласно теореме 2.1 (ii) тогда существует $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$ такой, что $\omega = \gamma(y)$, причем $\varphi(y) = \gamma(y)(1) = \omega(1) > 0$. Остается показать, что $y \leq x$. Для этого, воспользовавшись обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 2.1, заметим, что для любого $z \in \mathfrak{n}_\varphi$:

$$(J\pi(y)J\widehat{z}, \widehat{z}) = \gamma(z^*z)(y) = \gamma(y)(z^*z) \leq \psi(z^*z) = \gamma(z^*z)(x) = (J\pi(x)J\widehat{z}, \widehat{z}).$$

Из последней выкладки следует, что $\pi(y) \leq \pi(x)$, а значит и $y \leq x$. Теорема доказана.

С помощью теоремы 2.3 мы установим еще один любопытный критерий локальной конечности.

Предложение 2.4. *Точный нормальный полуконечный вес φ на $\mathcal{M}$ локально конечен тогда и только тогда, когда каждый вес $\theta \leq \varphi$ такой, что $\mathfrak{m}_\theta^+ = \mathfrak{m}_\varphi^+$, продолжается до нормального веса.*

Доказательство. Предположим сначала, что вес φ локально конечен и вес $\theta \leq \varphi$, $\mathfrak{m}_\theta^+ = \mathfrak{m}_\varphi^+$. Воспользовавшись обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 2.1, определим на $\widehat{\mathfrak{n}_\varphi}$ билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle = \theta(y^*x) \qquad (x, y \in \mathfrak{n}_\varphi).$$

Используя неравенство $\theta \leq \varphi$, нетрудно обычным образом показать существование единственного оператора $x' \in \pi(\mathcal{M})'$ такого, что

$$\langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle = (x'\widehat{x}, \widehat{y}) \qquad (x, y \in \mathfrak{n}_\varphi),$$

причем $0 \leq x' \leq 1$. Полагая $x = \pi^{-1}(Jx'J)$ $(\in \mathcal{M}^+)$, имеем, в силу (1):

$$\theta(y) = \langle \widehat{y^{1/2}}, \widehat{y^{1/2}} \rangle = (J\pi(x)J\widehat{y^{1/2}}, \widehat{y^{1/2}}) = \gamma(y)(x) \qquad (y \in \mathfrak{m}_\varphi^+).$$

Пусть, далее, ψ — нормальный вес на $\mathcal{M}$, удовлетворяющий условию (6) относительно данного $x \in \mathcal{M}^+$. Предыдущая выкладка тогда показывает, что вес ψ продолжает θ.

Для доказательства обратного утверждения мы по фиксированному $x \in \mathcal{M}^+$ определим вес θ на $\mathcal{M}$ равенством

$$\theta(y) = \begin{cases} \gamma(y)(x), & \text{если } y \in \mathfrak{m}_\varphi^+, \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (y \in \mathcal{M}^+).$$

(Заметим, что аддитивность θ здесь следует из наследственности конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+$ в $\mathcal{M}^+$ и аддитивности γ.) Пусть теперь ψ — нормальное продолжение веса θ. Ясно, что тогда ψ удовлетворяет условию (6), так что в силу теоремы 2.3 вес φ локально конечен. Предложение доказано.

Далее до конца этого раздела мы будем предполагать, что φ — точный нормальный локально конечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, и опишем в этой ситуации некоторое естественное продолжение отображения $\gamma|\mathfrak{m}_\varphi^+$. Для случая следа ($\varphi = \tau$) речь идет об отображении $x \mapsto \tau(x^{1/2}(\cdot)x^{1/2})$, сопоставляющем каждому $x \in \mathcal{M}^+$ нормальный вес на $\mathcal{M}$, мажорируемый $\|x\|\tau$. В общем же случае мы примем следующее определение.

Определение 2.5. Для каждого $x \in \mathcal{M}^+$ будем через $\gamma(x)$ обозначать нормальный вес на $\mathcal{M}$, однозначно определяемый условием (6) теоремы 2.3.

Легко видеть, что при $x \in \mathfrak{m}_\varphi$ вес $\gamma(x)$ конечен и в силу соглашения, принятого нами на стр. 3, это обозначение согласуется с обозначением отображения $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$, введенного теоремой 2.1. Ясно также, что каждый вес $\gamma(x)$ $(x \in \mathcal{M}^+)$ локально конечен и $\gamma(1) = \varphi$.

Остановимся теперь на свойствах весов $\gamma(x)$ $(x \in \mathcal{M}^+)$.

Предложение 2.6. *Пусть $x \in \mathcal{M}^+$. Тогда*

(i) $\gamma(x) \le \|x\|\varphi$,

(ii) $\gamma(x)(y) = \gamma(y)(x)$ $(y \in \mathcal{M}^+)$,

(iii) $\gamma(x) = \sup\limits_{y \le x,\ y \in \mathfrak{m}_\varphi^+} \gamma(y)$,

(iv) $\gamma(x) = \sup \gamma(x_i)$ *для любой возрастающей сети* $(x_i) \subset \mathcal{M}^+$ *такой, что* $x = \sup x_i$.

Доказательство. Неравенство (i) фактически уже было установлено при доказательстве теоремы 2.3. Для проверки (ii) мы выберем возрастающую сеть $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такую, что $x = \sup x_i$ (см. предложение 1.2 (iii)). Из доказательства теоремы 2.3 тогда следует, что $\gamma(x) = \sup \gamma(x_i)$. В таком случае, в силу нормальности веса $\gamma(y)$ $(y \in \mathcal{M}^+)$

$$\gamma(y)(x) = \sup \gamma(y)(x_i) = \sup \gamma(x_i)(y) = \gamma(x)(y).$$

Доказательство (iii) и (iv) теперь уже очевидно.

Следствие 2.7 (аналог теоремы Радона–Никодима). *Пусть ψ — нормальный вес на $\mathcal{M}$, причем $\psi \le \varphi$. Тогда существует единственный оператор $x \in \mathcal{M}^+$ такой, что $\psi = \gamma(x)$, при этом $\|x\| \le 1$.*

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве предложения 2.4, нетрудно установить существование единственного оператора $x \in \mathcal{M}^+$ такого, что

$$\psi(y) = \gamma(y)(x) \qquad (y \in \mathfrak{m}_\varphi^+),$$

причем $\|x\| \leq 1$. Равенство $\psi = \gamma(x)$ теперь непосредственно следует из определения веса $\gamma(x)$.

Следствие 2.8. *Пусть $P(\mathcal{M})$ — конус всех нормальных весов на $\mathcal{M}$. Отображение $\gamma\colon \mathcal{M}^+ \to P(\mathcal{M})$ является положительно однородной, аддитивной, монотонной и нормальной биекцией $\mathcal{M}^+$ на наследственный подконус $P(\mathcal{M})$, состоящий из нормальных весов, доминируемых весом φ.*

Обозначим через $\Sigma = \{\sigma_t\}$ $(t \in \mathbb{R})$ однопараметрическую группу модулярных автоморфизмов алгебры $\mathcal{M}$, ассоциированную с весом φ (см. [4]). Следующее предложение дает явную формулу для Σ-инвариантных весов вида $\gamma(x)$.

Предложение 2.9. *Пусть $x \in \mathcal{M}^+$. Тогда вес $\gamma(x)$ Σ-инвариантен в том и только том случае, когда $\sigma_t(x) = x$ $(t \in \mathbb{R})$, причем для такого x вес $\gamma(x) = \varphi(x^{1/2}(\cdot)x^{1/2})$.*

Доказательство. Предположим сначала, что оператор $x \in \mathcal{M}^+$ Σ-инвариантен. В следующей выкладке, справедливой для каждого $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, мы воспользуемся перестановочностью операторов $\Delta^{1/2}$ и $\pi(x)$:

$$\begin{aligned}\gamma(x)(y) &= \gamma(y)(x) = (J\pi(x)J\widehat{y^{1/2}}, \widehat{y^{1/2}}) = |\pi(x^{1/2})J\widehat{y^{1/2}}|^2 \\ &= |\pi(x^{1/2})\Delta^{1/2}\widehat{y^{1/2}}|^2 = |\Delta^{1/2}\widehat{x^{1/2}y^{1/2}}|^2 = |S\widehat{x^{1/2}y^{1/2}}|^2 \\ &= \varphi(x^{1/2}y^{1/2}(x^{1/2}y^{1/2})^*) = \varphi(x^{1/2}yx^{1/2}).\end{aligned}$$

Но тогда, согласно предложения 1.2 (iii), нормальный вес $\gamma(x)$, совпадая с нормальным весом $\varphi(x^{1/2}(\cdot)x^{1/2})$ на $\mathfrak{m}_\varphi^+$, совпадает с ним и всюду на $\mathcal{M}^+$. Остается заметить, что вес $\varphi(x^{1/2}(\cdot)x^{1/2})$ Σ-инвариантен [9].

Пусть, наоборот, для некоторого $x \in \mathcal{M}^+$ вес $\gamma(x)$ является Σ-инвариантным. В таком случае, в силу предложения 2.6 (i) и теоремы Радона–Никодима для весов [9, теорема 5.12], вес $\gamma(x) = \varphi(y^{1/2}(\cdot)y^{1/2})$ для некоторого Σ-инвариантного оператора $y \in \mathcal{M}^+$. Тогда, по уже доказанному, $\gamma(x) = \gamma(y)$, так что $x = y$. Предложение доказано.

III. В этом разделе мы установим локальную конечность широкого класса весов на полуконечных алгебрах Неймана и получим для них явный вид отображения γ.

Далее до конца будем предполагать, что $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$ и φ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$. Согласно [9, теорема 5.12] имеет место представление $\varphi = \tau(h\,\cdot)$, где h — однозначно определяемый по φ несингулярный положительный самосопряженный оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$. Мы предположим также, что оператор h измерим относительно $\mathcal{M}$ в смысле [1, определение 2.1]. Последнее предположение выполняется, например, если $\mathfrak{m}_\varphi \supset \mathfrak{m}_\lambda$ для некоторого точного нормального полуконечного следа λ на $\mathcal{M}$ (см. [9, стр. 83]).

Отметим, что при доказательстве следующей теоремы 3.1 мы будем пользоваться естественной согласованностью некоммутативных теорем Радона–Никодима в форме И. Сигала [1, теорема 14] и Г. Педерсена и М. Такесаки [9, теорема 5.12].

Теорема 3.1. *При сделанных выше предположениях вес* $\varphi = \tau(h\,\cdot)$ *локально конечен, причем связанное с ним отображение* γ *определяется равенством*

$$\gamma(x) = \tau((h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2})\,\cdot) \qquad (x \in \mathcal{M}^+),\ ^{*)}$$

где правая часть понимается в смысле [9].

Доказательство. Обозначим через $L_1(\tau)$ пространство операторов, интегрируемых относительно τ (см. [1]), и будем той же буквой τ обозначать каноническое продолжение следа τ на $L_1(\tau)$. Нам понадобится следующая

Лемма 3.2. *Для каждого* $x \in \mathfrak{m}_\varphi$ *оператор* $h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2} \in L_1(\tau)$ *и* $\gamma(x)(y) = \tau(h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}y)$ $(y \in \mathcal{M})$.

Доказательство леммы 3.2. Для проверки интегрируемости оператора $h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$ можно, очевидно, ограничиться случаем $x \geq 0$. Тогда

$$\tau(h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}) = \tau(hx) = \varphi(x) < +\infty,$$

так что $h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2} \in L_1(\tau)$ (см. [1], [9]).

Определим теперь линейное отображение $\delta\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$ следующим образом:

$$\delta(x)(y) = \tau(h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}y) \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi,\ y \in \mathcal{M}),$$

и покажем, что оно удовлетворяет условиям (i) – (iii) теоремы 2.1. Для проверки (i) возьмем $x \in \mathcal{M}^+$, тогда

$$\delta(x)(1) = \tau(h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}) = \tau(hx) = \varphi(x).$$

Проверим (ii). Если $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, то для любого $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$:

$$\delta(x)(y) = \tau(h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}y) = \tau(x \cdot h^{1/2} \cdot y \cdot h^{1/2}) \leq \|x\|\tau(h^{1/2} \cdot y \cdot h^{1/2}) = \|x\|\varphi(y).$$

Таким образом, $\delta(x) \leq \|x\|\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi^+$, а значит и на $\mathcal{M}^+$. Пусть, наоборот, для некоторого $\lambda > 0$ положительный нормальный функционал $\omega \leq \lambda\varphi$. В силу [1, теорема 14] имеет место представление $\omega = \tau(k\cdot)$, где k — некоторый положительный самосопряженный оператор из $L_1(\tau)$. Заметим теперь, что неравенство $\tau(k\,\cdot) \leq \lambda\tau(h\,\cdot)$ означает, что $D(h^{1/2}) \subset D(k^{1/2})$ и $|k^{1/2}f|^2 \leq \lambda|h^{1/2}f|^2$ $(f \in D(h^{1/2}))$ [9]. Определим, далее, на плотном линеале векторов

$$\{h^{1/2}f + g \mid f, g \in D(h^{1/2}),\ h^{1/2}g = 0\}$$

линейный оператор u следующим образом:

$$u(h^{1/2}f + g) = k^{1/2}f.$$

Нетрудно проверить, что оператор u определен корректно, ограничен и его замыкание, которое мы обозначим через v, принадлежит $\mathcal{M}$ (ср. [6, гл. I, § 1,

---

*) Значком "$\cdot$" мы здесь и в дальнейшем обозначаем сильное произведение операторов.

лемма 2]). Из определения оператора v следует включение $v \cdot h^{1/2} \subset k^{1/2}$. Но, будучи измеримыми, операторы $v \cdot h^{1/2}$ и $k^{1/2}$ тогда должны совпадать [1, следствие 5.1]. В таком случае

$$k = (k^{1/2})^* k^{1/2} = (v \cdot h^{1/2})^* (v \cdot h^{1/2}) = h^{1/2} \cdot (v^* v) \cdot h^{1/2}.$$

Полагая, наконец, $x = v^* v$ ($\in \mathcal{M}^+$) имеем:

$$\omega(y) = \tau(ky) = \tau(h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2} y) = \delta(x)(y) \qquad (y \in \mathcal{M}).$$

Для проверки (iii) возьмем $x \in \mathfrak{m}_\varphi$. Тогда

$$\delta(x)(x^*) = \tau(h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2} x^*) = \tau(h^{1/4} \cdot x \cdot h^{1/4} (h^{1/4} \cdot x \cdot h^{1/4})^*) \geq 0$$

При этом, если $\delta(x)(x^*) = 0$, то $h^{1/4} \cdot x \cdot h^{1/4} = 0$. В силу несингулярности оператора h последнее равенство возможно только при $x = 0$.

Таким образом, показано, что отображение $\delta \colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$ удовлетворяет условиям (i) – (iii) теоремы 2.1 и, следовательно, утверждение леммы доказано.

Отметим, в качестве следствия леммы 3.2, полезную формулу, позволяющую в данной ситуации явно определить норму $\| \cdot \|_\varphi$, введенную в [3] следующим образом:

$$\|x\|_\varphi = \|\gamma(x)\| \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi).$$

Следствие 3.3. *Пусть $x \in \mathfrak{m}_\varphi$, тогда*

$$\|x\|_\varphi = \tau(|h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}|).$$

Для окончания доказательства теоремы 3.1 фиксируем произвольный $x \in \mathcal{M}^+$. Тогда положительный оператор $h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}$ измерим и, следовательно, самосопряжен [1, теорема 5]. В таком случае мы можем определить на $\mathcal{M}$, следуя [9], нормальный вес $\psi = \tau((h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}) \cdot)$. В силу теоремы 2.3, для доказательства локальной конечности φ и проверки равенства $\gamma(x) = \psi$ теперь достаточно показать, что вес ψ удовлетворяет равенству (6). Но, ввиду леммы 3.2, имеем для каждого $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$:

$$\gamma(y)(x) = \tau(h^{1/2} \cdot y \cdot h^{1/2} x) = \tau(y \cdot h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}) = \tau(h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2} y) = \psi(y).$$

Теорема доказана.

Следствие 3.4. *Каждый точный нормальный полуконечный вес на конечной алгебре Неймана является локально конечным.*

Замечание 3.5. Отметим, что на факторе типа I каждый нормальный локально конечный вес имеет измеримую производную относительно канонического следа (это следует из предложения 1.2).

В заключение автор выражает глубокую признательность А. Н. Шерстневу за внимание к настоящей работе.

Литература

1. Сигал И.Е., *Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования*, Математика (сб. переводов) **6** (1962), 1, 65–132.
2. Такесаки М., *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения*, Математика (сб. переводов) **18** (1974), 3, 83–122.
3. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I*, Изв. вузов. Математика (1978), 7, 79–88.
4. Combes F., *Poids associé a une algèbre hilbertienne a gauche*, Compositio Math. **23** (1971), no. 1, 49–77.
5. Connes A., *Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann*, Ann. Inst. Fourier **24** (1974), no. 4, 121–155.
6. Dixmier J., *Les algèbres d'operateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier–Villars, Paris, 1969.
7. Haagerup U., *Normal weights on W^*-algebras*, J. Funct. Anal. **19** (1975), no. 3, 302–317.
8. Kadison R.V., *A generalised Schwarts inequality and algebraic invariants for operator algebras*, Ann. Math. **56** (1952), no. 3, 494–503.
9. Pedersen G., Takesaki M., *The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87.

VI. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА И РЕГУЛЯРНЫЕ ВЕСА

Конструкт. теория функций и функц. анализ,
Казань, Изд–во Казанск. ун–та,
вып. 3, 1981, 73–87.

В работе рассматривается задача описания с помощью замкнутых операторов интегрируемых и интегрируемых с квадратом билинейных форм, естественно возникающая в схеме некоммутативного интегрирования относительно нормального веса на алгебре Неймана (см. [6], [3], [5]). В связи с этой задачей вводится и изучается новый класс весов на алгебре Неймана, названных здесь регулярными.

§1. Предварительные сведения и обозначения

1°. Всюду ниже $\mathcal{M}$ – алгебра Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H; $\mathcal{M}_*$ – пространство, преддвойственное к $\mathcal{M}$; $\mathcal{M}^+$ (соответственно, $\mathcal{M}_*^+$) – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$ (соответственно, $\mathcal{M}_*$) (см. [8]). В терминологии, касающейся весов на алгебрах Неймана, будем следовать [7] и [10]; в частности, если φ – вес на $\mathcal{M}$, то

$$\mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < \infty\}, \quad \mathfrak{n}_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < \infty\},$$

$\mathfrak{m}_\varphi = \mathfrak{n}_\varphi^*\mathfrak{n}_\varphi$. Линеалом веса φ называется линейное многообразие

$$\mathcal{D}_\varphi = \{f \in H \mid \exists\, \lambda > 0 : (xf, f) \le \lambda\varphi(x),\, \forall\, x \in \mathcal{M}^+\};$$

отметим, что для точного нормального веса φ линеал $\mathcal{D}_\varphi$ плотен в H (см. [6]).

2°. Пусть φ – точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$. Опишем конструкцию пространств $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$, следуя [6], [5] и [3]. Пусть $(\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi)$ – каноническое представление $\mathcal{M}$, индуцированное φ, и $\widehat{\ })$: $\mathfrak{n}_\varphi \to \mathfrak{H}_\varphi$ – тождественное вложение, то есть

$$(\widehat{x}, \widehat{y}) = \varphi(y^*x) \ (x, y \in \mathfrak{n}_\varphi) \ \text{ и } \ \pi_\varphi(x)\widehat{y} = \widehat{xy} \ (x \in \mathcal{M},\, y \in \mathfrak{n}_\varphi).$$

Через J, $D^\sharp$, ... будем обозначать известные объекты, связанные с обобщенной гильбертовой алгеброй $\mathfrak{A} = \widehat{\mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*}$ в $\mathfrak{H}_\varphi$ (см. [2], [7]). Линейное вложение $\gamma : \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$, однозначно определяемое условием

$$\gamma(v^*u)(x) = (J\pi_\varphi(x)J\widehat{u},\, \widehat{v}) \quad (x \in \mathcal{M};\, u, v \in \mathfrak{n}_\varphi),$$

задает на $\mathfrak{m}_\varphi$ интегральную норму $\|\cdot\|_\varphi = \|\gamma(\cdot)\|$. Билинейная форма (б. ф.) a на $\mathcal{D}_\varphi$ называется *интегрируемой*, если существует последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi$ (называемая *определяющей* для a) такая, что

$$\lim_{m,n} \|x_n - x_m\|_\varphi = 0 \quad \text{и} \quad a(f,g) = \lim_n (x_n f, g) \quad (f,\, g \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Через $L_1(\varphi)$ обозначается комплексное банахово пространство всех интегрируемых б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$. Изометрический изоморфизм банаховых пространств $L_1(\varphi)$ и $\mathcal{M}_*$, продолжающий вложение $\gamma : \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$, будем обозначать той же буквой γ. Отметим, что для каждого вектора $f \in \mathcal{D}_\varphi$ существует единственный оператор $x_f \in \mathfrak{m}_\varphi^+$ такой, что $\gamma(x_f) = ((\cdot)f, f)$ (см. [4, теорема 2.1]), при этом $\gamma(a)(x_f) = a(f,f)$ для всех $a \in L_1(\varphi)$.

Б. ф. a на $\mathcal{D}_\varphi$ называется *интегрируемой с квадратом*, если существует последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ (называемая *определяющей* для a) такая, что

$$\lim_{m,n} \varphi((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) = 0 \quad \text{и} \quad a(f,g) = \lim_n (x_n f, g) \quad (f, g \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Через $L_2(\varphi)$ обозначим гильбертово пространство всех интегрируемых с квадратом б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$; скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ в $L_2(\varphi)$ задается равенством $(a,b) = \lim_n \varphi(y_n^* x_n)$, где (x_n) и (y_n) – определяющие последовательности для б. ф. a и b соответственно. Вложение $\hat{\ })$: $\mathfrak{n}_\varphi \to \mathfrak{H}_\varphi$ продолжается до изометрического изоморфизма гильбертовых пространств $L_2(\varphi)$ и $\mathfrak{H}_\varphi$, обозначаемого тем же значком $\hat{\ })$.

3°. Нам понадобится следующее понятие порядка и сходимости в классе положительных самосопряженных операторов (см. [13, стр. 62]). Пусть $h, k \geq 0$ – самосопряженные операторы, действующие в H. Будем писать $h \leq k$, если для некоторого (и, следовательно, любого) $\varepsilon > 0$ оператор $h_\varepsilon \leq k_\varepsilon$, где $h_\varepsilon = h(1+\varepsilon h)^{-1}$. Сеть (h_i) положительных самосопряженных операторов возрастает к самосопряженному оператору $h \geq 0$ (пишут $h_i \nearrow h$), если $(h_i)_\varepsilon \nearrow h_\varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$. Отметим, в частности, что $h_\varepsilon \nearrow h$ при $\varepsilon \searrow 0$.

§2. Положительные интегрируемые билинейные формы и операторы

Всюду в этом и следующем параграфе φ – точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$; через $L_1^+(\varphi)$ будем обозначать множество всех положительных б. ф. из $L_1(\varphi)$. В [3, §3] был выделен некоторый класс б. ф. из $L_1^+(\varphi)$, сводящихся к операторам. Здесь мы опишем все б. ф. из $L_1^+(\varphi)$, задаваемые операторами, и изучим возникающий при этом класс интегрируемых операторов.

Пусть $h \geq 0$ – самосопряженный оператор в H, присоединенный к $\mathcal{M}$. Положим по определению $\varphi(h) = \sup_{\varepsilon>0} \varphi(h_\varepsilon)$ (отметим, что $h_\varepsilon \in \mathcal{M}^+$ для каждого $\varepsilon > 0$). Легко видеть, что таким образом корректно определено продолжение веса φ с $\mathcal{M}^+$ на класс всех положительных самосопряженных операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. Справедливость следующей леммы очевидна.

1. Лемма. *Пусть h_i, h, k – положительные самосопряженные операторы, присоединенные к $\mathcal{M}$. Тогда*

(i) *если $h \leq k$, то $\varphi(h) \leq \varphi(k)$;*

(ii) *если* $h_i \nearrow h$, *то* $\varphi(h) = \sup_i \varphi(h_i)$.

2. Определение. Назовем действующий в H самосопряженный оператор $h \geq 0$ *интегрируемым относительно* φ, если h присоединен к $\mathcal{M}$ и $\varphi(h) < \infty$.

В дальнейшем, следуя [3], для самосопряженного оператора $h \geq 0$ такого, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(h^{1/2})$, будем через $e \circ h$ обозначать б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$, заданную равенством:

$$e \circ h(f, g) = (h^{1/2} f, h^{1/2} g).$$

В следующем предложении 3, характеризующем интегрируемые операторы, мы воспользуемся некоторым представлением веса φ в виде $\varphi = \sum_i ((\cdot) f_i, f_i)$, где $(f_i) \subset \mathcal{D}_\varphi$ (см. [10]).

3. Предложение. *Для самосопряженного оператора* $h \geq 0$*, присоединенного к* $\mathcal{M}$*, следующие условия эквивалентны:*

(i) $\varphi(h) < \infty$;

(ii) $(f_i) \subset D(h^{1/2})$ *и* $\sum_i |h^{1/2} f_i|^2 < \infty$;

(iii) $\mathcal{D}_\varphi \subset D(h^{1/2})$ *и б. ф.* $e \circ h \in L_1^+(\varphi)$.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (iii): поскольку для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$ найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$\sup_\varepsilon (h_\varepsilon f, f) \leq \lambda \sup_\varepsilon \varphi(h_\varepsilon) = \lambda \varphi(h) < \infty,$$

то $\mathcal{D}_\varphi \subset D(h^{1/2})$ согласно [13, лемма 7.9]. Равенство $\omega(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \gamma(h_\varepsilon)(x)$ $(x \in \mathcal{M})$ корректно определяет функционал $\omega \in \mathcal{M}_*^+$, так как

$$\omega(1) = \sup_\varepsilon \gamma(h_\varepsilon)(1) = \sup_\varepsilon \varphi(h_\varepsilon) = \varphi(h) < \infty.$$

Если б. ф. $a \in L_1^+(\varphi)$ такова, что $\gamma(a) = \omega$, то для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$:

$$a(f, f) = \omega(x_f) = \sup_\varepsilon \gamma(h_\varepsilon)(x_f) = \sup_\varepsilon (h_\varepsilon f, f) = (h^{1/2} f, h^{1/2} f) = e \circ h(f, f),$$

так что б. ф. $e \circ h = a \in L_1^+(\varphi)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): следующая выкладка справедлива в силу [3, лемма 2]:

$$\sum_i |h^{1/2} f_i|^2 = \sum_i e \circ h(f_i, f_i) = \gamma(e \circ h)(1) < \infty.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): если $\varepsilon > 0$, то

$$\varphi(h_\varepsilon) = \sum_i (h_\varepsilon f_i, f_i) \leq \sum_i |h^{1/2} f_i|^2 < \infty,$$

так что $\varphi(h) = \sup_\varepsilon \varphi(h_\varepsilon) < \infty$.

4. Замечание. Отображение $h \to e \circ h$ множества интегрируемых относительно φ самосопряженных операторов $h \geq 0$ в $L_1^+(\varphi)$ в общем случае не является ни инъективным (см. [3, §3, замечание]), ни сюръективным (см. ниже §4).

5. Следствие. *Если самосопряженный оператор $h \geq 0$ интегрируем относительно φ, то $\varphi(h) = \gamma(e \circ h)(1)$.*

В качестве приложения предложения 3 рассмотрим вопрос об аддитивности введенного в этом параграфе продолжения веса φ.

Пусть $h, k \geq 0$ – самосопряженные операторы в H. Напомним определение обобщенной суммы операторов h и k в смысле [1, гл. 6, §2.5]. Зададим на линеале $D = D(h^{1/2}) \bigcap D(k^{1/2})$ положительную б. ф. a, полагая

$$a(f, g) = (h^{1/2} f, h^{1/2} g) + (k^{1/2} f, k^{1/2} g).$$

Если линеал D плотен в H, то в силу замыкаемости a существует единственный самосопряженный оператор h_a такой, что D – существенная область определения оператора $h_a^{1/2}$ и б. ф. $a(f, g) = (h_a^{1/2} f, h_a^{1/2} g)$ $(f, g \in D)$. Скажем, что в этом случае сумма операторов h и k существует, и будем писать $h \dotplus k = h_a$. Легко видеть, что если h и k присоединены к $\mathcal{M}$, то оператор $h \dotplus k$ также присоединен к $\mathcal{M}$.

6. Следствие. *Пусть существует сумма $h \dotplus k$ самосопряженных операторов $h, k \geq 0$, присоединенных к $\mathcal{M}$. Тогда $\varphi(h \dotplus k) = \varphi(h) + \varphi(k)$.*

Доказательство. Из определения $h \dotplus k$ и замечания на стр. 62 в [13] следуют неравенства $h \dotplus k \geq h$ и $h \dotplus k \geq k$, показывающие в силу пункта (i) леммы 1, что $\varphi(h \dotplus k) = \infty$, коль скоро $\varphi(h) + \varphi(k) = \infty$. Если же $\varphi(h) + \varphi(k) < \infty$, то б. ф. $e \circ (h \dotplus k) = e \circ h + e \circ k \in L_1^+(\varphi)$, так что оператор $h \dotplus k$ интегрируем. Тогда по следствию 4:

$$\varphi(h \dotplus k) = \gamma(e \circ (h \dotplus k))(1) = \gamma(e \circ h)(1) + \gamma(e \circ k)(1) = \varphi(h) + \varphi(k).$$

Следствие доказано.

Мы займемся теперь описанием всех б. ф. $a \in L_1^+(\varphi)$, допускающих представление вида $a = e \circ h$ для интегрируемых операторов $h \geq 0$. Для формулировки теоремы 9, дающей ряд условий на a, эквивалентных возможности такого представления, нам понадобится следующее понятие почти доминируемости.

7. Определение. Скажем, что вес φ *почти доминирует* функционал $\omega \in \mathcal{M}_*^+$, если для каждой последовательности $(x_n) \subset \mathcal{M}$ из

$$\lim_{m,n} \omega((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_n \varphi(x_n^* x_n) = 0$$

всякий раз следует, что

$$\lim_n \omega(x_n^* x_n) = 0.$$

8. Замечание. Понятие почти доминируемости было введено (в случае конечного веса φ на конечной алгебре $\mathcal{M}$) и изучалось Х. Даем [9], так что следующий результат можно рассматривать как некоторое обобщение исследований этого автора, касающихся интегрируемых векторов. В общей ситуации это понятие исследовалось Дж. Наудтсом [12], основной результат которого эквивалентен импликации (i) $\Longleftrightarrow$ (vi) нашей теоремы 9 в случае, когда $\mathcal{M}$ действует в пространстве представления, ассоциированного с φ.

9. Теорема. *Пусть б. ф. $a \in L_1^+(\varphi)$ и $\omega = \gamma(a)(\in \mathcal{M}_*^+)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *б. ф. a замыкаема (в смысле* [1, гл. 6, §1.4]);

(ii) *существует интегрируемый относительно φ самосопряженный оператор $h \geq 0$ такой, что $a = e \circ h$;*

(iii) *существует возрастающая последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$, являющаяся определяющей для a;*

(iv) *существует последовательность $(f_i) \subset \mathcal{D}_\varphi$ такая, что*

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i, f_i);$$

(v) *существует возрастающая сеть $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такая, что $\omega = \sup_i \gamma(x_i)$;*

(vi) *вес φ почти доминирует функционал ω.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii): согласно [1, гл. 6, теорема 2.23] существует единственный самосопряженный оператор $h \geq 0$ такой, что $\mathcal{D}_\varphi$ – существенная область определения оператора $h^{1/2}$ и б. ф. $a = e \circ h$. Легко проверить, что h присоединен к $\mathcal{M}$; $\varphi(h) < \infty$ согласно предложения 3.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): пусть $h = \int_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ – спектральное представление h и $x_n = \int_0^n \lambda\, de(\lambda)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Так как $x_n \nearrow h$ (см. [13, лемма 7.9]), то по лемме 1 $\varphi(h) = \sup_n \varphi(x_n)$; в частности, все $x_n \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. Если $n > m \to \infty$, то $\|x_n - x_m\|_\varphi = \varphi(x_n) - \varphi(x_m) \to 0$. Осталось заметить, что $a(f, f) = (h^{1/2}f, h^{1/2}f) = \lim_n (x_n f, f)$ для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): рассмотрим последовательность $(y_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$, где $y_1 = x_1$, $y_n = x_n - x_{n-1}$ $(n = 2, 3, \dots)$. Тогда $\omega = \lim_n \gamma(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(y_n)$. Заметим, что из неравенства $\gamma(y_n) \leq \|y_n\|_\varphi$ (см. [4, теорема 2.1]) с учетом [8, гл. 1, §4, теорема 1] вытекает возможность представления каждого функционала $\gamma(y_n)$ в виде $\gamma(y_n) = \sum_{k=1}^{\infty}((\cdot)f_k^n, f_k^n)$, $(f_k^n) \subset \mathcal{D}_\varphi$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): в силу [4, теорема 2.1] для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдется оператор $x_n \in \mathfrak{m}_\varphi^+$ такой, что $\gamma(x_n) = \sum_{k=1}^{n}((\cdot)f_k, f_k)$. Последовательность (x_n) очевидно возрастает и $\omega = \sup_n \gamma(x_n)$.

(v) $\Longrightarrow$ (ii): заметим, что для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$:

$$\sup_i (x_i f, f) = \sup_i \gamma(x_i)(x_f) = \gamma(a)(x_f) = a(f, f) < \infty.$$

Поскольку $\mathcal{D}_\varphi$ плотно в H, то в силу [13, лемма 7.9] существует самосопряженный оператор $h \geq 0$ такой, что $x_i \nearrow h$. Ясно, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(h^{1/2})$, h присоединен к $\mathcal{M}$ и б. ф. $a = e \circ h$. Интегрируемость h следует из предложения 3.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): эта импликация очевидна.

(i) $\Longleftrightarrow$ (vi): рассмотрим представление $(\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi)$, индуцированное φ, и перейдем к алгебре Неймана $\pi_\varphi(\mathcal{M})$, $*$-изоморфной $\mathcal{M}$. При этом вес φ перейдет в точный нормальный полуконечный вес φ_π на $\pi_\varphi(\mathcal{M})$ с линеалом $\mathcal{D}_{\varphi_\pi} = J\widehat{\mathfrak{n}_\varphi}$ (см. [3]). Обозначим через a_π б. ф. из $L_1^+(\varphi_\pi)$, соответствующую при этом б. ф. a. Тогда

$$a_\pi(J\widehat{x}, J\widehat{x}) = \omega(x^* x) \quad (x \in \mathfrak{n}_\varphi).$$

В силу установленной эквивалентности условий (i) и (v) б. ф. a и a_π замыкаемы или не замыкаемы только одновременно. Таким образом, остается проверить, что условие (vi) равносильно замыкаемости a_π. Если a_π замыкаема и последовательность $(x_n) \subset \mathcal{M}$ такова, что

$$\lim_{m,n} \omega((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) = 0, \quad \lim_n \varphi(x_n^* x_n) = 0,$$

то, начиная с некоторого номера N все $x_n \in \mathfrak{n}_\varphi$ и при $m, n > N$:

$$a_\pi(J\widehat{x_n} - J\widehat{x_m}, J\widehat{x_n} - J\widehat{x_m}) = \omega((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

$$|J\widehat{x_n}|^2 = \varphi(x_n^* x_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Из замыкаемости a_π тогда следует, что при $n > N$:

$$\omega(x_n^* x_n) = a_\pi(J\widehat{x_n}, J\widehat{x_n}) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

так что вес φ почти доминирует ω. Из приведенных выкладок легко усматривается справедливость и обратного утверждения. Теорема доказана.

В качестве очевидного следствия доказанной теоремы, предложения 3 и результатов Б. Саймона [15] о разложении квадратичных форм приведем следующий некоммутативный аналог известной теоремы Лебега о разложении меры.

10. Следствие. *Пусть $\omega \in \mathcal{M}_*^+$. Среди всех функционалов $\omega^1 \in \mathcal{M}_*^+$ таких, что φ почти доминирует ω^1 и $\omega^1 \leq \omega$ существует наибольший функционал ω_r. Функционал $\omega_s = \omega - \omega_r$ сингулярен с φ в следующем смысле: если $\theta \in \mathcal{M}_*^+$, $\theta \leq \varphi$ и $\theta \leq \omega_s$, то $\theta = 0$.*

§3. Интегрируемые с квадратом билинейные формы и операторы

Здесь устанавливается связь результатов §2 с задачей представления с помощью замкнутых операторов б. ф. из $L_2(\varphi)$, поставленной в работе [5]. С этой целью мы получим, прежде всего, новое описание пространств $L_2(\varphi)$ и $L_1(\varphi)$.

1. Теорема. (i) *Для каждой б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ существует, притом единственный, оператор a_0 в H с областью определения $D(a_0) = \mathcal{D}_\varphi$ такой, что $a(f,g) = (a_0 f, g)$ $(f, g \in \mathcal{D}_\varphi)$.*

(ii) *Обозначим для $a, b \in L_2(\varphi)$ через $a \circ b$ б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$, определенную равенством $a \circ b(f,g) = (a_0 f, a_0 g)$. Тогда*

$$L_1(\varphi) = \{a \circ b \mid a, b \in L_2(\varphi)\}, \quad L_1^+(\varphi) = \{a \circ a \mid a \in L_2(\varphi)\},$$

причем $\gamma(a \circ b) = (\pi_\varphi(\cdot) J\widehat{b}, J\widehat{a})$.

Доказательство. (i). Если $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ – определяющая последовательность для б. ф. $a \in L_2(\varphi)$, то для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$ последовательность $(x_n f)$ фундаментальна в H. Действительно, существует такое $\lambda > 0$, что

$$\begin{aligned} |x_n f - x_m f|^2 &= ((x_n - x_m)^*(x_n - x_m) f, f) \\ &\le \lambda \varphi((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) \to 0 \quad (m, n \to \infty). \end{aligned}$$

Равенство $a_0 f = \lim\limits_n x_n f$ $(f \in \mathcal{D}_\varphi)$ определяет искомый оператор a_0, единственность этого оператора следует из плотности $\mathcal{D}_\varphi$ в H.

(ii). Пусть $a, b \in L_2(\varphi)$ и б. ф. $c \in L_1(\varphi)$ такова, что $\gamma(c) = (\pi_\varphi(\cdot) J\widehat{b}, J\widehat{a})$. Если (x_n) и (y_n) – последовательности из $\mathfrak{n}_\varphi$, определяющие для a и b соответственно, то для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$:

$$\begin{aligned} c(f,f) &= \gamma(c)(x_f) = (\pi_\varphi(x_f) J\widehat{b}, J\widehat{a}) = \lim_n (\pi_\varphi(x_f) J\widehat{y_n}, J\widehat{x_n}) \\ &= \lim_n \gamma(y_n^* x_n)(x_f) = \lim_n (x_n f, y_n f) = (a_0 f, b_0 f) = a \circ b(f,f), \end{aligned}$$

так что в силу поляризационного тождества $c = a \circ b$. Пусть, наоборот, б. ф. $c \in L_1(\varphi)$. Найдутся векторы $\xi, \eta \in \mathfrak{H}_\varphi$ такие, что $\gamma(c) = (\pi_\varphi(\cdot)\xi, \eta)$, причем если $c \in L_1^+(\varphi)$, то можно считать $\xi = \eta$ (см. [3, теорема 3] и [7, следствие 2.16]). Пусть б. ф. $a, b \in L_2(\varphi)$ таковы, что $\widehat{a} = J\eta$ и $\widehat{b} = J\xi$, тогда из приведенной выше выкладки следует равенство $c = a \circ b$. Теорема доказана.

2. Следствие. *Пусть $a, b \in L_2(\varphi)$. Для каждого представления веса φ в виде $\varphi = \sum\limits_i ((\cdot) f_i, f_i)$ $((f_i) \subset \mathcal{D}_\varphi)$ имеет место равенство $(a, b) = \sum\limits_i (a_0 f_i, b_0 f_i)$, причем ряд справа содержит не более чем счетное число ненулевых слагаемых и сходится абсолютно.*

Доказательство. Поскольку $(a, b) = \gamma(a \circ b)(1)$, то достаточно проверить равенство $\sum\limits_i x_{f_i} = 1$. Для этого заметим, что при каждом $x \in \mathfrak{n}_\varphi$:

$$\sum_i (\pi_\varphi(x_{f_i}) J\widehat{x}, J\widehat{x}) = \sum_i \gamma(x^* x)(x_{f_i}) = \sum_i (x^* x f_i, f_i) = \varphi(x^* x) = (J\widehat{x}, J\widehat{x}),$$

и остается учесть, что $J\widehat{\mathfrak{n}_\varphi}$ плотно в $\mathfrak{H}_\varphi$.

3. Определение. Обозначим через $L_2^0(\varphi)$ множество всех б. ф. a из $L_2(\varphi)$, для которых операторы a_0 замыкаемы, и будем через $\overline{a_0}$ обозначать замыкание оператора a_0.

4. Замечание. (а) Класс $L_2^0(\varphi)$ состоит в точности из б. ф. $a \in L_2(\varphi)$, определяемых операторами в смысле [5, §4].

(б) Из результатов [5, §4] и теоремы 1 следует, что для б. ф. $a \in L_2(\varphi)$ следующие условия эквивалентны:

(i) $a \in L_2^0(\varphi)$;

(ii) существует замкнутый оператор k, присоединенный к $\mathcal{M}$, такой, что $a_0 \subset k$;

(iii) интегрируемая б. ф. $a \circ a$ замыкаема.

Отметим также, что для б. ф. $a \in L_2^0(\varphi)$ оператор $\overline{a_0}$ присоединен к $\mathcal{M}$ (см. [5, предложение 3 §4]) и является наименьшим (но, вообще говоря, не единственным – см. [5, замечание 8 §4]) среди операторов k из пункта (ii). В следующем предложении 5 описываются все такие операторы k.

5. Предложение. *Пусть k – замкнутый плотно определенный оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, и векторы $(f_i) \subset \mathcal{D}_\varphi$ таковы, что вес $\varphi = \sum\limits_i ((\cdot)f_i, f_i)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathcal{D}_\varphi \subset D(k)$ и заданная на $\mathcal{D}_\varphi$ б. ф. $(k(\cdot), (\cdot)) \in L_2(\varphi)$;*

(ii) *$\varphi(k^*k) < \infty$;*

(iii) *$(f_i) \subset D(k)$ и $\sum\limits_i |kf_i|^2 < \infty$;*

(iv) *$\mathcal{D}_\varphi \subset D(k)$ и заданная на $\mathcal{D}_\varphi$ б. ф. $(k(\cdot), k(\cdot)) \in L_1(\varphi)$.*

Доказательство. Импликация (i) $\Longrightarrow$ (iv) следует из теоремы 1. То, что (iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii), следует из предложения 3 §2, примененного к оператору $h = k^*k$. Проверим, что (ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть $k = u|k|$ – полярное разложение k и $|k| = \int\limits_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ – спектральное представление оператора $|k| = (k^*k)^{1/2}$. Рассмотрим последовательность $x_n = u(\int\limits_0^n \lambda\, de(\lambda))$ и проверим, что она является определяющей для б. ф. $a = (k(\cdot), (\cdot))$ на $\mathcal{D}_\varphi$. Действительно, из неравенства $x_n^*x_n = \int\limits_0^n \lambda^2\, de(\lambda) \le k^*k$ следует, что $\varphi(x_n^*x_n) \le \varphi(k^*k) < \infty$, так как все $x_n \in \mathfrak{n}_\varphi$. Полагая $y_n = x_n^*x_n$, имеем в силу [13, лемма 7.9] $y_n \nearrow k^*k$, так что $\varphi(k^*k) = \sup\limits_n \varphi(y_n)$ по лемме 1 §2 и, следовательно, при $n > m \to \infty$:

$$\varphi((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) = \varphi(y_n) - \varphi(y_m) \to 0.$$

Остается заметить, что $kf = \lim\limits_n x_n f$ для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$. Предложение доказано.

6. Замечание. Следуя [5], положим $L_2^\sharp(\varphi) = \{a \in L_2(\varphi) \mid a^* \in L_2(\varphi)\}$, где через a^* обозначается б. ф. на $\mathcal{D}_\varphi$, сопряженная к б. ф. a. Тогда из пункта (i) теоремы 5 следует, что $L_2^\sharp(\varphi) \subset L_2^0(\varphi)$ (см. также [5, теорема 4 §4]), причем $D^\sharp = \{\widehat{a} \mid a \in L_2^\sharp(\varphi)\}$ (см. [5, теорема 2 §3]). Из последнего утверждения, в частности, следует, что $L_2^\sharp(\varphi)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $\langle a,b\rangle = \frac{1}{2}[(a,b)+(b^*,a^*)]$. Мы приведем сейчас другое описание этого гильбертова пространства, корректность которого следует из предложения 5. Для этого зафиксируем некоторое представление $\varphi = \sum_{i\in I}((\cdot)f_i,f_i)$ $((f_i)\subset\mathcal{D}_\varphi)$ веса φ на $\mathcal{M}$ и рассмотрим множество всех плотно заданных операторов k, присоединенных к $\mathcal{M}$, таких, что

(i) $(f_i)\subset D(k)\bigcap D(k^*)$,

(ii) $\sum_{i\in I}[|kf_i|^2+|k^*f_i|^2]<\infty$.

Два таких оператора k_1 и k_2 назовем эквивалентными, если $k_1f_i = k_2f_i$ для всех $i\in I$. Тогда в каждом классе попарно эквивалентных операторов найдется замкнутый оператор и множество всех классов эквивалентности превращается в гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle k_1,k_2\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i\in I}[(k_1f_i,k_2f_i)+(k_2^*f_i,k_1^*f_i)].$$

Отметим, что для случая конечного веса φ описанное выше гильбертово пространство впервые было построено в работе А. С. Холево [11] и нашло применение в задачах некоммутативной статистики.

Мы закончим этот параграф описанием множества $\widehat{L_2^0(\varphi)}$. С этой целью для каждого вектора $\xi\in\mathfrak{H}_\varphi$ обозначим через $p(\xi)$ линейный оператор в $\mathfrak{H}_\varphi$ с областью определения $\mathfrak{A}_0' = J\widehat{\mathfrak{n}_\varphi}$, заданный равенством $p(\xi)\eta = \pi'(\eta)\xi$ $(\eta\in\mathfrak{A}_0')$, где $\pi'(\eta)$ – оператор правого умножения на вектор $\eta\in\mathfrak{A}_0'$ (см. [2], [7]). Пусть $\mathfrak{H}_\varphi^0$ – множество всех векторов $\xi\in\mathfrak{H}_\varphi$, для которых оператор $p(\xi)$ имеет замыкание, обозначаемое через $\pi(\xi)$. Следующее простое утверждение показывает, что в данной ситуации множество $\mathfrak{H}_\varphi^0$ и операторы $\pi(\xi)$ $(\xi\in\mathfrak{H}_\varphi^0)$ совпадают с соответствующими объектами, введенными в [14, 2.1].

7. Лемма. *Пусть для $\xi\in\mathfrak{H}_\varphi$ ограничение оператора $p(\xi)$ на $\mathfrak{A}' = J\mathfrak{A}$ замыкаемо. Тогда $\xi\in\mathfrak{H}_\varphi^0$ и $\mathfrak{A}'$ – существенная область определения оператора $\pi(\xi)$.*

Доказательство этого утверждения очевидно в силу существования в $\mathfrak{n}_\varphi$ возрастающей сети $x_i\nearrow 1$ (см., например, [7]).

8. Предложение. *Пусть б. ф. $a\in L_2(\varphi)$. Тогда $a\in L_2^0(\varphi)$ в том и только том случае, когда вектор $\widehat{a}\in\mathfrak{H}_\varphi^0$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 9 §2 перейдем к алгебре Неймана $\pi_\varphi(\mathcal{M})$ с точным нормальным полуконечным весом φ_π, при этом б. ф. $a\circ a$ из $L_1^+(\varphi)$ перейдет в б. ф. $(a\circ a)_\pi\in L_1^+(\varphi_\pi)$ такую, что $\gamma(a\circ a)(x^*x) = (a\circ a)_\pi(J\widehat{x},J\widehat{x})$ $(x\in\mathfrak{n}_\varphi)$. Заметим, что замыкаемость б. ф. a (соответственно, оператора $p(\widehat{a})$) равносильно замыкаемости билинейной формы $a\circ a$ (соответственно, б. ф. $(a\circ a)_\pi$), а это в силу теоремы 9 §2 равносильно почти доминируемости функционала $\gamma(a\circ a)$ на $\mathcal{M}$ (соответственно, функционала $((\cdot)J\widehat{a},J\widehat{a})$ на $\pi_\varphi(\mathcal{M})$) весом φ (соответственно, весом φ_π). Однако легко видеть, что два последних условия эквивалентны. Предложение доказано.

§4. Регулярные веса

В этом параграфе мы займемся изучением точных нормальных полуконечных весов φ, для которых замыкаемы все б. ф. из $L_1^+(\varphi)$ или, что то же самое, $L_2(\varphi) = L_2^0(\varphi)$. С этой целью мы выделим новый класс весов на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, несингулярных (в смысле следствия 10 §2) с каждым нулевым функционалом из $\mathcal{M}_*^+$.

1. Определение. Назовем φ на $\mathcal{M}$ *регулярным,* если для каждого $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ $(\omega \neq 0)$, найдется такой функционал $\omega' \in \mathcal{M}_*^+$ $(\omega' \neq 0)$, что $\omega' \leq \omega$ и $\omega' \leq \varphi$.

2. Теорема. *Каждый регулярный нормальный вес φ точен, а каждый точный нормальный след τ регулярен.*

Доказательство. Если e – носитель φ и $e \neq 1$, то найдется ненулевой функционал $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ с носителем, не превосходящим $1 - e$. Но тогда для $\omega' \in \mathcal{M}_*^+$ из $\omega' \leq \omega$ и $\omega' \leq \varphi$ необходимо следует, что $\omega' = 0$. Для проверки второго утверждения предположим сначала, что след τ полуконечен. Если $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ $(\omega \neq 0)$, то $\omega = \tau(h\cdot)$ для некоторого самосопряженного оператора $h \geq 0$, присоединенного к $\mathcal{M}$ (см. [13, теорема 5.12]). Пусть $h = \int\limits_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ – спектральное представление h и число $n > 0$ таково, что оператор $h_n = \int\limits_0^n \lambda\, de(\lambda) \neq 0$. Полагая $\omega' = \tau(h_n\cdot)$, если $\|h_n\| \leq 1$, и $\omega' = \frac{1}{\|h_n\|}\tau(h_n\cdot)$, если $\|h_n\| > 1$, имеем в обоих случаях $\omega' \leq \omega$, $\omega' \leq \tau$ и $\omega' \neq 0$, так что регулярность τ установлена. Переходя к общему случаю, обозначим через p наибольший проектор в сильном замыкании $\mathfrak{m}_\tau$ и рассмотрим точный нормальный полуконечный след τ_p, являющийся редукцией τ на алгебру Неймана $p\mathcal{M}p$ (см. [8, гл. 1, §6.1, следствие 2]). Так как p лежит в центре $\mathcal{M}$, то для каждого $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ $\omega = \omega(p \cdot p) + \omega((1-p)\cdot(1-p))$, так что регулярность τ есть следствие регулярности τ_p. Теорема доказана.

3. Предложение. *Вес φ на $\mathcal{M}$ регулярен тогда и только тогда, когда для каждого $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ найдется последовательность $(f_i) \subset \mathcal{D}_\varphi$ такая, что $\omega = \sum\limits_{i=1}^\infty ((\cdot)f_i, f_i)$.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Для проверки необходимости предположим, что $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ $(\omega \geq 0)$, и рассмотрим совокупность всех наборов ненулевых векторов из $\mathcal{D}_\varphi$, обладающих следующим свойством: для любого конечного семейства векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из данного набора функционал $\sum\limits_{k=1}^n ((\cdot)f_k, f_k) \leq \omega$. По лемме Цорна существует максимальный среди таких наборов, обозначим его через $(f_i)_{i\in I}$. Отметим, что I не более чем счетно, так как $\sum\limits_{i\in I} |f_i|^2 \leq \omega(1) < \infty$. Положим $\theta = \sum\limits_{i\in I}((\cdot)f_i, f_i)\,(\in \mathcal{M}_*^+)$ и проверим, что $\omega = \theta$. Действительно, если $\rho = \omega - \theta \neq 0$, то в силу регулярности φ найдется функционал $\rho' \in \mathcal{M}_*^+$ $(\rho' \neq 0)$ такой, что $\rho' \leq \rho$ и $\rho' \leq \varphi$. Но тогда в силу [8, гл. 1, §4.2, теорема 1] найдется ненулевой вектор $f \in \mathcal{D}_\varphi$ с условием $((\cdot)f, f) \leq \rho'$, что противоречит максимальности набора $(f_i)_{i\in I}$.

4. Следствие. *Пусть $\mathcal{B}(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов в H. Вес φ на $\mathcal{B}(H)$ регулярен тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_\varphi = H$.*

Доказательство необходимости этого условия следует из [8, гл. 1, §4.1, лемма 1], достаточность очевидна.

5. Следствие. *Для точного нормального полуконечного веса φ следующие условия эквивалентны:*

(i) *вес φ регулярен,*
(ii) *каждая б. ф. $a \in L_1^+(\varphi)$ замыкаема,*
(iii) $L_2^0(\varphi) = L_2(\varphi)$.

Последнее утверждение усиливается в следующей теореме 6 и следствии 7 из нее, показывающих, что для регулярного нормального полуконечного веса φ описание б. ф. из $L_1^+(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$ с помощью замкнутых операторов корректно (ср. замечание 4 §2 и [5, замечание 8 §4]).

6. Теорема. *Пусть φ – регулярный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ и б. ф. $a \in L_1^+(\varphi)$. Существует, притом единственный, самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$, такой, что $\mathcal{D}_\varphi \subset D(h^{1/2})$ и $a = e \circ h$. При этом $\mathcal{D}_\varphi$ – существенная область определения оператора $h^{1/2}$.*

Доказательство. В проверке нуждается лишь утверждение о единственности h. Предположим, что самосопряженный оператор $k \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$, также удовлетворяет условиям $\mathcal{D}_\varphi \subset D(k^{1/2})$, $a = e \circ k$. Пусть $f \in D(h^{1/2})$ и векторы $(f_i) \subset \mathcal{D}_\varphi$ таковы, что функционал $((\cdot)f, f) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i, f_i)$ на $\mathcal{M}$ (см. предложение 3). Тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(k_\varepsilon f_i, f_i) \leq \sum_{i=1}^{n}|k^{1/2}f_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}|h^{1/2}f_i|^2 = \sup_\varepsilon \sum_{i=1}^{n}(h_\varepsilon f_i, f_i)\\ \leq \sup_\varepsilon (h_\varepsilon f, f) = |h^{1/2}f|^2.\end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(k_\varepsilon f_i, f_i) = (k_\varepsilon f, f) \leq |h^{1/2}f|^2,$$

откуда $\sup\limits_\varepsilon (k_\varepsilon f, f) \leq |h^{1/2}f|^2$. Согласно [13, лемма 7.9], отсюда следует, что $f \in D(k^{1/2})$ и $|k^{1/2}f| = |h^{1/2}f|$. Поменяв местами в этом рассуждении операторы h и k, получаем, что $D(h^{1/2}) = D(k^{1/2})$ и $|k^{1/2}f| = |h^{1/2}f|$ для всех $f \in D(h^{1/2})$. Равенство $h = k$ теперь следует из единственности полярного разложения оператора.

7. Следствие. *Пусть в условиях теоремы 6 б. ф. $a \in L_2(\varphi)$. Существует, притом единственный, замкнутый оператор k, присоединенный к $\mathcal{M}$, такой, что $a_0 \subset k$ (и, следовательно, $k = \overline{a_0}$).*

Доказательство. Как и в теореме 6 достаточно установить лишь единственность k, т. е. проверить, что $k = \overline{a_0}$. Но, применяя теорему 6 к б. ф. $a = e \circ (k^* k)$

(см. предложение 5 §3), получаем, что $\mathcal{D}_\varphi$ – существенная область определения оператора $|k| = (k^*k)^{1/2}$, а значит и оператора k.

8. Замечание. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра Неймана с циклическим и отделяющим вектором $f_0 \in H$. М. Такесаки [2, теорема 15.1] показал, что для каждого $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ существует самосопряженный оператор $h_\omega \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$, такой, что $f_0 \in D(h_\omega)$ и $\omega = ((\cdot)h_\omega f_0, h_\omega f_0)$, и поставил вопрос о единственности такого оператора h_ω. Ф. Пердризе [14, предложение 6.6] показал, что в общем случае оператор h_ω здесь не единственен и установил единственность h_ω в случае конечной алгебры $\mathcal{M}$. Повторяя рассуждения, проводившиеся при доказательстве нашей теоремы 6, нетрудно заметить, что регулярность конечного веса $\varphi_0 = ((\cdot)f_0, f_0)$ на $\mathcal{M}$ обеспечивает единственность всех операторов h_ω, причем $\mathcal{D}_{\varphi_0} = \mathcal{M}' f_0$ является их существенной областью определения. При подготовке этой статьи к печати автору стало известно о результате К. Скау [16, теорема 3.1], установившего, что единственность всех h_ω влечет конечность алгебры $\mathcal{M}$. С учетом [5, теорема 1 §6] отсюда следует, что вес φ_0 регулярен тогда и только тогда, когда алгебра Неймана $\mathcal{M}$ конечна.

Мы закончим описанием регулярных нормальных полуконечных весов на алгебре $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в H.

9. Предложение. *Нормальный полуконечный вес φ на $\mathcal{B}(H)$ регулярен тогда и только тогда, когда $\varphi = \mathrm{Tr}\,(h\cdot)$, где Tr – канонический след на $\mathcal{B}(H)$, а $h \geq 0$ – самосопряженный оператор в H, обладающий ограниченным обратным.*

Доказательство. Каждый нормальный полуконечный вес φ на $\mathcal{B}(H)$ имеет вид $\varphi = \mathrm{Tr}\,(h\cdot)$ для некоторого самосопряженного оператора $h \geq 0$ (см. [13, теорема 5.12]). Согласно [6, предложение 9] линеал $\mathcal{D}_\varphi$ совпадает в данном случае с $R(h^{1/2})$ – областью значений оператора $h^{1/2}$. Если вес φ регулярен, то φ точен в силу теоремы 2, так что оператор h несингулярен. Так как $\mathcal{D}_\varphi = H$ (см. следствие 4), то оператор $h^{-1/2}$ определен всюду и по теореме о замкнутом графике ограничен, откуда и $h^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Наоборот, если существует $h^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, то необходимо $\mathcal{D}_\varphi = R(h^{1/2}) = H$, так что по следствию 4 вес φ регулярен.

10. Следствие. *Если гильбертово пространство H бесконечномерно, то ни один нормальный вес на $\mathcal{B}(H)$ не является регулярным.*

В заключении автор выражает искреннюю признательность А. Н. Шерстневу за внимание к настоящей работе.

Литература

1. Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, М.: Мир, 1972, 740 с.
2. Такесаки М., *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения*, Математика (сб. переводов) **18** (1974), 3, 83–122; 4, 34–63.
3. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса,* I, Изв. вузов. Математика (1978), 7, 79–88.
4. Трунов Н. В., *Локально конечные веса на алгебрах Неймана*, Казан. ун-т, Казань, 1978, 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101-79 Деп.)
5. Трунов Н. В., *О некоммутативном аналоге пространства L_2*, Конструкт. теория функций и функц. анализ, вып. 2, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1979, с. 93–114.

6. Шерстнев А. Н., *Об одном некоммутативном аналоге пространства* L_1, Матем. анализ, Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1978, 112–123.
7. Combes F., *Poids associés à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compos. Math. **23** (1971), no. 1, 49–77.
8. Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, 2^e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1969, 367 p.
9. Dye H., *The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 243–280.
10. Haagerup U., *Normal weights on W^*-algebras*, J. Funct. Anal. **19** (1975), no. 3, 302–317.
11. Holevo A. S., *Commutation superoperator of a state and its applications to the noncommutative statistics*, Repts. Math. Phys. **12** (1977), no. 2, 251–271.
12. Naudts J., *A generalized entropy function*, Comm. Math. Phys. **37** (1974), no. 2, 175–182.
13. Pedersen G., Takesaki M., *The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87.
14. Perdrizet F., *Éléments positifs relatifs à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compos. Math. **23** (1971), no. 1, 25–47.
15. Simon B., *A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorem*, J. Funct. Anal. **28** (1978), 377-385.
16. Skau C. F., *Positive self-adjoint extensions of operators affiliated with a von Neumann algebra*, Math. Scand. **44** (1979), no. 1, 171–195.

VII. ПРОСТРАНСТВА L_p, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ВЕСОМ НА ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ НЕЙМАНА

Конструкт. теория функций и функц. анализ,
Казань, Изд–во Казанск. ун–та,
вып. 3, 1981, 88–93.

В работе строится шкала пространств L_p $(1 \leq p \leq \infty)$, ассоциированная с точным нормальным локально измеримым весом на полуконечной алгебре Неймана. Для случая следа соответствующая конструкция была предложена в работах [1] $(p = 1, 2)$, [6], [8], [10]. Случай нормального состояния рассматривался автором в работе [5].

Всюду ниже мы будем предполагать, что $\mathcal{M}$ – полуконечная алгебра Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, и τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Через $\mathfrak{L}_p(\tau)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ обозначим банахово пространство измеримых операторов, интегрируемых с p-той степенью относительно τ (см. [6], [8], [10]); напомним, что норма $\|\cdot\|_p^\tau$ в $\mathfrak{L}_p(\tau)$ задается равенством

$$\|x\|_p^\tau = \tau(|x|^p)^{1/p} \quad (x \in \mathfrak{L}_p(\tau)).$$

Через $\mathfrak{L}(\mathcal{M})$ будем обозначать класс всех локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов в H (см. [10]). Отметим, что $\mathfrak{L}(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй относительно сильных (т. е. замыкания обычных) алгебраических операций. Условимся в дальнейшем значком "$\cdot$" обозначать сильное произведение операторов, а сумму локально измеримых операторов всегда понимать в сильном смысле. В обозначениях и терминологии, касающихся нормальных весов на алгебрах Неймана, будем следовать работам [9] и [2].

1. Определение. Пусть φ – нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ и самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$, является "производной" φ по τ (т. е. $\varphi = \tau(h\cdot)$ в смысле [9, теорема 5.12]). Назовем такой вес *локально измеримым*, если $h \in \mathfrak{L}(\mathcal{M})$.

2. Замечание. Определение локально измеримого веса φ корректно, т. е. не зависит от выбора следа τ на $\mathcal{M}$. Действительно, пусть $\varphi = \tau_1(h_1\cdot)$, где τ_1 – еще один точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Тогда $h_1 = h \cdot k$, где $k \geq 0$ – самосопряженный несингулярный оператор в H, присоединенный к центру $\mathcal{M}$, такой, что $\tau = \tau_1(k\cdot)$ (см. [9, предложение 4.3]). Легко видеть, что $k \in \mathfrak{L}(\mathcal{M})$ (см. [10, определение 2.2]), так что, если $h \in \mathfrak{L}(\mathcal{M})$, то оператор h_1 локально измерим как сильное произведение локально измеримых операторов.

В дальнейшем мы будем предполагать фиксированным точный нормальный полуконечный и локально измеримый вес $\varphi = \tau(h\cdot)$ на $\mathcal{M}$.

3. Определение. Для каждого $1 \le p < \infty$ и $0 \le \alpha \le 1$ обозначим через $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ линеал операторов из $\mathcal{M}$:

$$\mathfrak{m}_\alpha^{1/p} = \{x \in \mathcal{M} \mid h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} \in \mathfrak{L}_p(\tau)\}$$
$$= \{x \in \mathcal{M} \mid \tau(|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p) < \infty\}$$

и положим

$$\|x\|_{p,\alpha} = \tau(|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p)^{1/p} \quad (x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p}).$$

4. Теорема. *Линеал $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ не зависит от выбора следа τ и функция $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ является нормой на $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$, также не зависящей от τ.*

Доказательство. Пусть τ_1 – еще один точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $\varphi = \tau_1(h_1 \cdot)$, $\tau = \tau_1(k\cdot)$ и $h_1 = h \cdot k$ (см. замечание 2). Тогда для каждого $x \in \mathcal{M}$ в силу перестановочности оператора k с h, h_1 и x имеем:

$$|h_1^{\alpha/p} \cdot x \cdot h_1^{(1-\alpha)/p}|^p = k \cdot |h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p.$$

Положим $k_\varepsilon = k(1 + \varepsilon k)^{-1}$ для каждого $\varepsilon > 0$. В силу перестановочности операторов k и $|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p$ сеть $k_\varepsilon \cdot |h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p$ возрастает к оператору $k \cdot |h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p$ при $\varepsilon \searrow 0$ в смысле [9, стр. 62]. Тогда из [9, предложение 4.2] следует, что

$$\tau(|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p) = \sup_\varepsilon \tau_1(k_\varepsilon \cdot |h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p)$$
$$= \tau_1(|h_1^{\alpha/p} \cdot x \cdot h_1^{(1-\alpha)/p}|^p),$$

откуда и следует независимость линеала $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ и функции $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ от выбора следа τ. То, что $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ — преднорма на $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$, следует из линейности отображения $x \to h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}$ $(x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p})$ с учетом того, что $\|\cdot\|_p^\tau = \tau(|\cdot|^p)^{1/p}$ – норма на $\mathfrak{L}_p(\tau)$. В силу точности веса φ оператор h несингулярен, так что равенство $\|x\|_{p,\alpha} = 0$ $(x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p})$, равносильное условию $h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} = 0$, имеет место только для $x = 0$. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathfrak{m}_\varphi$ линейную оболочку конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < \infty\}$ и пусть $\|\cdot\|_\varphi$ – "интегральная" норма на $\mathfrak{m}_\varphi$ (см. [2, §2]). Следующее утверждение включает норму $\|\cdot\|_\varphi$ в шкалу $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.

5. Следствие. *Если $x \in \mathfrak{m}_\varphi$, то $x \in \mathfrak{m}_{1/2}^1$ и $\|x\|_{1,1/2} = \|x\|_\varphi$.*

Доказательство. В [3, лемма 3.2 и следствие 3.3] было установлено, что для $x \in \mathfrak{m}_\varphi$ оператор $h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2} \in \mathfrak{L}_1(\tau)$ и

$$\|x\|_\varphi = \tau(|h^{1/2} \cdot x \cdot h^{1/2}|),$$

если оператор h в представлении веса $\varphi = \tau(h\cdot)$ является измеримым. Однако легко видеть, что доказательство леммы 3.2 [3] дословно переносится и на случай локально измеримого оператора h.

6. Следствие. *Пусть оператор* $x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ *инвариантен относительно группы* $\Sigma = \{\sigma_t\}$ $(t \in \mathbb{R})$ *модулярных автоморфизмов* $\mathcal{M}$, *ассоциированной с* φ (*см.* [9]). *Тогда*

$$\|x\|_{p,\alpha} = \varphi(|x|^p)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty,\ 0 \le \alpha \le 1).$$

Доказательство. Поскольку группа Σ в данном случае имеет вид $\sigma_t(\cdot) = h^{it}(\cdot)h^{-it}$ $(t \in \mathbb{R})$ (см. [9, теорема 4.6]), то равенство $\sigma_t(x) = x$, верное по условию для всех $t \in \mathbb{R}$, означает, что операторы x и h перестановочны. В таком случае оператор

$$|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p = h \cdot |x|^p = \sup_{\varepsilon > 0} h_\varepsilon |x|^p,$$

где $h_\varepsilon = h(1 + \varepsilon h)^{-1}$ (см. [9, стр. 62]). Тогда в силу [9, предложение 4.2]

$$\|x\|_{p,\alpha} = \sup_{\varepsilon>0} \tau(h_\varepsilon |x|^p)^{1/p} = \varphi(|x|^p)^{1/p}.$$

7. Замечание. Отметим, что для конечного веса φ линеал $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p} = \mathcal{M}$ для всех $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha \le 1$, и норма $\|\cdot\|_{p,1/2}$ совпадает с нормой $\|\cdot\|_p$, введенной в работе [5].

8. Определение. Для каждого $1 \le p < \infty$ и $0 \le \alpha \le 1$ будем через $L_{p,\alpha}(\varphi)$ обозначать банахово пространство, являющееся пополнением $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ по норме $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.

9. Теорема. *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Для каждого* $0 \le \alpha \le 1$ *банахово пространство* $L_{p,\alpha}(\varphi)$ *изометрически изоморфно банахову пространству* $\mathfrak{L}_p(\tau)$.

Доказательство. Рассмотрим линейную изометрию

$$\mathfrak{m}_\alpha^{1/p} \ni x \to h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} \in \mathfrak{L}_p(\tau)$$

и проверим, что $h^{\alpha/p}\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}h^{(1-\alpha)/p}$ (образ $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ при этом отображении) плотен в $\mathfrak{L}_p(\tau)$. Пусть $h = \int\limits_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ – спектральное представление оператора h и $e_n = \int\limits_{1/n}^n de(\lambda)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Введем множество $\mathfrak{m} = \bigcup\limits_{m,n=1}^\infty e_m \mathfrak{m}_\tau e_n$, где $\mathfrak{m}_\tau = \{x \in \mathcal{M} \mid \tau(|x|) < \infty\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{m}$ – $*$-подалгебра, ультраслабо плотная в $\mathcal{M}$, причем $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\tau$ (напомним, что $\mathfrak{m}_\tau$ – $*$-идеал, ультраслабо плотный в $\mathcal{M}$ [6]). Ясно, что $\mathfrak{m}_\tau \subset \mathfrak{L}_p(\tau)$, так что $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{L}_p(\tau)$ для каждого $1 \le p < \infty$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно установить, что

а) $\mathfrak{m}$ плотно в $\mathfrak{L}_p(\tau)$ $(1 \le p \le \infty)$;

б) для каждого $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha \le 1$ имеет место включение $\mathfrak{m} \subset h^{\alpha/p}\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}h^{(1-\alpha)/p}$.

Для проверки (а) воспользуемся известным отождествлением $\mathfrak{L}_p(\tau)^* = \mathfrak{L}_q(\tau)$ $(1/p + 1/q = 1)$, осуществляемым с помощью формулы $\{x, y\} \to \tau(x \cdot y)$ $(x \in \mathfrak{L}_p(\tau),\ y \in \mathfrak{L}_q(\tau))$ (см. [8], [10]). Допустим, что оператор $z \in \mathfrak{L}_q(\tau)$ таков, что для всех $x \in \mathfrak{m}_\tau$, $m, n = 1, 2, \ldots$:

$$\tau((e_m x e_n) \cdot z) = \tau(x \cdot e_n \cdot z e_m) = 0.$$

Поскольку $e_n \cdot z e_m \in \mathfrak{L}_q(\tau)$ и $\mathfrak{m}_\tau$ плотно в $\mathfrak{L}_p(\tau)$ (см. [6]), то для всех $m, n = 1, 2, \ldots$ оператор $e_n \cdot z e_m = 0$. Учитывая, что $e_n \nearrow 1$ при $n \to \infty$, получаем $z e_m = 0$, так что $0 = (z e_m)^* = e_m \cdot z$ для всех $m = 1, 2, \ldots$. Отсюда $z^* = 0$ и, следовательно, $z = 0$. Таким образом, (а) доказано.

Проверим (б). В силу включения $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\tau \subset \mathfrak{L}_p(\tau)$ достаточно, очевидно, убедиться в том, что для произвольного $x \in \mathfrak{m}_\tau$ и любой пары чисел $m, n = 1, 2, \ldots$ найдется оператор $y \in \mathcal{M}$ такой, что

$$e_m x e_n = h^{\alpha/p} \cdot y \cdot h^{(1-\alpha)/p}. \tag{$*$}$$

Учитывая, что операторы $h^{-\alpha/p} e_m = (h e_m)^{-\alpha/p}$ и $h^{(1-\alpha)/p} e_n = (heh)^{(\alpha-1)/p}$ ограничены (и, следовательно, принадлежат $\mathcal{M}$), положим

$$y = h^{-\alpha/p} \cdot (e_m x e_n) \cdot h^{(\alpha-1)/p} \ (\in \mathcal{M}).$$

Тогда $(*)$ очевидно выполнено и (б) установлено. Теорема доказана.

10. Следствие. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ *и* $0 \le \alpha \le 1$. *Тогда сопряженное к* $L_{p,\alpha}(\varphi)$ *банахово пространство* $L_{p,\alpha}(\varphi)^*$ *изометрически изоморфно* $L_{q,\alpha}(\varphi)$.

11. Замечание. Из доказательства теоремы 9 следует, что линеал $\mathfrak{m}$ плотен в каждом из пространств $L_{p,\alpha}(\varphi)$, причем форма $\{x, y\} \to \tau(h^\alpha \cdot x \cdot h^{1-\alpha} y)$, заданная на $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$, определяет некоторую каноническую двойственность пространств $L_{p,\alpha}(\varphi)$ и $L_{q,1-\alpha}(\varphi)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Таким образом, эта форма исполняет здесь роль формы

$$\{x, y\} \to \varphi(xy) = \varphi(yx) \qquad (x,\, y \in \mathfrak{m}_\varphi)$$

в случае, когда φ – след.

Мы рассмотрим теперь вопрос о содержательном описании пространств $L_{p,\alpha}(\varphi)$. Отметим, что для конечного веса φ в работе [5] было получено описание пространств $L_{p,1/2}(\varphi)$ с помощью билинейных форм, заданных на плотном в h линеале веса $\mathcal{D}_\varphi$.

Введем для каждого $1 \le p < \infty$ и $0 \le \alpha \le 1$ линеал локально измеримых операторов

$$\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi) = \{x \in \mathfrak{L}(\mathcal{M}) \mid h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} \in \mathfrak{L}_p(\tau)\}$$

и положим $\|x\|_{p,\alpha} = \tau(|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p)^{1/p}$ для каждого $x \in \mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$. Ясно, что при этом $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p} \subset \mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$ и ограничение функции $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ на $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ совпадает с нормой, введенной определением 3.

12. Теорема. *Пусть $\varphi = \tau(h\cdot)$ – точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ такой, что операторы h и h^{-1} принадлежат $\mathfrak{L}(\mathcal{M})$. Тогда для всех $1 \leq p < \infty$ и $0 \leq \alpha \leq 1$:*

(i) *линеал $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$ не зависит от выбора следа τ и функция $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ – норма на $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$, также не зависящая от τ;*

(ii) *пространство $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ и линеал $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ плотен в $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$.*

13. Замечание. Из замечания 2 следует, что класс весов φ, введенный условием теоремы 12, не зависит от выбора следа τ на $\mathcal{M}$. Если, в частности, алгебра Неймана $\mathcal{M}$ конечна, то в этот класс попадают все точные нормальные полуконечные веса на $\mathcal{M}$.

Доказательство теоремы 12. То обстоятельство, что $\mathfrak{L}(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй относительно сильных алгебраических операций, позволяет для проверки (i) сослаться на выкладки, проводившиеся при доказательстве теоремы 4. Для проверки (ii) заметим, что отображение $x \to h^{-\alpha/p}\cdot x\cdot h^{(\alpha-1)/p}$ является линейной изометрией $\mathfrak{L}_p(\tau)$ на $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$, причем линеал $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ есть образ плотного в $\mathfrak{L}_p(\tau)$ линеала $h^{\alpha/p}\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}h^{(1-\alpha)/p}$ (см. доказательство теоремы 9). Таким образом, $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ плотно в банаховом пространстве $\mathfrak{L}_{p,\alpha}(\varphi)$ и теорема доказана.

В приводимом ниже следствии 14 предлагается другой, более естественный (с точки зрения схемы интегрирования относительно следа), способ введения пространств $\mathfrak{L}_{1,1/2}(\varphi)$ и $\mathfrak{L}_{2,0}(\varphi)$. Справедливость этого следствия очевидным образом вытекает из теоремы 12, следствия 5 и результатов работы [4].

14. Следствие. *Обозначим через $\mathfrak{L}^+(\mathcal{M})$ множество положительных самосопряженных операторов из $\mathfrak{L}(\mathcal{M})$ и положим для каждого $x \in \mathfrak{L}^+(\mathcal{M})$: $\varphi(x) = \sup\limits_{\varepsilon>0}\varphi(x_\varepsilon)$, где $x_\varepsilon = x(1+\varepsilon x)^{-1}$. Тогда в условиях теоремы 12:*

(i) *$\mathfrak{L}_{1,1/2}(\varphi)$ есть линейная оболочка конуса*

$$\mathfrak{L}_1^+ = \{x \in \mathfrak{L}^+(\mathcal{M}) \mid \varphi(x) < \infty\}$$

и $\|x\|_{1,1/2} = \varphi(x)$ для каждого $x \in \mathfrak{L}_1^+$;

(ii) *$\mathfrak{L}_{2,0}(\varphi) = \{x \in \mathfrak{L}(\mathcal{M}) \,|\, \varphi(x^*x) < \infty\}$ и норма $\|\cdot\|_{2,0}$ в $\mathfrak{L}_{2,0}(\varphi)$ индуцируется скалярным произведением*

$$\{x,\, y\} = \tau((h^{1/2}x)\cdot(h^{1/2}y)^*).$$

15. Замечание. Из результатов [4, §6] и следствия 13 вытекает, что для конечной алгебры Неймана $\mathcal{M}$ и конечного веса φ пространство $\mathfrak{L}_{2,0}(\varphi)$ совпадает с пространством $L_2(\mathcal{M},\varphi)$, впервые введенном в работе [7].

Литература

1. Сигал И., *Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования*, Математика (сб. перев.) **6** (1962), 1, 65–132.
2. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса,* I, Изв. вузов. Математика (1978), 7, 79–88.
3. Трунов Н. В., *Локально конечные веса на алгебрах Неймана*, Казан. ун-т, Казань, 1978, 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101-79 Деп.)
4. Трунов Н. В., *О некоммутативном аналоге пространства* L_2, Конструкт. теория функций и функц. анализ, вып. 2, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1979, с. 93–114.
5. Трунов Н. В., *О некоммутативном аналоге пространства* L_p, Изв. вузов. Математика (1979), 11, 69–77.
6. Dixmier J., *Formes lineàires sur un anneau d'opérateurs*, Bull. Soc. Math. France **81** (1953), no. 1, 9–39.
7. Dye H., *The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 243–280.
8. Kunze R., L_p *Fourier transforms on locally compact unimodular groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), no. 2, 519–540.
9. Pedersen G., Takesaki M., *The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87.
10. Yeadon F., *Non-commutative* L^p*-spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), no. 1, 91–102.

VIII. К ТЕОРИИ НОРМАЛЬНЫХ ВЕСОВ НА АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА

Изв. вузов. Математика,
1982, 8, 61–70

Пусть M – алгебра Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H; M^+ (соответственно, M_*^+) – конус положительных элементов M (соответственно, преддвойственного к M пространства M_*) (см. [1]). Пусть φ – нормальный вес на M (см. [2], [3]), т. е. отображение M^+ в $[0, +\infty]$ такое, что:

(а) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ $(x, y \in M^+,\ \lambda \geq 0;\ 0 \cdot \infty \equiv 0)$;

(б) $\varphi(x) = \sup \varphi(x_i)$ $(x_i \nearrow x;\ x_i, x \in M^+)$.

Вес φ называется *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$ $(x \in M)$. Вес φ называется *точным*, если $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $(x \in M^+)$, и полуконечным, если линейная оболочка $\mathfrak{m}_\varphi$ конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in M^+ \mid \varphi(x) < \infty\}$ плотна в M в ультраслабой топологии. Среди проекторов $p \in M$ с условием $\varphi(p) = 0$ существует наибольший p_0, проектор $1 - p_0$ называется носителем нормального веса φ.

Определение 1. Назовем вес φ *локально конечным*, если

$$\forall x \in M^+\ (\varphi(x) = \infty)\ \exists y \in M^+\colon y \leq x,\ 0 < \varphi(y) < \infty.$$

Определение 2. Назовем вес φ *регулярным*, если

$$\forall \omega \in M_*^+ (\omega \neq 0)\ \exists \omega' \in M_0^+\ (\omega' \neq 0)\colon \omega' \leq \omega,\ \omega' \leq \varphi.$$

Условие локальной конечности было введено автором в работе [4] в связи с исследованиями по некоммутативной теореме Радона–Никодима. Понятие регулярности, введенное в [5], позволило выделить класс весов, для которых в схеме интегрирования [6] пространства L_1 и L_2 могут быть корректно описаны с помошью замкнутых операторов. В данной работе мы продолжим изучение структуры нормальных весов этих двух типов, выделенных в связи с задачами, возникшими в теории некоммутативного интегрирования.

Часть I содержит некоторые вспомогательные результаты, в II получено описание локально конечных и регулярных весов на полуконечных алгебрах, в III рассматривается вопрос о существовании таких весов на общих алгебрах Неймана, часть IV содержит приложение понятий локальной конечности и регулярности к обобщению одного результата У. Хаагерупа [7] о расширенной положительной части алгебры Неймана.

I. Лемма 1. *Пусть φ – нормальный вес на M.*

(i) *Если φ локально конечен, то каждый $x \in M^+$ имеет вид $x = \sum_i x_i$ $((x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+)$; в частности, φ полуконечен.*

(ii) *Если φ регулярен, то каждый функционал $\omega \in M_*^+$ имеет вид*

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \quad (\omega_n \in M_*^+,\ \omega_n \leq \varphi,\ n = 1, 2, \dots);$$

в частности, φ точен.

Доказательство содержится в [4] и [5] и состоит в стандартном применении леммы Цорна.

Лемма 2. *Пусть τ – нормальный след на M.*

(i) *Если τ полуконечен, то τ локально конечен.*

(ii) *Если τ точен, то τ регулярен.*

Доказательство. Утверждение (i) очевидно в силу [1] (ч. I, § 3, следствие 5). Утверждение (ii) доказано в [5] (§ 4, теорема 2).

Пусть e – проектор из M и φ_e – редукция нормального веса φ на алгебру eMe (т. е. $\varphi_e(x) = \varphi(exe)$ $(x \in eM^+e)$).

Лемма 3. (i) *Если вес φ локально конечен, то и вес φ_e локально конечен.*

(ii) *Если вес φ регулярен, то и вес φ_e регулярен.*

Доказательство. (i) Пусть $x \in eM^+e$ и $\varphi_e(x) = \infty$. Найдется $y \in M^+$ с условием $y \leq exe$, $0 < \varphi(y) < \infty$. В таком случае $ey = ye = y$, и полагая $y' = y|eH \in eM^+e$, имеем $0 < \varphi_e(y') = \varphi(y) < \infty$.

(ii) Пусть $\omega \in (eMe)_*^+$, $\omega \neq 0$. Определим на M ненулевую форму $\theta = \omega(e \cdot e) \in M_*^+$. Найдется $\theta' \in M_*^+$ $(\theta' \neq 0)$ с условием $\theta' \leq \theta$, $\theta' \leq \varphi$. Пусть e_0 – носитель θ'. Тогда $e_0 \leq e$, так что $\theta'(e_0) = \theta'(e) \neq 0$ и

$$\theta'(exe) = \theta'(e_0 x e_0) = \theta'(x) \leq \theta(x) = \theta(exe) \quad (x \in eM^+e).$$

Обозначим через ω' редукцию θ' на eMe, тогда $\omega' \in (eMe)_*^+$, $\omega' \neq 0$, $\omega' \leq \omega$ и $\omega' \leq \varphi_e$.

Лемма 4. *Пусть e – носитель нормального веса φ. Если вес φ_e на eMe локально конечен, то и вес φ локально конечен.*

Доказательство. Пусть $x \in M^+$ и $\varphi(x) = \infty$. Найдется $y \in eM^+e$ такой, что $y \leq ex|eH$ и $0 < \varphi_e(y) < \infty$. Ниже построим оператор $z \in M^+$ с условием $z \leq x$ и $ez|eH = y$; тогда $\varphi(z) = \varphi_e(y)$, откуда и будет следовать локальная конечность φ. Займемся построением z. Пусть $H \ni f \to \widetilde{f} \in H/H_0$ – факторизация H по подпространству $H_0 = \ker x = \{f \in H \mid (xf, f) = 0\}$ и пусть $\mathfrak{H}$ – пополнение H/H_0 по скалярному произведению $(\widetilde{f}, \widetilde{g})_x = (xf, g)$ $(f, g \in H)$. Равенство $(\widetilde{f}, \widetilde{g})_y = (yf, g)$ $(f, g \in eH)$ корректно задает положительную билинейную форму на подпространстве $\mathfrak{H}_1 = [\widetilde{eH}]_x$ (замыкании линеала $\widetilde{eH}$ в $\mathfrak{H}$), причем $(\xi, \xi)_y \leq (\xi, \xi)_x$ $(\xi \in \mathfrak{H}_1)$. Обозначим через $\widetilde{y}$ ограниченный оператор в

$\mathfrak{H}$ такой, что $(\widetilde{y}\xi,\eta)_x = (\xi,\eta)_y$ $(\xi,\eta \in \mathfrak{H}_1)$; $\widetilde{y}\xi = 0$ $(\xi \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$. Тогда $0 \le \widetilde{y} \le 1$ и, следовательно, равенство $\langle f,g\rangle = (\widetilde{y}\widetilde{f},\widetilde{g})_x$ определяет в H положительную билинейную форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ такую, что

$$\langle f,f\rangle = (\widetilde{y}\widetilde{f},\widetilde{f})_x \le (\widetilde{f},\widetilde{f})_x = (xf,f) \quad (f \in H).$$

Обозначим через z ограниченный оператор в H, определяющий эту форму, т. е. $(zf,g) = \langle f,g\rangle$ $(f,g \in H)$. Тогда $0 \le z \le x$ и

$$(zf,g) = \langle f,g\rangle = (\widetilde{y}\widetilde{f},\widetilde{g})_x = (\widetilde{f},\widetilde{g})_y = (yf,g) \quad (f,g \in eH),$$

откуда $ez|eH = y$. Осталось проверить, что $z \in M$. Пусть u – унитарный оператор из коммутанта M. Равенства

$$(\widetilde{uf},\widetilde{ug})_x = (\widetilde{f},\widetilde{g})_x \quad (f,g \in H) \quad \text{и} \quad (\widetilde{uf},\widetilde{ug})_y = (\widetilde{f},\widetilde{g})_y \quad (f,g \in eH)$$

показывают, что соотношение $\widetilde{u}\widetilde{f} = \widetilde{uf}$ $(f \in H)$ однозначно определяет унитарный оператор $\widetilde{u}$ в $\mathfrak{H}$, причем $(\widetilde{u}\xi,\widetilde{u}\eta)_y = (\xi,\eta)_y$ $(\xi,\eta \in \mathfrak{H}_1)$. Учитывая, что $ue = eu$, имеем $u\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$, $\widetilde{u}(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$, так что $\widetilde{u}\widetilde{y} = \widetilde{y}\widetilde{u}$. В таком случае

$$(u^*zuf,g) = \langle uf,ug\rangle = (\widetilde{y}\widetilde{u}\widetilde{f},\widetilde{u}\widetilde{g})_x = (\widetilde{y}\widetilde{f},\widetilde{g})_x = \langle f,g\rangle = (zf,g) \quad (f,g \in H),$$

откуда $u^*zu = z$. В силу произвольности u $z \in M$.

Лемма 5. *Пусть N – подалгебра Неймана алгебры M, φ – нормальный вес на M и вес $\psi = \varphi|N^+$. Тогда:*

(i) *если φ регулярен, то регулярен и вес ψ;*

(ii) *если φ точен и локально конечен, ψ полуконечен и $\sigma_t^\varphi(N) \subset N$ $(t \in \mathbb{R})$, где σ_t^φ – модулярная группа веса φ (см. [8]), то вес ψ локально конечен.*

Доказательство. (i) Пусть $\omega \in N_*^+$ $(\omega \ne 0)$ и $\theta(\in M_*^+)$ – некоторое продолжение ω (если $\omega = \sum_{i=1}^\infty ((\cdot)f_i,f_i)$ на N $(f_i \in H)$, то полагаем $\theta(x) = \sum_{i=1}^\infty (xf_i,f_i)$ $(x \in M)$). Найдется $\theta' \in M_*^+$ $(\theta' \ne 0)$ с условием $\theta' \le \theta$ и $\theta' \le \varphi$. Полагая $\omega' = \theta'|N$, имеем $\omega' \in N_*^+$, $\omega' \ne 0$, $\omega' \le \omega$ и $\omega' \le \varphi$.

(ii) Согласно [9] существует точное нормальное условное ожидание $\varepsilon\colon M \overset{\text{на}}{\to} N$ такое, что $\varphi(\varepsilon(x)) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi^+)$. Пусть $x \in N^+$ и $\psi(x) = \infty$. Найдется $z \in M^+$ такой, что $z \le x$, $0 < \varphi(z) < \infty$. Положим $y = \varepsilon(z)$, тогда $y \in N^+$ и в силу монотонности ε $y \le \varepsilon(x) = x$, причем $\psi(y) = \varphi(y) = \varphi(\varepsilon(z)) = \varphi(z)$.

II. Нам понадобится следующее известное

Определение 3 (см. [10], [11]). Пусть h – плотно заданный замкнутый оператор, присоединенный к M. Говорят, что h *локально измерим* (относительно M), если выполнены следующие эквивалентные условия:

(а) существует последовательность (e_n) проекторов из центра M такая, что $e_n \nearrow 1$ и все операторы he_n измеримы по Сигалу (см. [12], определение 21);

(б) для каждого $x \in M$ оператор xh замыкаем.

Отметим, что класс всех локально измеримых относительно алгебры M операторов образует $*$-алгебру относительно сильных алгебраических операций (см., напр., [10]).

Лемма 6. *Пусть $h \geq 0$ – самосопряженный оператор, присоединенный к M. Тогда h локально измерим в том и только том случае, когда локально измерим оператор $h^{1/2}$.*

Доказательство. Если h локально измерим, то для каждого $x \in M$ определен оператор $(xh)^{**}$, так что оператор $(xh)^* = hx^*$ плотно определен, а тем более плотно определен оператор $h^{1/2}x^*$. Отсюда $xh^{1/2}$ замыкаем, т. к. $xh^{1/2} \subset (h^{1/2}x^*)^*$. Наоборот, если $h^{1/2}$ локально измерим, то $h = h^{1/2} \cdot h^{1/2}$ локально измерим как сильное произведение локально измеримых операторов.

Теорема 1. *Пусть M – полуконечная алгебра Неймана, τ – точный нормальный полуконечный след на M и $\varphi = \tau(h\,\cdot)$ – нормальный полуконечный вес на M (здесь $h \geq 0$ – производная φ по τ в смысле* [8] *(теорема 5.12)).*

(i) *Вес φ локально конечен тогда и только тогда, когда оператор h локально измерим.*

(ii) *Вес φ регулярен только тогда, когда оператор h несингулярен и h^{-1} локально измерим.*

Доказательство существенно опирается на лемму 7.9 из [8] и следующую лемму 7, являющуюся ее очевидным следствием (см. также [13], теорема 1).

Лемма 7. *Пусть (q_i) – возрастающая сеть замыкаемых квадратичных форм, заданных на общем линеале D векторов гильбертова пространства, и пусть $q(f) \equiv \sup_i q_i(f) < +\infty$ $(f \in D)$. Тогда q – замыкаемая квадратичная форма на D.*

(i) *Необходимость.* Пусть вес φ локально конечен и $x \in M^+$. Выберем возрастающую сеть $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такую, что $x = \sup_i x_i$ (см. лемму 1), и определим на плотном в H линеале $D = D(h^{1/2})$ возрастающую сеть квадратичных форм $q_i(f) = (x_i h^{1/2} f, h^{1/2} f)$ и квадратичную форму $q(f) = (x h^{1/2} f, h^{1/2} f)$. Тогда $q(f) = \sup_i q_i(f)$ $(f \in D)$, так что для проверки замыкаемости (а следовательно, и локальной измеримости $h^{1/2}$) осталось убедиться в силу леммы 7 в замыкаемости оператора $yh^{1/2}$, если $y \in M$ и $\varphi(y^*y) < \infty$. Поскольку $(yh^{1/2})^* = h^{1/2}y^*$, то для этого достаточно проверить, что $D(h^{1/2}y^*)$ плотно в H. Пусть $\tau = \sum_{j \in J} ((\cdot), f_j, f_j)$ $(f_j \in H)$ (см. [1], ч. 1, § 6, п. 1) и

$$L = \operatorname{lin}\{x'f_j \mid x' \in M',\ j \in J\},$$

где M' – коммутант M. Тогда L плотно в H в силу точности τ. Проверим, что $L \subset D(h^{1/2}y^*)$. Пусть $f \in L$ и $h_\varepsilon = h(1 + \varepsilon h)^{-1}$ $(\varepsilon > 0)$. Найдется число $c > 0$ такое, что

$$\begin{aligned}\sup_\varepsilon (h_\varepsilon y^* f, y^* f) = \sup_\varepsilon (y h_\varepsilon y^* f, f) &\leq c \sup_\varepsilon \tau(y h_\varepsilon y^*) \\ &= c \sup_\varepsilon \tau(h_\varepsilon y^* y) = c\varphi(y^*y) < \infty,\end{aligned}$$

откуда $f \in D(h^{1/2}y^*)$ в силу леммы 7.9 из [8].

(i) *Достаточность.* Пусть наоборот оператор h локально измерим. Для проверки локальной конечности φ будем, без ограничения общности, считать вес φ точным. (Действительно, если e – носитель φ, то по лемме 4 достаточно проверить локальную конечность веса φ_e, и остается заметить, что оператор $h_e \equiv h|eH$ очевидно локально измерим относительно алгебры eMe.) Пусть $x \in M^+$. В силу замыкаемости оператора $x^{1/2}h^{1/2}$ и полуконечности следа τ найдется $y \in \mathfrak{m}_\tau^+$ с условием

$$(yf, f) \le |x^{1/2}h^{1/2}|^2 \quad (f \in D(h^{1/2})),$$

или, что то же самое, $|y^{1/2}h^{-1/2}g| \le |x^{1/2}g|$ ($g \in D(h^{-1/2})$). Обозначим через z замыкание оператора $y^{1/2}h^{1/2}$. Тогда $z \neq 0$, $z \in M$ и $z^*z \le x$. Проверим, что $z^*z \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. Для этого заметим, что сеть $zh_\varepsilon z^* \nearrow y$ при $\varepsilon \searrow 0$. Действительно, $y^{1/2} = h^{1/2}z^*$ и по лемме 7.9 из [12] для всех $f \in D(h^{1/2}z^*) = H$:

$$\sup_\varepsilon (h_\varepsilon z^* f, z^* f) = (h^{1/2}z^* f, h^{1/2}z^* f) = (yf, f).$$

В таком случае

$$\varphi(z^*z) = \sup_\varepsilon \tau(h_\varepsilon z^* z) = \sup_\varepsilon \tau(z h_\varepsilon z^*) = \tau(y) < \infty.$$

В силу произвольности $z \in M^+$ локальная конечность φ установлена.

(ii) *Необходимость.* Пусть вес φ регулярен и $x \in M$. По лемме 1 вес φ точен, так что h несингулярен. Для проверки локальной измеримости h^{-1} достаточно установить замыкаемость квадратичной формы

$$q(f) = (xh^{-1/2}f, h^{-1/2}f) \quad (f \in D(h^{-1/2})).$$

Учитывая существование возрастающей к x^*x сети элементов $\mathfrak{m}_\tau^+$, можно в силу леммы 7 ограничиться случаем, когда $\tau(x^*x) < \infty$. Положим $\omega = \tau(x^*x\,\cdot) \in M_*^+$, и пусть последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\tau^+$ такова, что $\omega = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(x_n\cdot)$ и $\tau(x_n\cdot) \le \varphi$ ($n = 1, 2, \dots$) (см. лемму 1). Заметим, что тогда $x^*x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $x_n \le h$ ($n = 1, 2, \dots$) в смысле [8] (с. 62). Равенство

$$q(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n h^{-1/2}f, h^{-1/2}f)$$

и неравенства

$$(x_n h^{-1/2}f, h^{-1/2}f) \le (f, f) \quad (f \in D(h^{-1/2}),\ n = 1, 2, \dots)$$

устанавливают в силу леммы 7 замыкаемость формы q.

(ii) *Достаточность.* Пусть h^{-1} локально измерим и $\omega \in M_*^+$ ($\omega \neq 0$). Подберем $\omega' \in M_*^+$ ($\omega' \neq 0$) так, чтобы $\omega' \le \omega$ и $\omega' \le \varphi$. В силу регулярности

τ (см. лемму 2) можно ограничиться случаем $\omega = \tau(x\,\cdot) \le \tau$ $(x \in \mathfrak{m}_\tau^+)$. В силу замыкаемости $x^{1/2}h^{-1/2}$ найдется $y \in M^+$ $(0 < \|y\| \le 1)$ с условием

$$(yf, f) \le |x^{1/2}h^{-1/2}f|^2 \quad (f \in D(h^{-1/2})).$$

Обозначим через z замыкание оператора $y^{1/2}h^{1/2}$, тогда $z \ne 0$, $z \in M$ и $z^*z \le x$. Кроме того,

$$(z^*zg, g) \le |y^{1/2}h^{1/2}g|^2 \le |h^{1/2}g|^2 \quad (g \in D(h^{1/2})),$$

так что $z^*z \le h$. Осталось положить $\omega' = \tau(z^*z\,\cdot)$. Теорема доказана.

Обозначим через $B(H)$ алгебру всех ограниченных операторов в H, и пусть $\mathrm{Tr}(\cdot)$ – канонический след на $B(H)$.

Следствие. *Пусть* $\varphi = \mathrm{Tr}\,(h\,\cdot)$ *– нормальный полуконечный вес на* $B(H)$.

(i) *Вес* φ *локально конечен тогда и только тогда, когда* $h \in B(H)$.

(ii) *Вес* φ *регулярен тогда и только тогда, когда существует* $h^{-1} \in B(H)$.

(iii) *Если вес* φ *регулярен и* $\varphi(1) < \infty$, *то пространство* H *конечномерно.*

Замечание. (1) Утверждение следствия было получено другим методом в [4] и [5].

(2) Из теоремы 1 следует, что класс нормальных локально конечных весов на полуконечной алгебре совпадает с классом локально измеримых весов (см. [14], определение 1), для которых автором в [14] предложена конструкция пространств L_p $(1 \le p \le \infty)$, причем требование регулярности выделяет среди этих весов те, для которых пространства L_p можно реализовать в виде пространств локально измеримых операторов (см. [14], теорема 13).

III. Теорема 2. *Пусть* φ *– нормальный регулярный полуконечный вес на* M. *Тогда:*

(i) *алгебра* M *полуконечна,*

(ii) *если* $\varphi(1) < \infty$, *то алгебра* M *конечна.*

Доказательство. (ii) Пусть e – наибольший проектор из центра M, для которого алгебра $N \equiv eMe$ собственно бесконечна. Предположим, что $e \ne 0$ и пусть $\omega = \varphi_e$ – редукция φ на N. Тогда по лемме 3 ω – полуконечный нормальный регулярный вес на N. Учитывая, что $N \simeq N \otimes B(K)$, где K – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство (см., напр., [1], ч. I, § 2, предложение 8; ч. III, § 8, следствие 2), заключаем о существовании у N подалгебры $N_1 \simeq 1 \otimes B(K) \simeq B(K)$. В силу леммы 5 нормальный вес $\omega_1 = \omega|N_1$ регулярен на N_1, но это противоречит п. (iii) следствия из теоремы 1. Таким образом, $e = 0$, т. е. M конечна.

(i) Пусть p – проектор из $\mathfrak{m}_\varphi^+$. В силу леммы 3 конечный вес φ_p на pMp регулярен, так что согласно п. (ii) данной теоремы проектор p конечен. Для проверки полуконечности M осталось показать, что $\sup\{p \mid p \in \mathfrak{m}_\varphi^+,\ p - \text{проектор}\} = 1$. Для этого заметим, что если $x = \int_0^\infty \lambda\,\mathrm{d}e(\lambda) \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, то проектор

$$p^\varepsilon(x) = \int_\varepsilon^\infty \mathrm{d}e(\lambda) = x^{1/2}\left(\int_\varepsilon^\infty \lambda^{-1}\,\mathrm{d}e(\lambda)\right)x^{1/2} \in \mathfrak{m}_\varphi^+$$

для всех $\varepsilon > 0$, т. к. $p^{\varepsilon}(x) \leq \| \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda^{-1} \, \mathrm{d}e(\lambda) \| \, x$. Учитывая существование возрастающей к 1 сети элементов $\mathfrak{m}_{\varphi}^{+}$ (см., напр., [2], лемма 2.3), имеем

$$\sup\{p^{\varepsilon}(x) \mid \varepsilon > 0, \, x \in \mathfrak{m}_{\varphi}^{+}\} = 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть M – собственно бесконечная алгебра Неймана. Существует точный нормальный полуконечный вес φ на M, не являющийся ни локально конечным, ни регулярным.*

Доказательство. Как и в теореме 2, воспользуемся изоморфизмом $M \simeq M \otimes B(K)$, где K – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Предположим сначала, что алгебра M σ-конечна и пусть ω – точный нормальный функционал на M. Пусть $h \geq 0$ – самосопряженный несингулярный оператор в K такой, что оба оператора h и h^{-1} неограничены (реализуя K в виде $L_2(\mathbb{R})$, легко построить пример такого h). Положим $\varphi = \omega \otimes \mathrm{Tr}(h \, \cdot)$ в смысле [15] (определение 1.1.3) и проверим, что вес φ на M является искомым. Для этого обозначим через N подалгебру $1 \otimes B(K) \simeq B(K)$ алгебры M и пусть вес $\psi = \varphi | N^{+}$. По следствию из теоремы 1 точный нормальный полуконечный вес ψ не является ни локально конечным, ни регулярным. Отсюда в силу леммы 5 таков же и вес φ. Перейдем к общему случаю. Выберем σ-конечный проектор $p \in M$ $(p \neq 0, 1)$. Проектор $e = p \otimes 1_K$ собственно бесконечен в M и σ-конечен. Пусть φ_1 – вес на собственно бесконечной σ-конечной алгебре eMe, удовлетворяющий утверждению теоремы, и φ_2 – произвольный точный нормальный полуконечный вес на алгебре $(1-e)M(1-e)$. Вес $\varphi = \varphi_1(e \cdot e) + \varphi_2((1-e) \cdot (1-e))$, как нетрудно видеть, точен, нормален и полуконечен на M, причем $\varphi_e = \varphi_1$. Тогда по лемме 3 вес φ является искомым. Теорема доказана.

Замечание. Веса φ_1 и φ_2 в доказательстве теоремы 3 можно выбрать строго полуконечными в смысле [2], при этом вес φ также оказывается строго полуконечным.

Из теорем 1 – 3 очевидным образом вытекает следующая характеризация конечных алгебр Неймана.

Следствие. *Для алгебры Неймана M следующие условия эквивалентны:*

(i) *M – конечная алгебра Неймана;*
(ii) *каждый точный нормальный полуконечный вес на M локально конечен;*
(iii) *каждый нормальный полуконечный вес на M локально конечен;*
(iv) *каждый точный нормальный полуконечный вес на M регулярен.*

Теорема 4. *Пусть M – фактор типа III_{λ} $(0 < \lambda < 1)$ (см. [15]). Не существует ни одного нормального локально конечного веса φ на M с условием $\varphi(1) = \infty$.*

Доказательство. Достаточно установить отсутствие точного веса φ с перечисленными свойствами. Действительно, если e – носитель нормального локально конечного веса φ на M $(\varphi(1) = \infty)$, то вес φ_e на eMe точен, нормален и локально конечен в силу леммы 4, и осталось заметить, что фактор eMe

имеет тот же тип III_λ (см. [15], следствие 3.2.8 (b)). Предположим сначала что фактор M σ-конечен. Согласно [16] (теорема 3.3) для каждой пары точных нормальных полуконечных весов φ и ψ на M $(\varphi(1) = \psi(1) = \infty)$ найдется унитарный оператор $u \in M$ с условием $\lambda\psi \le \varphi(u \cdot u^*) \le \lambda^{-1}\psi$. Из этого неравенства следует, что локальная конечность ψ означает локальную конечность веса $\varphi(u \cdot u^*)$, а значит, и φ (и наоборот). Таким образом, существование одного нормального локально конечного веса на M означало бы локальную конечность любого точного нормального полуконечного веса на M, но это противоречит утверждению теоремы 2. Перейдем к общему случаю. Пусть φ – точный нормальный полуконечный вес на M $(\varphi(1) = \infty)$ и $(e_i)_{i \in I} \subset M$ – семейство попарно ортогональных ненулевых σ-конечных проекторов таких, что $\sum\limits_{i \in I} e_i = 1$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдется конечное подмножество $I_n \subset I$ такое, что $\sum\limits_{i \in I_n} \varphi(e_i) > n$. Проектор $e = \sup\limits_n (\sum\limits_{i \in I_n} e_i)$ σ-конечен как счетная сумма ортогональных σ-конечных проекторов, причем $\varphi(e) = \infty$. Вес φ_e на σ-конечном факторе eMe типа III_λ не может быть по доказанному выше локально конечным, а значит, не является в силу леммы 3 локально конечным и вес φ. Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно построить пример алгебры M типа III, на которой существует точный нормальный локально конечный вес φ с условием $\varphi(1) = \infty$. Действительно, пусть $(M_i)_{i \in I}$ – бесконечное семейство σ-конечных алгебр типа III; ω_i – точное нормальное состояние на M_i $(\omega_i(1) = 1)$; e_i – проектор из центра $M \equiv \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, являющийся 1 для прямого слагаемого M_i. Вес $\varphi = \sum\limits_{i \in I} \omega_i(e_i \cdot e_i)$ на M, очевидно, обладает нужными свойствами (и даже является строго полуконечным).

IV. В работе [7] У. Хаагерупом было введено понятие обобщенного положительного оператора, присоединенного к алгебре Неймана M, под которым понимается всякое положительно однородное, аддитивное и полунепрерывное снизу отображение $m\colon M_*^+ \to [0, +\infty]$. Класс $\widehat{M^+}$ всех таких отображений, называемый расширенной положительной частью алгебры M, включает в себя M^+, если отождествлять $x \in M^+$ с отображением $m_x\colon \omega \to \omega(x)$ $(\omega \in M_*^+)$. При этом оказывается, что если τ – точный нормальный полуконечный след на полуконечной алгебре M, то соответствие $x \to \tau(x\,\cdot)$ продолжается по нормальности до биекции $\widehat{M^+}$ на класс всех нормальных весов на M (см. [7], теорема 1.12).

Пусть φ – точный нормальный полуконечный вес на M и $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to M_*$ – определяемое им вложение, используемое в схеме интегрирования относительно веса [6] в качестве аналога отображения $x \to \tau(x\,\cdot)$ $(x \in \mathfrak{m}_\tau)$. Как показано в [4] (теорема 2.1), отображение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to M_*$ однозначно определяется следующими характеристическими свойствами:

(γ1) $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathfrak{m}_\varphi$;
(γ2) $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^+) = \{\omega \in M_*^+ \mid \exists \lambda > 0\colon \omega \le \lambda\varphi\}$;
(γ3) отображение $\{x, y\} \to \gamma(x)(y^*)$ – скалярное произведение на $\mathfrak{m}_\varphi$.

Покажем здесь, что возможность обобщения упомянутого выше результата

У. Хаагерупа, т. е. отождествление обобщенных положительных операторов с "производными Радона–Никодима" относительно φ всех нормальных весов на M с помощью продолжения по нормальности отображения $\gamma|\mathfrak{m}_\varphi^+$, эквивалентна требованию локальной конечности и регулярности φ.

Теорема 5. *Если вес φ локально конечен, то для каждого $m \in \widehat{M^+}$ существует, притом единственный, нормальный вес ψ на M такой, что*

$$m(\gamma(x)) = \psi(x) \quad (x \in \mathfrak{m}_\varphi^+). \tag{$*$}$$

Наоборот, если для каждого $m \in \widehat{M^+}$ найдется нормальный вес ψ на M с условием $(*)$, то вес φ локально конечен.

Доказательство. Пусть φ локально конечен и $m \in \widehat{M^+}$. Согласно [7] (следствие 1.6) найдется возрастающая сеть $(x_i) \subset M^+$ такая, что

$$m(\omega) = \sup_i \omega(x_i) \quad (\omega \in M_*^+),$$

при этом в силу п. (i) леммы 1 можно считать, что $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$. Возрастающая (в силу монотонности γ) сеть $(\gamma(x_i)) \subset M_*^+$ определяет нормальный вес $\psi(\cdot) = \sup\limits_i \gamma(x_i)(\cdot)$ на M. При этом

$$\psi(x) = \sup_i \gamma(x_i)(x) = \sup_i \gamma(x)(x_i) = m(\gamma(x))$$

для каждого $x \in M^+$. Если θ – другой нормальный вес на M с условием $(*)$, то, выбирая для каждого $x \in M^+$ возрастающую к x сеть $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$, имеем

$$\theta(x) = \sup_i \theta(x_i) = \sup_i m(\gamma(x_i)) = \sup_i \psi(x_i) = \psi(x).$$

Для доказательства второго утверждения теоремы предположим, что $x \in M^+$ и нормальный вес ψ связан условием $(*)$ с $m = m_x$. Тогда

$$\psi(y) = m_x(\gamma(y)) = \gamma(y)(x)$$

для каждого $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. Локальная конечность φ теперь следует из [4] (теорема 2.3). Теорема доказана.

Будем до конца работы предполагать, что точный нормальный вес φ локально конечен, и для $m \in \widehat{M^+}$ через $\gamma(m)$ обозначать нормальный вес ψ, однозначно определяемый условием $(*)$.

Следствие 1. *Пусть $m, m_1, m_2, m_i \in \widehat{M^+}$, тогда*

(i) $\gamma(m_1 + m_2) = \gamma(m_1) + \gamma(m_2)$, $\gamma(\lambda m) = \lambda\gamma(m) \quad (\lambda \geq 0,\ 0 \cdot \infty \equiv 0)$;

(ii) *если $m_1 \leq m_2$, то $\gamma(m_1) \leq \gamma(m_2)$;*

(iii) *если $m_i \nearrow m$ в $\widehat{M^+}$, то $\gamma(m) = \sup\limits_i \gamma(m_i)$;*

(iv) *для каждого $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$ вес $\gamma(m_x) = \gamma(x)|M^+$.*

Доказательство. В силу нормальности всех весов $\gamma(m)$ и п. (i) леммы 1 достаточно установить совпадение или неравенства для соответствующих весов лишь на конусе $\mathfrak{m}_\varphi^+$, а это уже легко проделать с использованием условия $(*)$.

Замечание. Из п. (iv) следствия 1 следует, что $\gamma(m_x) = \gamma(x)$ и для каждого $x \in M^+$, если под $\gamma(x)$ понимать нормальный вес на M, введенный в [4] (определение 2.5).

Для формулировки следствия 2 нам понадобится одно несложное обобщение основного результата работы [8] Г. Педерсена и М. Такесаки (отметим, что локальная конечность φ при этом использоваться не будет). Пусть Σ и M^Σ – соответственно модулярная группа и централизатор веса φ (см. [8]). Если $m = \int_0^\infty \lambda\, \mathrm{d}e(\lambda) + \infty\cdot p$ – спектральное разложение $m \in \widehat{M^+}$ в смысле [7] (теорема 1.5), причем все проекторы $e(\lambda), p \in M^\Sigma$, то формула $\varphi(m\,\cdot) = \lim \varphi(x_n\,\cdot)$, где $x_n = \int_0^n \lambda\, \mathrm{d}e(\lambda) + np$ $(n = 1, 2, \dots)$, определяет нормальный Σ-инвариантный вес на M, полуконечный в том и только том случае, когда $p = 0$. Незначительная модификация теоремы 5.4 из [8] показывает, что таким образом получается каждый Σ-инвариантный вес на M.

Следствие 2. *Пусть $m = \int_0^\infty \lambda\, de(\lambda) + \infty\cdot p \in \widehat{M^+}$. Вес $\gamma(m)$ Σ-инвариантен тогда и только тогда, когда все $e(\lambda)$, $p \in M^\Sigma$, при этом $\gamma(m) = \varphi(m\,\cdot)$.*

Доказательство. Из [4] (предложение 2.9) следует, что для каждого $x \in (M^\Sigma)^+$ вес $\gamma(x) = \varphi(x\,\cdot)$ и каждый Σ-инвариантный вес $\psi \le \lambda\varphi$ имеет вид $\psi = \gamma(x)$ для некоторого $x \in (M^\Sigma)^+$, $\|x\| \le \lambda$. С учетом приведенного выше обобщения результата [8] утверждение следствия 2 теперь очевидно.

Пусть $h \ge 0$ – локально измеримый оператор, присоединенный к M, и $m \in \widehat{M}^+$. Определим обобщенный положительный оператор $h^{1/2}\cdot m \cdot h^{1/2}$ следующим образом. Пусть возрастающая сеть $(x_i) \subset M^+$ такова, что $m(\cdot) = \sup\limits_i m_{x_i}(\cdot)$ (см. [7], следствие 1.6). Для каждого i присоединенный к M оператор $h^{1/2}\cdot x_i \cdot h^{1/2}$ положителен и самосопряжен (см. лемму 6) и, следовательно, определяет некоторый элемент $m_i \in \widehat{M}^+$. Поскольку сеть (m_i) возрастает в $\widehat{M}^+$, то формула

$$(h^{1/2}\cdot m \cdot h^{1/2})(\omega) \equiv \sup_i m_i(\omega) \quad (\omega \in M_*^+)$$

определяет элемент $\widehat{M}^+$, не зависящий, как нетрудно видеть, от выбора возрастающей сети $(x_i) \subset M^+$ с условием $m_{x_i} \nearrow m$. Данная конструкция позволит нам указать явный вид отображения γ для веса φ на полуконечной алгебре.

Следствие 3. *Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на полуконечной алгебре M. Если вес $\varphi = \tau(h\,\cdot)$, то $\gamma(m) = \tau((h^{1/2}\cdot m \cdot h^{1/2})\,\cdot)$ для каждого $m \in \widehat{M}^+$.*

Доказательство. В [4] (теорема 3.1) показано, что $\gamma(x) = \tau((h^{1/2}\cdot x \cdot h^{1/2})\,\cdot)$ для каждого $x \in M^+$, т. е. установлено утверждение следствия для $m = m_x$ (хотя в [4] предполагалась измеримость оператора h, но соответствующее доказательство почти дословно переносится и на более общий случай локально измеримого h). Отсюда немедленно следует и все утверждение следствия с учетом того, что для возрастающей сети $(x_i) \subset M^+$ из $m(\cdot) = \sup\limits_i m_{x_i}(\cdot)$ вытекает, что $h^{1/2} \cdot m_{x_i} \cdot h^{1/2} \nearrow h^{1/2} \cdot m \cdot h^{1/2}$ в $\widehat{M}^+$, а значит,

$$\tau((h^{1/2} \cdot m \cdot h^{1/2})\cdot) = \sup_i \tau((h^{1/2} \cdot x_i \cdot h^{1/2})\cdot)$$

(см., напр., [7], предложение 1.1 (3)).

Следующую теорему можно рассматривать как еще один вариант (см. [12], [8], [4]) некоммутативного аналога теоремы Радона–Никодима.

Теорема 6. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *вес* φ *регулярен;*

(ii) *отображение* γ *– сюръекция* $\widehat{M}^+$ *на класс всех нормальных весов на* M*. При выполнении этих условий* γ *– биекция* $\widehat{M}^+$ *на класс всех нормальных весов на* M*.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Если φ регулярен и ψ – нормальный вес на M, то согласно [3] (теорема 1), ($\gamma 2$) и п. (ii) леммы 1 существует возрастающая сеть $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такая, что $\psi(\cdot) = \sup_i \gamma(x_i)(\cdot)$. Положим $m(\omega) = \sup\limits_i \omega(x_i)$ $(\omega \in M_*^+)$. Тогда $m \in \widehat{M}^+$ и для каждого $x \in M^+$ в силу следствия 2

$$\gamma(m)(x) = \sup_i \gamma(m_{x_i})(x) = \sup_i \gamma(x_i)(x) = \psi(x).$$

Для проверки инъективности γ предположим, что и для $m' \in \widehat{M}^+$ вес $\gamma(m') = \psi$. Тогда выбирая для каждого $\omega \in M_*^+$ возрастающую последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$ такую, что $\omega = \sup_n \gamma(x_n)$, имеем

$$m(\omega) = \sup_n m(\gamma(x_n)) = \sup_n \psi(x_n) = \sup_n m'(\gamma(x_n)) = m'(\omega).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\omega \in M_*^+$ $(\omega \neq 0)$ и $m \in \widehat{M}^+$ так, что $\gamma(m) = \omega$. Согласно [7] (следствие 1.6) найдется возрастающая сеть $(x_i) \subset M^+$ такая, что

$$m(\omega') = \sup_i \omega'(x_i)$$

для всех $\omega' \in M_*^+$, при этом в силу п. (i) леммы 1 можно считать, что $(x_i) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$. Тогда для каждого $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$

$$\omega(x) = \gamma(m)(x) = m(\gamma(x)) = \sup_i \gamma(x)(x_i) = \sup_i \gamma(x_i)(x),$$

откуда $\omega = \sup\limits_i \gamma(x_i)$. С учетом неравенств $\gamma(x_i) \leq \|x_i\|\varphi$ (см. свойство ($\gamma 2$)), регулярность φ установлена. Теорема доказана.

Литература

1. Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann).* 2nd ed., 367 p., Gauthier–Villars, Paris, 1969.
2. Комб Ф., *Веса и условные ожидания на алгебрах фон Неймана*, Математика (сб. перев.) **18** (1974), 6, 8–113.
3. Haagerup U., *Normal weights on W^*-algebras*, J. Funct. Anal. **19** (1975), no. 3, 302–317.
4. Трунов Н. В., *Локально конечные веса на алгебрах Неймана*, Казан. ун-т, Казань, 1978, 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101-79 Деп.)
5. Трунов Н. В., *Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса*, Конструктивн. теория функций и функц. анализ, вып. 3, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1981, с. 73–87.
6. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I*, Изв. вузов. Матем. (1978), 7, 79–88; *II,* (1978), 12, 88–98.
7. Haagerup U., *Operator valued weights in von Neumann algebras, I*, J. Funct. Anal. **32** (1979), no. 2, 173–206.
8. Pedersen G. K., Takesaki M., *The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87.
9. Takesaki M., *Conditional expectations in von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **9** (1972), no. 3, 306–321.
10. Yeadon F. J., *Convergence of measurable operators*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **74** (1973), no. 2, 257–268.
11. Yeadon F. J., *On a result of P. G. Dixon*, J. London Math. Soc. **9** (1975), no. 4, 610–612.
12. Сигал И., *Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования*, Математика (сб. перев.) **6** (1962), 1, 65–132.
13. Simon B., *Lower semicontinuity of positive quadratic forms*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A79** (1978), no. 3–4, 267–273.
14. Трунов Н. В., *Пространства L_p, ассоциированные с весом на полуконечной алгебре Неймана*, Конструктивн. теория функций и функц. анализ, вып. 3, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1981, с. 88–93.
15. Connes A., *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. Ecole Norm. Super. **6** (1973), 133–252.
16. Haagerup U., *L_p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra*, Coll. Int. CNRS (1979), no. 274, 175–184.

IX. К ТЕОРИИ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ L_1 И L_2

Конструкт. теория функций и функц. анализ,
Казань, Изд–во Казанск. ун–та,
вып. 4, 1983, 96–105.

Заметка посвящена обсуждению общей постановки задачи построения некоммутативных аналогов пространств L_1 и L_2, ассоциированных с нормальным весом на алгебре Неймана, и непосредственно примыкает к работам [4–6]. Из этих же работ заимствованы обозначения и терминология, связанные с интегрированием в алгебрах Неймана.

Пусть M – алгебра Неймана, рассматриваемая в дальнейшем в качестве некоммутативного аналога пространства L_∞. В самом общем виде задачу построения пространства L_1, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом φ на M, естественно поставить следующим образом: определить на линейном подмножестве M (назовем его $L_1 \cap L_\infty$) некоторую "интегральную" норму так, чтобы банахово пространство L_1 – пополнение $L_1 \cap L_2$ по этой норме, обладало бы свойством $L_1^* \simeq M$, где L_1^* – пространство, сопряженное к L_1. Если M_* – пространство, преддвойственное к M, то последнее требование необходимо означает изоморфизм $L_1 \simeq M_*$ (см. [10, 1.13.3]). Таким образом, задача сводится к определению некоторого (зависящего от φ) вложения линеала $L_1 \cap L_\infty$ в M_*, линейно переводящего $L_1 \cap L_\infty$ на плотную часть M_*.

В хорошо известной (напр., [7, гл. I, § 6, п. 10]) конструкции L_1 для случая следа ($\varphi = \tau$) полагают

$$L_1 \cap L_\infty = \mathfrak{M}_\tau \equiv \{x \in M \mid \tau(|x|) < \infty\},$$

вложение $\mathfrak{M}_\tau$ в M_* имеет вид $x \to \tau(x\cdot) = \tau(\cdot x)$, причем "интегральная" норма оператора $x \in \mathfrak{M}_\tau$ суть $\tau(|x|)$.

Анализ общего случая мы начнем в предположении о конечности φ (это позволит считать $L_1 \cap L_\infty = M$), а затем укажем на те изменения (скорее технического, чем принципиального характера), которые необходимо внести при отказе от этого предположения.

Итак, пусть φ – точный нормальный функционал на M. Определим для каждого $x \in M$ два функционала $\gamma_0(x)$ и $\gamma_1(x)$ на M, полагая $\gamma_0(x) = \varphi(\cdot\, x)$ и $\gamma_1(x) = \varphi(x\,\cdot)$. Если (π_φ, H_φ) – представление M, индуцированное φ, и $\widehat{\ }): M \to H_\varphi$ – соответствующее вложение, то очевидно, что

$$\gamma_0(x)(y) = (\pi_\varphi(y)\widehat{x}, \widehat{1}), \quad \gamma_1(x)(y) = (\pi_\varphi(y)\widehat{1}, \widehat{x^*}) \quad (y \in M).$$

Из этих соотношений немедленно следует, что $\gamma_0(x), \gamma_1(x) \in M_*$ и отображения $\gamma_0(x)\colon M \to M_*$, $\gamma_1(x)\colon M \to M_*$ – линейные инъекции, переводящие M на плотные части M_*.

Мы попытаемся далее связать эти два различных (если φ не след) вложения γ_0 и γ_1 с помощью "мостика" γ_α $(0 \le \alpha \le 1)$, используя идею известного КМШ-граничного условия (см. [3]). Для этого мы воспользуемся однопараметрической группой линейных изометрий ρ_t $(t \in \mathbb{R})$ банахова пространтва M_*, определяемой по группе σ_t $(t \in \mathbb{R})$ модулярных автоморфизмов алгебры M, ассоциированной с φ, равенством

$$[\rho_t(\omega)](x) = \omega(\sigma_t(x)) \quad (\omega \in M_*,\ x \in M,\ t \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

1. Теорема. *Пусть φ – точный нормальный функционал на алгебре Неймана M и $x \in M$. Существует, притом единственная, функция комплексного переменного*

$$F_x(\cdot)\colon \{0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1\} \to M_*,$$

непрерывная и ограниченная в полосе $\{0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1\}$, голоморфная внутри этой полосы, и такая, что ее граничные значения суть $F_x(t) = \rho_t(\gamma_0(x))$, $F_x(t+i) = \rho_t(\gamma_1(x))$ $(t \in \mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть Δ и J – модулярный оператор и инволюция, ассоциированные с φ в гильбертовом пространстве H_φ. Поскольку векторы $\widehat{x}$ и $\widehat{x^*}$ принадлежат $\mathcal{D}(\Delta^{1/2})$, то по лемме 3.2 работы [9] вектор–функция $\lambda \to \Delta^{-i\lambda}\widehat{x}$ (соответственно, $\lambda \to \Delta^{-i\bar\lambda+1}\widehat{x^*}$) определена, непрерывна и ограничена в полосе $\{0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1/2\}$ (соответстенно $\{1/2 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1\}$) и голоморфна внутри нее. Отсюда немедленно следует, что функция $F_1(\lambda) = (\pi_\varphi(\cdot)\Delta^{-i\lambda}\widehat{x}, \widehat{1})$ (соответственно, $F_2(\lambda) = (\pi_\varphi(\cdot)\widehat{1}, \Delta^{-i\bar\lambda+1}\widehat{x^*})$) определена, как функция со значениями в M_*, непрерывна и ограничена в полосе $\{0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1/2\}$ (соответственно $\{1/2 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1\}$) и голоморфна внутри неё. При этом голоморфность F_1 и F_2 есть следствие голоморфности всех скалярных функций $\lambda \to F_1(\lambda)(y)$ и $\lambda \to F_2(\lambda)(y)$ для $y \in M$. Для завершения доказательства теоремы в силу известных свойств голоморфных функций осталось положить

$$F_x(\lambda) = \begin{cases} F_1(\lambda), & 0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1/2; \\ F_2(\lambda), & 1/2 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1 \end{cases}$$

и проверить, что для всех $t \in \mathbb{R}$

(а) $F_1(t+i/2) = F_2(t+i/2)$,

(б) $F_1(t) = \rho_t(\gamma_0(x))$, $F_2(t+i) = \rho_t(\gamma_1(x))$.

Для проверки (а) заметим, что при каждом $y \in M$

$$\begin{aligned} F_1(t+i/2) &= (\pi_\varphi(y)\Delta^{-it+1/2}\widehat{x}, \widehat{1}) = (\Delta^{1/2}\widehat{x}, \Delta^{it}\widehat{y^*}) \\ &= (J\Delta^{it}J\Delta^{1/2}\widehat{y}, J\Delta^{1/2}\widehat{x}) = (\Delta^{it+1/2}\widehat{y}, \widehat{x^*}) \\ &= (\pi_\varphi(y)\widehat{1}, \Delta^{-it+1/2}\widehat{x^*}) = F_2(t+i/2)(y). \end{aligned}$$

Условие (б) выполнено в силу следующей выкладки:

$$\begin{aligned} F_1(t)(y) &= (\pi_\varphi(y)\Delta^{-it}\widehat{x},\widehat{1}) = (\widehat{x},\Delta^{it}\widehat{y^*}) == (\widehat{x},\widehat{\sigma_t(y)^*}) \\ &= \varphi(\sigma_t(y)x) = \rho_t(\gamma_0(x))(y); \\ F_2(t+i)(y) &= (\pi_\varphi(y)\widehat{1},\Delta^{-it}\widehat{x^*}) = (\Delta^{it}\widehat{y},\widehat{x^*}) = \varphi(x\sigma_t(y)) \\ &= \rho_t(\gamma_1(x))(y) \quad (y\in M). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

2. Определение. Для каждого $0 \le \alpha \le 1$ будем через γ_α обозначать отображение из M в M_*, определяемое равенством $\gamma_\alpha(x) = F_x(i\alpha)$ $(x \in M)$.

Отметим, что в силу теоремы 1 при $\alpha = 0, 1$ это определение приводит к ранее введенным вложениям γ_0 и γ_1.

3. Предложение. *Отображение $\gamma_\alpha\colon M \to M_*$ является линейной инъекцией M на плотную часть M_*, причем для любых $x, y \in M$:*
(i) $\gamma_\alpha(x^*) = \gamma_{1-\alpha}(x)^*$;
(ii) $\gamma_\alpha(x)(y) = \gamma_{1-\alpha}(y)(x)$;
(iii) $F_x(t+i\alpha) = \rho_t(\gamma_\alpha(x)) \quad (t \in \mathbb{R})$.

Доказательство немедленно вытекает из следующей формулы, справедливой для любых $x, y \in M$ (см. доказательство теоремы 1):

$$\gamma_\alpha(x)(y) = \begin{cases} (\pi_\varphi(y)\Delta^\alpha\widehat{x},\widehat{1}) = (\Delta^\alpha\widehat{x},\widehat{y^*}), & 0 \le \alpha \le 1/2; \\ (\pi_\varphi(y)\widehat{1},\Delta^{1-\alpha}\widehat{x^*}) = (\widehat{y},\Delta^{1-\alpha},\widehat{x^*}), & 1/2 \le \alpha \le 1. \end{cases} \tag{2}$$

4. Определение. Пусть φ – точный нормальный функционал на M. Определим для каждого $0 \le \alpha \le 1$ норму $\|\cdot\|_\alpha$ на M, полагая $\|x\|_\alpha = \|\gamma_\alpha(x)\|$ $(x \in M)$, и будем через $L_{1,\alpha} \equiv L_{1,\alpha}(\varphi)$ обозначать банахово пространство, являющееся пополнением M по этой норме. Будем тем же символом γ_α обозначать и изометрический изоморфизм банаховых пространств $\gamma_\alpha\colon L_{1,\alpha} \to M_*$, продолжающий вложение $\gamma_\alpha\colon M \to M_*$.

5. Замечание. (а) Можно было бы связать с φ и более широкий класс вложений $M \ni x \to F_x(\lambda) \in M_*$ $(0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1)$, однако в силу равенства $\|F_x(\lambda)\| = \|\gamma_\alpha(x)\|$, вытекающего из п° (iii) предложения 3, все эти вложения определяют один и тот же класс норм $\|\cdot\|_\alpha$ на M.

(б) Положим для каждого $l \in L_{1,\alpha}$ $(0 \le \alpha \le 1)$ по опредению $\varphi(l) = \gamma_\alpha(l)(1)$. В силу очевидного равенства $\varphi(x) = \gamma_\alpha(x)(1)$ $(x \in M)$, таким образом определено непрерывное продолжение "интеграла" φ с M на $L_{1,\alpha}$, причем $|\varphi(l)| \le \|l\|_\alpha$.

В следующем предложении 6 мы опишем в терминах вложений γ_α элементы централизатора $M_\varphi \equiv \{x \in M \mid \sigma_t(x) = x,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$ функционала φ.

6. Предложение. *Пусть $x \in M$. Следующие условия эквивалентны:*
(i) $\gamma_0(x) = \gamma_1(x)$;
(ii) *функция $\alpha \to \gamma_\alpha(x)$ постоянна при $0 \le \alpha \le 1$;*
(iii) *функция $\alpha \to \|x\|_\alpha$ постоянна при $0 \le \alpha \le 1$;*

(iv) $x \in M_\varphi$.

При выполнении этих условий $\|x\|_\alpha = \varphi(|x|)$.

Доказательство. Импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) и (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидны. (iv) $\Rightarrow$ (ii): если $x \in M_\varphi$, то операторы $\pi_\varphi(x)$ и Δ перестановочны, так что (ii) следует из соотношений (2). (iii) $\Rightarrow$ (ii): рассмотрим функцию $\lambda \to F_x(\lambda)$, определенную в теореме 1. В силу п° (iii) предложения 3 при $\lambda = t + i\alpha$ ($t \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha \le 1$) функция

$$\lambda \to \|F_x(\lambda)\| = \|\rho_t(\gamma_\alpha(x))\| = \|\gamma_\alpha(x)\|$$

постоянна. Тогда из принципа максимума модуля для аналитичских функций следует постоянство функции $\lambda \to F_x(\lambda)$ в полосе $0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1$, а значит и функции $\alpha \to \gamma_\alpha(x)$; (i) $\Rightarrow$ (iv) (см. [9, теорема 3.6]). Кроме того, если $x \in M_\varphi$, то, полагая $\omega = \gamma_0(x)|M_\varphi$, имеем $\|\omega\| = \varphi(|x|)$. Обозначив через $\varepsilon\colon M \to M_\varphi$ условное ожидание, связанное с φ (см., напр., [4, II]), получаем, в силу известных свойств ε:

$$\|x\|_0 = \sup\{|\varphi(yx)|\colon y \in M,\ \|y\| \le 1\} = \sup\{|\varphi(\varepsilon(y)x)|\colon y \in M,\ \|y\| \le 1\} = \|\omega\|.$$

7. Следствие. *Точный нормальный конечный вес φ на M является следом тогда и только тогда, когда функция $\alpha \to \|x\|_\alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$ постоянна при каждом $x \in M$.*

Мы займемся теперь определением явного вида вложений γ_α для случая, когда M – полуконечная алгебра Неймана. Если τ – точный нормальный полуконечный след на M и $L_1(\tau)$ – банахово пространство измеримых операторов, интегрируемых по Сигалу относительно τ, то существует положительный самосопряженный оператор $h \in L_1(\tau)$ такой, что $\varphi = \tau(h\,\cdot)$ (см. [2]). Из доказательства теоремы 14.1 [3] следует, что для каждого $x \in M$ функция $\lambda \to h^{-i\lambda} \cdot x \cdot h^{i\lambda+1} \in L_1(\tau)$ определена, непрерывна и ограничена в полосе $\{0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1\}$, голоморфна внутри нее, причем для любых $y \in M$ и $t \in \mathbb{R}$

$$\tau(h^{-it}x \cdot h^{it+1} \cdot y) = \varphi(\sigma_t(y)x) \quad \text{и} \quad \tau(h^{-it+1}x \cdot h^{it} \cdot y) = \varphi(x\sigma_t(y)).$$

Отсюда видно, что функция $F_x(\lambda)$ из теоремы 1 имеет в данном случае следующий вид: $F_x(\lambda) = \tau((h^{-i\lambda} \cdot x \cdot h^{i\lambda+1})\cdot)$. Таким образом доказано следующее

8. Предложение. *Если τ – точный нормальный полуконечный след на M и $\varphi = \tau(h\,\cdot)$, то связанные с φ отображение γ_α и норма $\|\cdot\|_\alpha$ имеют следующий вид:*

$$\gamma_\alpha(x) = \tau((h^\alpha \cdot x \cdot h^{1-\alpha})\cdot), \quad \|x\|_\alpha = \tau(|h^\alpha \cdot x \cdot h^{1-\alpha}|) \quad (x \in M,\ 0 \le \alpha \le 1).$$

Предыдущие рассмотрения показывают естественность следующего подхода к определению пространства L_2, ассоциированного с точным нормальным функционалом φ.

9. Определение. Пусть φ – точный нормальный функционал на M. Определим для каждого $0 \le \alpha \le 1$ скалярное произведение на M, полагая

$$(x, y)_\alpha = \gamma_\alpha(x)(y^*) \quad (x, y \in M),$$

и обозначим через $L_{2,\alpha} \equiv L_{2,\alpha}(\varphi)$ гильбертово пространство, являющееся пополнением M по этому скалярному произведению.

Из равенства (1) следует, что

$$(x, y)_\alpha = (\Delta^{\alpha/2}\widehat{x}, \Delta^{\alpha/2}\widehat{y}) \quad (x, y \in M).$$

Отсюда видно, что для каждого $0 \le \alpha \le 1$ пространство $L_{2,\alpha}$ изометрически изоморфно гильбертову пространству H_φ, причем соответствующий унитарный оператор задается равенством

$$u_\alpha = \Delta^{\alpha/2}\widehat{x} \quad (x \in M).$$

10. Замечание. Если ψ – еще один точный нормальный функционал на M, то гильбертовы пространства H_ψ и H_φ изометрически изоморфны (см., напр., [7]). Это обстоятельство позволяет считать все пространства L_2 реализациями одного и того же гильбертова пространства H, связанного с M, и взглянуть на задачу построения пространства L_2, ассоциированного с φ, с тех же позиций, что и при построении пространства L_1. Легко видеть, что при этом в конечном счете мы получим ту же шкалу пространств $L_{2,\alpha}$.

Будем считать далее φ точным нормальным полуконечным весом на M и обсудим те изменения, которые необходимо сделать для перенесения описанных выше конструкций на этот общий случай. Пусть M_0 $(\subset M)$ – алгебра Томита, т. е. максимальная модулярная гильбертова алгебра, ассоциированная с φ (см. [3, 9]). В качестве $L_1 \cap L_\infty$ удобно выбрать подалгебру $l_\varphi = M_0^2$. Для каждого $x \in l_\varphi$ определим два функционала $\gamma_0(x)$ и $\gamma_1(x)$ из M_*, однозначно задающиеся следующими равенствами:

$$\gamma_0(x)(y) = \varphi(yx), \quad \gamma_1(x)(y) = \varphi(xy) \quad (y \in \mathfrak{M}_\varphi),$$

где $\mathfrak{M}_\varphi = \mathrm{lin}\{x \in M^+ \mid \varphi(x) < \infty\}$ (см. [11, лемма 7.5]; [8, предложение 3.1]). Отметим, что вложение $\gamma_0 \colon l_\varphi \to M_*$ существенно используется в теории двойственности для неунимодулярных групп (см. [11, 1]). Предложенная М. Такесаки [11] конструкция пространства L_1, основанная на этом вложении, была затем подробно развита в работе А. Иноу [8].

11. Теорема. *Пусть φ – точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана M и $x \in l_\varphi$. Существует, притом единственная, функция комплексного переменного*

$$F_x(\cdot) \colon \{0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1\} \to M_*,$$

непрерывная и ограниченная в полосе $\{0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1\}$, голоморфная внутри этой полосы, и такая, что ее граничные значения суть $F_x(t) = \rho_t(\gamma_0(x))$,

$F_x(t+i) = \rho_t(\gamma_1(x))$ $(t \in \mathbb{R})$ *(здесь ρ_t – группа линейных изометрий M_*, связанная с группой σ_t модулярных автоморфизмов, ассоциированной с весом φ, равенством* (1)).

Доказательство этой теоремы с соответствующими изменениями повторяет доказательство теоремы 1.

Отметим, что в силу существования продолжения функции $\sigma_t(x)$ $(x \in l_\varphi)$ до целой функции $\lambda \to \sigma_\lambda(x) \in M$ справедливо равенство

$$F_x(\lambda) = \begin{cases} \gamma_0(\sigma_{-\lambda}(x)), & 0 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1/2; \\ \gamma_1(\sigma_{-\lambda+i}(x)), & 1/2 \le \operatorname{Im}\lambda \le 1. \end{cases} \tag{3}$$

Определим далее для каждого $0 \le \alpha \le 1$ вложение $\gamma_\alpha : l_\varphi \to M_*$, полагая $\gamma_\alpha(x) = F_x(i\alpha)$ $(x \in l_\varphi)$. Свойства вложений γ_α, перечисленные в предложении 6, справедливы с соответствующими изменениями и в данном случае. Пополнение l_φ по норме $\|\cdot\|_\alpha \equiv \|\gamma_\alpha(\cdot)\|$ естественно назвать пространством $L_{1,\alpha} \equiv L_{1,\alpha}(\varphi)$; все эти пространства изометрически изоморфны M_*.

Подход к построению пространств $L_{2,\alpha}$, связанных с φ теперь уже очевиден, в частности, в качестве $L_2 \cap L_\infty$ здесь разумно использовать линеал M_0.

12. Замечание. В схеме некоммутативного интегрирования, развитой в [4–6], существенную роль играет вложение $\gamma : \mathfrak{M}_\varphi \to M_*$. В [5, теорема 2.1] показано, что это отображение однозначно определяется следующими характеристическими свойствами:

(γ_1) $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathfrak{M}_\varphi$,

(γ_2) $\gamma(\mathfrak{M}_\varphi^+) = \{\omega \in M_*^+ \mid \exists\lambda > 0 : \omega \le \lambda\varphi\}$,

(γ_3) отображение $\{x, y\} \to \gamma(x)(y^*)$ – скалярное произведение на $\mathfrak{M}_\varphi$.

Покажем, что определенное здесь вложение $\gamma_{1/2} : \mathfrak{M}_\varphi \to M_*$ есть сужение на l_φ вложения γ. Это сразу следует из приводимой ниже выкладки, справедливой для каждого $y \in \mathfrak{M}_\varphi$, $x = v^*u$ $(u, v \in M_0)$ в силу равенства (3) и соотношения (2) на стр. 82 работы [4, I]:

$$\begin{aligned} \gamma_{1/2}(x)(y) &= \varphi(y\sigma_{1/2}(x)) = (\Delta^{1/2}\widehat{x}, \widehat{y^*}) = (\widehat{y}, J\widehat{x}) = (\widehat{y}, \pi'(J\widehat{v^*})J\widehat{u}) \\ &= (J\widehat{v}, \pi_\varphi(y)^* J\widehat{u}) = (J\pi_\varphi(y)^* J\widehat{u}, \widehat{v}) = \gamma(x)(y). \end{aligned}$$

При этом очевидно, что для конечного веса φ вложение $\gamma = \gamma_{1/2}$.

13. Замечание. Пусть M – полуконечная алгебра Неймана и τ – точный нормальный полуконечный след на M, $\varphi = \tau(h\,\cdot)$, где h – производная φ по τ в смысле [9]. Если вес φ конечен, то из предложения 8 следует, что пространства $L_{1,\alpha}(\varphi)$ и $L_{2,\alpha}(\varphi)$ $(0 \le \alpha \le 1)$ есть в точности соответствующие пространства, построенные в работе [6]. Та же ситуация имеет место и для локально измеримого (в смысле [6]) веса φ. Действительно, если $\mathfrak{M}$ – линеал, определенный по φ в [6], то, используя рассуждения, проводившиеся при доказательстве теоремы 14.1 работы [3], нетрудно проверить, что $\mathfrak{M} \subset l_\varphi$, причем для каждого $x \in \mathfrak{M}$ функционал $\gamma_\alpha(x) = \tau((h^\alpha \cdot x \cdot h^{1-\alpha})\cdot)$ (здесь, как и в предложении 8, значком "$\cdot$" обозначается сильное произведение локально измеримых операторов).

Литература

1. Вайнерман Д. И., Кац Г. И., *Неунимодулярные кольцевые группы и алгебры Хопфа–фон Неймана*, Мат. сборник **94** (1974), 2, 194–224.
2. Сигал И., *Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования*, Математика (сб. перев.) **6** (1962), 1, 65–132.
3. Такесаки М., *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения*, Математика (сб. перев.) **18** (1974), 3, 84–120; **18** (1974), 4, 34–63.
4. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I*, Изв. вузов. Матем. (1978), 7, 79–88; *II,* (1978), 12, 88–98.
5. Трунов Н. В., *Локально конечные веса на алгебрах Неймана*, Казан. ун-т, Казань, 1978, 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101-79 Деп.)
6. Трунов Н. В., *Пространства L_p, ассоциированные с весом на полуконечной алгебре Неймана*, Конструктивн. теория функций и функц. анализ, вып. 3, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1981, с. 88–93.
7. Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann),* 2nd ed., Gauthier–Villars, Paris, 1969.
8. Inoue A., *L^1-space associated with a weight*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **A 27** (1973), 291–308.
9. Pedersen G. K., Takesaki M., *The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87.
10. Sakai S., *C^*-algebras and W^*-algebras*, Springer–Verlag, 1971.
11. Takesaki M., *Duality and von Neumann algebras*, Lect. Notes Math. **247** (1972), 665–786.

X. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА НА ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ

Казань, Казанск. ун–т, 1984, 35 с.
(Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 июня 1984 г.,
4948-84 Деп.)

Интегрирование в операторных алгебрах является в настоящее время бурно развивающейся областью функционального анализа, связанной с далеко идущими обобщениями теории интеграла Лебега. В данной работе схема интегрирования на алгебрах Неймана относительно веса, предложенная А. Н. Шерстневым (см. обзор [9]), переносится на неассоциативную ситуацию — класс вещественных йордановых банаховых алгебр с предсопряженным пространством (JBW-алгебр в смысле [10, 17]), интенсивно изучаемых в последнее время с различных точек зрения (см. [1, 14, 16, 18]).

Основным инструментом в работе является отображение γ, введенное для алгебр Неймана в [8] и охарактеризованное автором в [4] как единственное естественное вложение линеала определения веса в предсопряженное к алгебре пространство. Аналогичный результат для JBW-алгебр, полученный в § 2, позволяет, следуя анонсированной в [14] идее для случая состояния, предложить аналог модулярной группы Томита–Такесаки для веса на JBW-алгебре. В § 3 в духе работ [8, 5] и [6] строятся неассоциативные пространства L_1 и L_2 интегрируемых билинейных форм и интегрируемых с квадратом операторов. В качестве приложения в § 4 предлагается некоторый естественный аналог конструкции Гельфанда – Наймарка – Сигала (ГНС) для состояния на JB-алгебре.

§ 1. Определения и предварительные результаты

1.1. Основные сведения о JB и JBW-алгебрах содержатся в [10] и [17], мы будем продерживаться принятой в этих работах терминологии и обозначений.

Всюду ниже $\mathcal{A}$ — JBW-алгебра с единицей $\mathbf{1}$ и предсопряженным пространством $\mathcal{A}_*$ всех нормальных функционалов на $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}^+$ и $\mathcal{A}_*^+$ — соответствующие конусы положительных элементов. Слабой топологией в $\mathcal{A}$ называется $\sigma(\mathcal{A},\mathcal{A}_*)$-топология, сильной — локально выпуклая топология, порожденная полунормами $x \mapsto \rho(x^2)^{1/2}$ $(\rho \in \mathcal{A}_*^+)$. Через $x \circ y$ обозначается йорданово произведение в $\mathcal{A}$,

$$U_x y \equiv 2x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y.$$

Важным примером JBW-алгебры служит JW-алгебра: это йорданова алгебра самосопряженных ограниченных операторов в комплексном гильбертовом пространстве с симметризованным произведением $x \circ y \equiv \frac{1}{2}(xy + yx)$, замкнутая в слабой операторной топологии и содержащая тождественный оператор.

Каждая JBW-алгебра $\mathcal{A}$ допускает разложение вида

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{sp}} \oplus \mathcal{A}_{\text{ex}},$$

где JBW-алгебра $\mathcal{A}_{\text{sp}}$ изоморфна JW-алгебре, а $\mathcal{A}_{\text{ex}}$ — JBW-алгебре всех непрерывных функций $C(X, M_3^8)$ на гиперстоуновском отделимом компакте X со значениями в исключительной йордановой алгебре M_3^8 всех симметрических матриц третьего порядка над числами Кэли (см. [17]).

1.2. Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ — JBW-подалгебра, порожденная x, y и $\mathbf{1}$ некоторой JBW-алгебры. Тогда $\mathcal{A}$ изоморфна JW-алгебре.*

Доказательство сводится к использованию теоремы Ширшова–Кона (см. [15]) и исключительности алгебры M_3^8 по схеме доказательства аналогичного результата для JB-алгебр в [21, предложение 2.1] с заменой в рассуждениях равномерной топологии на слабую.

Пусть $\mathcal{A}$ — JW-алгебра. Согласно [12, 19] $\mathcal{A}$ допускает единственное разложение вида

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3,$$

где $\mathcal{A}_k$ — JW-алгебры, причем:

— $\mathcal{A}_1$ есть эрмитова часть $\mathfrak{A}_1^s$ некоторой алгебры Неймана $\mathfrak{A}_1$;

— существует такая алгебра Неймана $\mathfrak{A}_2$ и ее инволютивный $*$-антиавтоморфизм α, что

$$\mathcal{A}_2 = \{x \in \mathfrak{A}_2^s \mid \alpha(x) = x\};$$

— $\mathcal{A}_3$ — JW-алгебра типа I_2.

В соответствии с [18] $\mathcal{A}_3$ в свою очередь может быть разложена в сумму вида

$$\mathcal{A}_3 = \bigoplus_i L^\infty(\Omega_i, \mu_i, V_i),$$

где Ω_i — локально компактные отделимые пространства с мерами Радона μ_i, V_i — JW-факторы типа I_2 (спин-факторы).

В силу теоремы 2 [20] для каждого индекса i существует фактор Неймана $\mathfrak{A}_i$ и отображение $\pi_i \colon V_i \to \mathfrak{A}_i$, являющееся изоморфизмом V_i на JW-алгебру $\pi_i(V_i)$, порождающую $\mathfrak{A}_i$, причем $\mathfrak{A}_i$ имеет тип I_n $(n < \infty)$, если V_i — конечномерный спин-фактор, и тип II_1 — в противном случае. Положим

$$\mathfrak{A}_3 \equiv \bigoplus_i L^\infty(\Omega_i, \mu_i, V_i).$$

В дальнейшем через $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ мы будем обозначать алгебру Неймана, определенную равенством

$$\mathfrak{A}(\mathcal{A}) \equiv \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \mathfrak{A}_3.$$

Отметим, что если JW-алгебра $\mathcal{A}$ не содержит прямых слагаемых типа I_2, то $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ есть алгебра Неймана, порожденная $\mathcal{A}$ (см. [19]). В общем случае из конструкции алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ следует существование точного представления $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{A}(\mathcal{A})$ такого, что JW-алгебра $\pi(\mathcal{A})$ порождает $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$.

Условимся в дальнейшем отождествлять JW-алгебру $\mathcal{A}$ с изоморфной ей JW-алгеброй $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{A})$.

Следующий результат, в формулировке которого мы воспользуемся указанным соглашением, по существу вытекает из теоремы 2.2 и замечания 2.7 работы [12]; ввиду важности этой конструкции для дальнейшего мы наметим его доказательство.

1.3. Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ — JW-алгебра. Существует линейная сюръекция $\varepsilon\colon \mathfrak{A}(\mathcal{A})^{\mathfrak{s}} \to \mathcal{A}$ такая, что*

($\varepsilon1$) $\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\varepsilon(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

($\varepsilon2$) $\varepsilon(x \circ y) = x \circ \varepsilon(y)$ $(x \in \mathcal{A},\ y \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})^{\mathfrak{s}})$;

($\varepsilon3$) $\varepsilon(x^2) = 0 \implies x = 0$ $(x \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})^{\mathfrak{s}})$;

($\varepsilon4$) $x_i \nearrow x$ $(x_i, x \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})^+) \implies \varepsilon(x_i) \nearrow \varepsilon(x)$.

Доказательство. Очевидно достаточно указать отображения $\varepsilon_k\colon \mathfrak{A}_k^{\mathfrak{s}} \to \mathcal{A}_k$ $(k = 2, 3)$ с нужными свойствами. Для $\varepsilon_2 \equiv \frac{1}{2}(I + \alpha)$ справедливость $(\varepsilon1) - (\varepsilon4)$ очевидна. Для построения ε_3 можно сразу считать, что $\mathcal{A}_3 = L^\infty(\Omega, \mu, V)$, где Ω — локально компактное отделимое пространство, μ — мера Радона на Ω, V — JW-фактор типа I_2 (спин-фактор). Отметим, что ограничение нормированного следа Tr с $\mathfrak{A}(V)$ на V является каноническим следом на спин-факторе (см. [20, теорема 2]). В таком случае равенство

$$\mathrm{Tr}\,(x \circ y) = \mathrm{Tr}\,(\varepsilon_0(x) \circ y) \qquad (y \in V)$$

определяет для каждого $x \in \mathfrak{A}(V)^{\mathfrak{s}}$ единственный элемент $\varepsilon_0(x) \in V$. При этом свойства $(\varepsilon1) - (\varepsilon4)$ для линейной сюръекции $\varepsilon_0\colon \mathfrak{A}(V)^{\mathfrak{s}} \to V$ проверяются непосредственно, например, как в известной конструкции условного ожидания относительно конечного следа на алгебре Неймана. Учитывая, что V — гильбертово пространство со скалярным произведением $\{x, y\} \mapsto \mathrm{Tr}\,(x \circ y)$, нетрудно проверить, что равенство

$$[\varepsilon_3(x)](\omega) \equiv \varepsilon_0[x(\omega)] \quad (\mu\text{-п.в.})$$

корректно определяет линейную сюръекцию $\varepsilon_3\colon \mathfrak{A}(\mathcal{A}_3)^{\mathfrak{s}} \to \mathcal{A}_3$. Свойства $(\varepsilon1) - (\varepsilon4)$ для ε_3 следуют из их справедливости для ε_0.

По аналогии с алгебрами Неймана дадим следующее определение (ср., например, [13]).

1.4. Определение. *Весом* на JBW-алгебре $\mathcal{A}$ будем называть отображение $\varphi\colon \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$ такое, что:

(i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,

(ii) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$

для $x, y \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geq 0$, причем $0 \cdot \infty \equiv 0$.

Положим

$$\mathfrak{m}_\varphi^+ \equiv \{x \in \mathcal{A}^+ \mid \varphi(x) < +\infty\},$$

$$\mathfrak{n}_\varphi \equiv \{x \in \mathcal{A} \mid \varphi(x^2) < +\infty\}$$

и пусть $\mathfrak{m}_\varphi$ — линейная оболочка в $\mathcal{A}$ наследственного конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+$; той же буквой φ будем обозначать и линейное продолжение веса φ с $\mathfrak{m}_\varphi^+$ на $\mathfrak{m}_\varphi$.

Вес φ на $\mathcal{A}$ назовем:

— *точным*, если из $\varphi(x^2) = 0$ следует, что $x = 0$ $(x \in \mathcal{A})$,

— *нормальным*, если существует семейство $(\rho_i) \in \mathcal{A}_*^+$ такое, что $\varphi(x) = \sum\limits_i \rho_i(x)$ $(x \in \mathcal{A}^+)$,

— *полуконечным*, если $\mathfrak{m}_\varphi$ плотно в $\mathcal{A}$ в слабой топологии.

1.5. Лемма. *Пусть φ — вес на JBW-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда*

(а) *$\mathfrak{m}_\varphi$ и $\mathfrak{n}_\varphi$ — квадратичные идеалы в $\mathcal{A}$, причем $\mathfrak{m}_\varphi^+ = \mathfrak{m}_\varphi \cap \mathcal{A}^+$, $\mathfrak{m}_\varphi = \{x \circ y \mid x, y \in \mathfrak{n}_\varphi\}$;*

(б) *следующие условия эквивалентны:*

(i) *вес φ полуконечен,*

(ii) *существует возрастающая сеть $e_\alpha \nearrow \mathbf{1}$, $e_\alpha \in \mathfrak{m}_\varphi^+$;*

(iii) *$\mathfrak{m}_\varphi$ плотно в $\mathcal{A}$ в сильной топологии.*

Доказательство. Напомним, что квадратичным идеалом (см. [15]) называется линеал $J \subset \mathcal{A}$ такой, что $U_x(\mathcal{A}) \subset J$ для каждого $x \in J$. Заметим, что $\mathfrak{m}_\varphi \subset \mathfrak{n}_\varphi$, поскольку $x^2 \leq \|x\|\, x$ для каждого $x \in \mathcal{A}^+$ [10, 2.2.1]. Если $x \in \mathfrak{n}_\varphi$, то для каждого $y \in \mathcal{A}^+$ из неравенства $0 \leq U_x y \leq \|y\|\, x^2$ [10, 2.2.7] следует, что $U_x y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, откуда $U_x(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{m}_\varphi$. Из неравенства

$$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \qquad (x, y \in \mathcal{A})$$

следует, что $\mathfrak{n}_\varphi$ — линеал. Равенство $\mathfrak{m}_\varphi^+ = \mathfrak{m}_\varphi \cap \mathcal{A}^+$, вытекает из наследственности конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+$; последнее утверждение в (а) есть очевидное следствие тождеств $x \circ y = \frac{1}{2}[(x+y)^2 - x^2 - y^2]$ и $x^2 - y^2 = (x-y)\circ(x+y)$ $(x, y \in \mathcal{A})$.

(б). Для проверки импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) воспользуемся известной конструкцией аппроксимативной единицы в JB-алгебре (по поводу опущенных деталей доказательства см. [10, лемма 9.1] и [11]). Пусть Λ — множество всех конечных частей $\mathfrak{n}_\varphi$, упорядоченное по включению. Положим для $\alpha = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Lambda$

$$v_\alpha \equiv \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (\in \mathfrak{m}_\varphi^+).$$

Тогда $v_\alpha^{1/2} \in \mathfrak{n}_\varphi$, так что возрастающая сеть

$$e_\alpha \equiv U_{v_\alpha^{1/2}}\big((1/n \cdot \mathbf{1} + v_\alpha)^{-1}\big) \in \mathfrak{m}_\varphi^+,$$

причем $0 \leq e_\alpha \leq \mathbf{1}$. Из неравенства

$$U_{\mathbf{1}-e_\alpha}(x_i^2) \leq 1/4n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

следует, что $\|U_{\mathbf{1}-e_\alpha} x\| \to 0$ для всех $x \in \mathfrak{m}_\varphi$. В $\mathcal{A}^+$ существует $\sup e_\alpha \equiv e$, проверим, что $e = \mathbf{1}$. Воспользовавшись для этого рассуждениями из доказательства теоремы 2.3 [11], нетрудно показать, что $x \circ e = x$ для каждого

$x \in \mathfrak{m}_\varphi$. Но в силу раздельной слабой непрерывности умножения в $\mathcal{A}$ (см. [17]) это равенство остается верным и для $x = \mathbf{1}$.

Для проверки импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) заметим, что поскольку $e_\alpha \to \mathbf{1}$ сильно и умножение сильно непрерывно на ограниченных множествах в $\mathcal{A}$ по совокупности переменных (см. [17]), то для каждого $x \in \mathcal{A}$ лежащая в $\mathfrak{m}_\varphi$ сеть $U_{e_\alpha} x \to x$ сильно.

Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) очевидна, поскольку сильная топология в $\mathcal{A}$ сильнее слабой.

1.6. *Носителем* нормального веса φ назовем идемпотент $e \in \mathcal{A}$ такой, что

$$\mathbf{1} - e = \sup\{p \in \mathcal{A} \mid p^2 = p,\ \varphi(p) = 0\}.$$

Воспользовавшись разложением Пирса по e (см. [15]) и неравенством Шварца, нетрудно проверить, что

$$\varphi(x) = \varphi(U_e x) \qquad (x \in \mathcal{A}^+),$$

причем вес φ_e — естественная редукция φ на JBW-алгебру $e\mathcal{A}e \equiv U_e(\mathcal{A})$ — точен, нормален и полуконечен (последнее в случае полуконечности φ).

1.7. Будем связывать с весом φ интегральную полунорму $\|\cdot\|_\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi$, полагая (ср. [9])

$$\|x\|_\varphi \equiv \inf\{\varphi(x_1 + x_2) \mid x = x_1 - x_2,\ x_i \in \mathfrak{m}_\varphi^+\}.$$

Пусть $N_\varphi \equiv \{x \in \mathcal{A} \mid \varphi(x^2) = 0\}$. Обозначим через H_φ вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением фактор-пространства $\mathfrak{n}_\varphi / N_\varphi$ по скалярному произведению $(\widehat{x}, \widehat{y})_\# \equiv \varphi(x \circ y)$, и пусть $\|x\|_\# \equiv \varphi(x^2)^{1/2}$ $(x \in \mathfrak{n}_\varphi)$, где $\widehat{\ }): \mathfrak{n}_\varphi \to \mathfrak{n}_\varphi / N_\varphi$ — каноническая сюръекция.

1.8. Пусть φ — вес на JW-алгебре $\mathcal{A}$. В случае, если $\mathcal{A}$ — эрмитова часть алгебры Неймана, то есть $\mathcal{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{A})^э$, мы не будем различать понятий вес на $\mathcal{A}$ и вес на $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$; отметим, что в этом случае согласно [8] и [9] соответствующие объекты следовало бы обозначать $\mathfrak{m}_\varphi^э$ и $\mathfrak{n}_\varphi^э$. Если $\varepsilon : \mathfrak{A}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ — проекция из леммы 1.3, то будем через $\widetilde{\varphi}$ обозначать единственный ε-инвариантный вес на $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$, продолжающий φ, то есть $\widetilde{\varphi} = \varphi(\varepsilon\cdot)$. Отметим очевидное равенство

$$\|x\|_{\widetilde{\varphi}} = \|\varepsilon(x)\|_\varphi \qquad (x \in \mathfrak{m}_{\widetilde{\varphi}}).$$

Заметим, что из ($\varepsilon 3$), ($\varepsilon 4$) и леммы 1.5 следует, что для точного (соответственно, нормального, полуконечного) веса φ вес $\widetilde{\varphi}$ также точен (соотв., нормален, полуконечен). Более того, каждый вес φ на $\mathcal{A}$, обладающий свойством: из $x_i \nearrow x$ $(x_i, x \in \mathcal{A}^+)$ следует, что $\varphi(x_i) \nearrow \varphi(x)$, является нормальным. Действительно, в силу ($\varepsilon 4$) это свойство переносится и на $\widetilde{\varphi}$, а на алгебре Неймана оно эквивалентно нормальности (см. [13]).

1.9. Лемма. *Пусть φ — нормальный вес на JBW-алгебре $\mathcal{A}$ и e — носитель φ. Тогда*

(i) $|\varphi(x \circ y)| \leq \|x \circ y\|_\varphi \leq \varphi(x^2)^{1/2} \varphi(y^2)^{1/2}$ $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$,

(ii) $\|x\|_\varphi = \|U_e x\|_\varphi$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathcal{A}$ есть эрмитова часть $\mathfrak{A}^э$ некоторой алгебры Неймана $\mathfrak{A}$. Если $(\pi_\varphi, \mathfrak{H})$ — представление $\mathfrak{A}$, порожденное весом φ, то воспользовавшись леммами 1.1 и 1.2 [13], имеем $\|x\|_\varphi = \|\beta(x)\|$ для каждого $x \in \mathfrak{m}_\varphi$, где $\beta\colon \mathfrak{m}_\varphi + i\mathfrak{m}_\varphi \to \pi_\varphi(\mathfrak{A})'_*$ — линейное отображение, определенное условием

$$\beta(x \circ y)(a') = \frac{1}{2}[(a'\eta(x), \eta(y)) + (a'\eta(y), \eta(x))] \qquad (a' \in \pi_\varphi(\mathfrak{A})',\ x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$$

(здесь $\eta\colon \{x \in \mathfrak{A} \mid \varphi(x^*x) < +\infty\} \to \mathfrak{H}$ — каноническая факторизация). В таком случае (i) очевидно, для (ii) достаточно заметить, что $\beta(x) = \beta(U_e x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$.

В общем случае для проверки (i) достаточно перейти к JBW-подалгебре, порожденной x, y и $\mathbf{1}$, и применить лемму 1.2. Для (ii) очевидно достаточно проверить, что $\|\{ex(\mathbf{1}-e)\}\|_\varphi = 0$, где $2\{ex(\mathbf{1}-e)\}$ — $\frac{1}{2}$-компонента в разложении Пирса x по e. Обозначим через $\mathcal{A}'$ JBW-подалгебру $\mathcal{A}$, порожденную элементами x, e и $\mathbf{1}$; пусть $\varphi' \equiv \varphi|_{\mathcal{A}'}$ и e' — носитель φ' в $\mathcal{A}'$. Тогда

$$\|\{ex(\mathbf{1}-e)\}\|_\varphi \le \|\{ex(\mathbf{1}-e)\}\|_{\varphi'} = \|U_{e'}\{ex(\mathbf{1}-e)\}\|_{\varphi'} = 0,$$

поскольку $e' \le e$ и $\mathcal{A}'$ изоморфна JW-алгебре по лемме 1.2.

1.10. Следом на JBW-алгебре $\mathcal{A}$ называется вес τ такой, что $\tau(U_s x) = \tau(x)$ для всех $x \in \mathcal{A}$, $s \in \mathcal{A}$, $s^2 = \mathbf{1}$. В данной работе мы будем иметь дело только с конечными ($\tau(\mathbf{1}) < +\infty$) нормальными следами, выделяемыми среди элементов $\mathcal{A}_*^+$ условием

$$\tau(x \circ (y \circ z)) = \tau((x \circ y) \circ z) \qquad (x, y, z \in \mathcal{A}),$$

или эквивалентным ему (см. [16])

$$\tau(x \circ y) \ge 0 \qquad (x, y \in \mathcal{A}^+).$$

Задача интегрирования относительно конечного нормального следа на JBW-алгебре рассматривалась Ш. А. Аюповым [1].

§ 2. Отображение γ и модулярное косинус-семейство, ассоциированное с весом на JBW-алгебре

2.1. Теорема (ср. [4, теорема 2.1]). *Пусть φ — нормальный полуконечный вес на JBW-алгебре $\mathcal{A}$. Существует, и притом единственное, отображение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{A}_*$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(γ1) $\gamma(x)(\mathbf{1}) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$,

(γ2) $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^+) = \{\rho \in \mathcal{A}_*^+ \mid \exists \lambda \ge 0 : \rho \le \lambda\varphi\}$,

(γ3) $\{x, y\} \mapsto \gamma(x)(y)$ — *симметрическая положительная билинейная форма на $\mathfrak{m}_\varphi$.*

При этом отображение γ линейно и справедливы соотношения:

(γ4) $\|\gamma(x)\| = \|x\|_\varphi$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$,

(γ5) $\gamma(x)(x) \le \varphi(x^2)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$.

Доказательство мы начнем со следующего замечания: утверждение теоремы достаточно проверить лишь для точных нормальных полуконечных весов φ.

Действительно, если e — носитель φ и отображение γ_e ассоциировано с весом φ_e на $e\mathcal{A}e \equiv U_e(\mathcal{A})$, то непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что искомое γ однозначно восстанавливается по γ_e равенством

$$\gamma(x)(y) = \gamma_e(U_e x)(U_e y) \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi,\ y \in \mathcal{A}).$$

При этом (γ4) следует из выкладки

$$\|x\|_\varphi = \|U_e x\|_\varphi = \|\gamma_e(x)\| \le \|\gamma(x)\| \le \|x\|_\varphi \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi)$$

(последнее неравенство здесь следует из того, что $\|\rho\| = \rho(\mathbf{1})$ для $\rho \in \mathcal{A}_*^+$). Для проверки (γ5) достаточно воспользоваться неравенством

$$(U_e x)^2 \le U_e(x^2) \qquad (x, e \in \mathcal{A},\ e^2 = e)$$

(оно очевидно для JW-алгебры, следовательно, верно и в общем случае по лемме 1.2).

Поэтому мы всюду в доказательстве теоремы 2.1 будем считать вес φ точным.

Нам понадобится следующая

2.2. Лемма. *Пусть существует отображение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{A}_*$, удовлетворяющее ($\gamma$3) – ($\gamma$5) и следующим условиям:*

(γ1)$'$ $\varphi(x) = \sup\{\gamma(y)(x) \mid y \in \mathfrak{m}_\varphi^+,\ y \le \mathbf{1}\}$ $(x \in \mathcal{A}^+)$;

(γ2)$'$ $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^+) \subset \mathcal{A}_*^+$ *и если* $\gamma(x)(y) \ge 0$ *для всех* $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, *то* $y \ge 0$ $(y \in \mathcal{A})$;

(γ6) *для* $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ *из* $\lim\limits_n \gamma(x_n)(x_n) = 0$ *и* $\lim\limits_{m,n} \varphi((x_m - x_n)^2) = 0$ *всякий раз следует* $\lim\limits_n \varphi(x_n^2) = 0$.

Тогда γ — единственное отображение из $\mathfrak{m}_\varphi$ в $\mathcal{A}_*$, удовлетворяющее (γ1) – (γ3).

Доказательство. Из (γ3) и (γ1)$'$ очевидно следует (γ1). Для проверки (γ2) заметим, что

$$0 \le \gamma(x)(y) = \gamma(y)(x) \le \|\gamma(y)\|\,\|x\| = \|x\|\varphi(y) \qquad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi^+).$$

Наоборот, если $\rho \in \mathcal{A}_*$ и $0 \le \rho \le \varphi$, то в силу (γ4) и вытекающей из (γ2)$'$ плотности $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi)$ в $\mathcal{A}_*$ (см., например, [10, стр. 28]) найдется такой $y \in \mathcal{A}$, что $\rho(x) = \gamma(x)(y)$ для всех $x \in \mathfrak{m}_\varphi$. Тогда из ($\gamma$2)$'$ и (γ1) следует, что $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, так что $\rho = \gamma(y)$. Пусть отображение $\gamma'\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{A}_*$ также удовлетворяет (γ1) – (γ3). Очевидно, что γ и γ' — положительные линейные биекции $\mathfrak{m}_\varphi$ на $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi) = \gamma'(\mathfrak{m}_\varphi)$. Тогда отображение $\delta\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathfrak{m}_\varphi$, определенное равенством $\gamma(\delta(x)) = \gamma'(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$, является положительной линейной биекцией $\mathfrak{m}_\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi$, причем $\varphi(\delta(x)) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$. Из определения $\|\cdot\|_\varphi$ непосредственно ясно, что $\|\delta(x)\|_\varphi = \|x\|_\varphi$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$. В таком случае из ($\gamma$4) следует существование линейной изометрической биекции $\sigma\colon \mathcal{A}_* \to \mathcal{A}_*$, однозначно определенной условием

$$\sigma(\gamma(x)) = \gamma(\delta(x)) \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi).$$

Сопряженное к σ отображение $\sigma^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, определяемое условием

$$\gamma(y)(\sigma^*(x)) = \gamma\,'(y)(x) \qquad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi),$$

тогда является линейной изометрической биекцией $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}$, причем $\sigma^*(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ в силу $(\gamma 1)$. В таком случае σ^* — йорданов автоморфизм $\mathcal{A}$ (см. [22]). Заметим, что ограничение σ^* на $\mathfrak{m}_\varphi$ совпадает с δ, откуда $\varphi((\delta(x))^2) = \varphi(x^2)$ для всех $x \in \mathfrak{m}_\varphi$. Переходя к комплексной йордановой алгебре $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{c}} \equiv \mathfrak{m}_\varphi \oplus i\mathfrak{m}_\varphi$ с инволюцией $(x \oplus iy)^* \equiv x \oplus (-iy)$ (см. [15]) и продолжая φ с $\mathfrak{m}_\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{c}}$, определим комплексное гильбертово пространство H_φ^{c} как пополнение $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{c}}$ по скалярному произведению $(x, y) \equiv \varphi(x \circ y^*)$. Тогда δ продолжается до унитарного оператора v в H_φ^{c}, а комплексификация формы $\{x, y\} \mapsto \gamma(x)(y)$ однозначно определяет в силу $(\gamma 5)$ и $(\gamma 6)$ несингулярный оператор $0 \le p \le I$ в H_φ^{c} такой, что $(px, y) = \gamma(x)(y)$ для всех $x, y \in \mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{c}}$. Поскольку

$$(pvx, y) = \gamma\,'(x)(y) \qquad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi),$$

то из $(\gamma 3)$ следует, что оператор $pv \ge 0$ в H_φ^{c}. Отсюда $v = I$ в силу единственности полярного разложения оператора в H_φ^{c}, так что $\gamma\,' = \gamma$. Лемма доказана.

Нам остается, таким образом, указать отображение $\gamma : \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{A}_*$, удовлетворяющее условиям леммы 2.2.

Начнем со случая JW-алгебры $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ — эрмитова часть $\mathfrak{A}^{\mathrm{э}}$ некоторой алгебры Неймана $\mathfrak{A}$, то воспользовавшись обозначениями доказательства леммы 1.9, положим (ср. [8]):

$$\gamma(x)(y) \equiv \beta(x)(J\pi_\varphi(y)J) \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi,\ y \in \mathcal{A}),$$

где J — изометрическая инволюция в $\mathfrak{H}$ из полярного разложения $S = J\Delta^{1/2}$ замыкания в $\mathfrak{H}$ оператора

$$\eta(x) \mapsto \eta(x)^* \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{c}}).$$

Нужные свойства γ легко следуют из соответствующих результатов теории Томита–Такесаки [2] и фактически проверены в [4] и [8]. В частности $(\gamma 5)$ и $(\gamma 6)$ следуют из представления

$$\gamma(x)(y) = (J\eta(y), \eta(x)) = (\Delta^{1/2}\eta(x), \eta(y)) \qquad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi).$$

Для общей JW-алгебры $\mathcal{A}$ условимся обозначать через $\widetilde{\gamma}\colon \mathfrak{m}_{\widetilde{\varphi}} \to \mathfrak{A}(\mathcal{A})_*^{\mathrm{э}}$ отображение, ассоциированное указанным выше способом с весом $\widetilde{\varphi}$ на $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$, и определим искомое отображение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathfrak{A}_*$, полагая

$$\gamma(x) \equiv \widetilde{\gamma}(x)|_{\mathcal{A}} \qquad (x \in \mathfrak{m}_\varphi).$$

При этом, как нетрудно проверить, условия леммы 2.2 для γ выполнены в силу их справедливости для $\widetilde{\gamma}$ и результата следующей леммы.

2.3 Лемма. *В указанных предположениях для любых $x, y \in \mathfrak{m}_{\widetilde{\varphi}}$ справедливо равенство*

$$\widetilde{\gamma}(\varepsilon(x))(y) = \widetilde{\gamma}(x)(\varepsilon(y)).$$

Доказательство. Из разложения JW-алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3$, использовавшегося при доказательстве леммы 1.3, ясно, что достаточно разобрать случаи $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}_3$.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$, тогда $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(I + \alpha)$. Определим отображение $\gamma_\alpha \colon \mathfrak{m}_{\widetilde{\varphi}} \to \mathfrak{A}(\mathcal{A})^{\mathfrak{s}}_*$, полагая

$$\gamma_\alpha(x)(y) = \widetilde{\gamma}(\alpha(x))(\alpha(y)) \qquad (x \in \mathfrak{m}_{\widetilde{\varphi}},\ y \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})^{\mathfrak{s}}).$$

Из справедливости $(\gamma 1)$ – $(\gamma 3)$ для $\widetilde{\gamma}$ немедленно следует справедливость этих свойств и для γ_α. Тогда по лемме 2.2 $\gamma_\alpha = \widetilde{\gamma}$, откуда и следует нужное равенство.

Рассмотрим теперь случай $\mathcal{A} = \mathcal{A}_3$, $\varepsilon = \varepsilon_3$. Можно сразу считать, что $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mu, V)$, причем $\mu(\Omega) < +\infty$, поскольку центр $\mathcal{A}$ допускает разложение $L^\infty(\Omega, \mu, \mathbb{R}) = \bigoplus\limits_i L^\infty(\Omega_i, \mu_i, \mathbb{R})$, где $\mu_i(\Omega_i) < \infty$. Определим на $\mathcal{A}$ точный нормальный конечный след τ, полагая

$$\tau(x) = \int_\Omega \operatorname{Tr}(x(\omega))\, d\mu(\omega),$$

тогда $\widetilde{\tau}(x) \equiv \tau(\varepsilon(x)) = \int_\Omega \operatorname{Tr}(x(\omega))\, d\mu(\omega)$ — точный нормальный конечный след на $\mathfrak{A}(\mathcal{A})^{\mathfrak{s}} = L^\infty(\Omega_i, \mu_i, \mathfrak{A}(V))$, причем $\widetilde{\tau}(\varepsilon(x) \circ y) = \widetilde{\tau}(x \circ \varepsilon(y))$ для всех $x, y \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})^{\mathfrak{s}}$ (см. доказательство леммы 1.3). По теореме Радона–Никодима для алгебр Неймана существует самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$, такой, что $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\tau}(h\,\cdot)$. Пусть $h = \int_0^{+\infty} \lambda\, de(\lambda)$ — его спектральное представление и $h_n \equiv \int_0^n \lambda\, de(\lambda)$, $n = 1, 2, \dots$. Из теоремы 3.1 [4] тогда следует, что $\widetilde{\gamma}(x)(y) = \lim\limits_n \widetilde{\tau}(h_n^{1/2} x h_n^{1/2} y)$ для всех $x, y \in \mathfrak{m}_{\widetilde{\varphi}}$. Из равенства

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_n \widetilde{\tau}(h_n \circ \varepsilon(x)) = \lim_n \widetilde{\tau}(\varepsilon(h_n) \circ x) \qquad (x \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})^+)$$

следует, что $\varepsilon(h_n) \nearrow h$, откуда $\varepsilon(h_n)(\mathbf{1} + \varepsilon(h_n))^{-1} \nearrow h(\mathbf{1} + h)^{-1}$, так что $h(\mathbf{1} + h)^{-1} \in \mathcal{A}$, а значит все проекторы $e(\lambda) \in \mathcal{A}$. В таком случае воспользовавшись $(\varepsilon 2)$ и тем, что все $h_n \in \mathcal{A}$, имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}(\varepsilon(x))(y) &= \lim_n \widetilde{\tau}(h_n^{1/2} \varepsilon(x) h_n^{1/2} y) = \lim_n \widetilde{\tau}(\varepsilon(h_n^{1/2} x h_n^{1/2}) \circ y) \\ &= \lim_n \widetilde{\tau}((h_n^{1/2} x h_n^{1/2}) \circ \varepsilon(y)) = \widetilde{\gamma}(x)(\varepsilon(y)).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Переходя к общим JBW-алгебрам, докажем сначала теорему 2.1 в следующем важном частном случае, позволяющем указать явный вид γ.

2.4. Лемма (ср. [4, лемма 3.2]). *Пусть τ — точный нормальный конечный след на JBW-алгебре $\mathcal{A}$ и вес $\varphi = \tau(h^2 \circ (\cdot))$, где $h \in \mathcal{A}$, $\lambda\mathbf{1} \le h \le \mathbf{1}$ для некоторого $\lambda > 0$. Тогда для φ верна теорема 2.1, причем*

$$\gamma(x)(y) = \tau((U_h x) \circ y), \quad \|x\|_\varphi = \tau(|U_h x|) \qquad (x, y \in \mathcal{A}).$$

Доказательство. Проверим условия леммы 2.2 для отображения $\gamma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}_*$, определенного равенством

$$\gamma(x)(y) = \tau((U_h x) \circ y) \qquad (x, y \in \mathcal{A}).$$

При этом (γ1) (следовательно, (γ1)$'$) и (γ3) очевидны в силу характеристического свойства следа (см. п° 1.10). В частности $\gamma(x)(x) = \tau((U_x h) \circ h) \ge 0$, поскольку U_x — положительное отображение $\mathcal{A}$. Для проверки (γ4) заметим, что h обратим и $U_{h^{-1}} = U_h^{-1}$ (см. [10]). Учитывая, что U_h — линейный порядковый изоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}$, имеем

$$\|x\|_\varphi = \|U_h x\| \le \tau(|U_h x|) = \tau((U_h x) \circ s) \le \|\gamma(x)\| \le \|x\|_\varphi \qquad (x \in \mathcal{A}),$$

где $U_h x = s \circ |U_h x|$ — полярное разложение $U_h x$ (последнее неравенство в этой выкладке следует из (γ1) и определения $\|\cdot\|_\varphi$). Для проверки (γ2)$'$ предположим, что $\tau((U_h x) \circ y) \ge 0$ для некоторого $y \in \mathcal{A}$ и для всех $x \in \mathcal{A}^+$. Тогда

$$\tau(|U_h y|) = \|\gamma(y)\| = \varphi(y) = \tau(U_h y),$$

откуда в силу точности τ следует, что $U_h y \ge 0$, так что $y \ge 0$. Для проверки (γ6) заметим, что для каждого $y \in \mathcal{A}$ оператор L_y ($L_y x \equiv y \circ x$), а следовательно и оператор $U_y = 2L_y^2 - L_{y^2}$ ограничен в $\mathcal{A}$ по норме $x \mapsto \tau(x^2)^{1/2}$. Следовательно, в силу обратимости h:

$$\varphi(x^2) \le \tau(x^2) \le c\,\tau((U_h x) \circ x) \qquad (x \in \mathcal{A})$$

для некоторого $c > 0$, откуда следует (γ6). Неравенство (γ5) получается переходом к JBW-алгебре, порожденной x, h и $\mathbf{1}$, и применением леммы 1.2 с учетом того, что теорема 2.1 уже доказана для JW-алгебр. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы 2.1 воспользуемся разложением $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathrm{sp}} \oplus \mathcal{A}_{\mathrm{ex}}$ [17] и отметим, что если теорема верна для ограничения веса φ на каждое из слагаемых некоторого (даже бесконечного) разложения $\mathcal{A}$ в прямую ℓ^∞-сумму JBW-алгебр, то она верна и для $\mathcal{A}$. Раскладывая далее центр $C(X, \mathbb{R})$ алгебры $\mathcal{A}_{\mathrm{ex}} = C(X, M_3^8)$, можно считать, что $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mu, M_3^8)$, где $\mu(\Omega) < +\infty$. Воспользуемся тем, что в этом случае можно считать (см. [17]) $\mathcal{A}_* = L^1(\Omega, \mu, (M_3^8, \|\cdot\|_{\mathrm{Tr}}))$, причем для $\rho \in \mathcal{A}_*$, $x \in \mathcal{A}$:

$$\rho(x) = \int_\Omega \mathrm{Tr}\,(\rho(\omega) \circ x(\omega))\, d\mu(\omega),$$

где Tr — матричный след на M_3^8. Определим на $\mathcal{A}$ точный нормальный конечный след τ, полагая

$$\tau(x) \equiv \int_\Omega \mathrm{Tr}\,(x(\omega))\,d\mu(\omega).$$

Заметим, что в силу п° (iii) леммы 1.5 $\mathfrak{m}_\varphi$ плотно в $\mathcal{A}$ по норме $x \mapsto \tau(x^2)^{1/2}$, а следовательно, плотно и в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega, \mu, (M_3^8, \mathrm{Tr}\,))$. Воспользовавшись конечномерностью M_3^8, тогда нетрудно проверить, что для семейства $(\rho_i) \subset \mathcal{A}_*^+$ такого, что $\varphi = \sum_i \rho_i$, ряд $\sum_i \rho_i(\omega) \equiv \Phi(\omega)$ сходится п.в. на Ω и, следовательно, определяет измеримую функцию $\Phi\colon \Omega \to (M_3^8)^+$, причем $\Phi(\omega) \neq 0$ п.в. в силу точности φ. Разбивая Ω на дизъюнктивные измеримые части, на каждой из которых Φ п.в. ограничена и отделена от нуля (в смысле порядка в M_3^8), мы получим разложение $\mathcal{A}$ в прямую сумму слагаемых, для ограничения φ на каждое из которых можно применить лемму 2.4. Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

2.5. Следствие. *Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на JBW-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда:*

(a) *отображение γ переводит $\mathfrak{m}_\varphi$ на плотную часть $\mathcal{A}_*$ и, следовательно, продолжается до изометрического изоморфизма банахова пространства, являющегося пополнением $\mathfrak{m}_\varphi$ по норме $\|\cdot\|_\varphi$, на $\mathcal{A}_*$.*

(б) *отображение $\{x, y\} \mapsto \gamma(x \circ y)$ $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$ продолжается по непрерывности до $\mathcal{A}_*$-значного “скалярного произведения” на H_φ, т.е. существует единственное билинейное отображение $^{\circ})\colon H_\varphi \times H_\varphi \to \mathcal{A}_*$ такое, что*

(i) $\xi \circ \xi \in \mathcal{A}_*^+$, $\xi \circ \xi = 0 \implies \xi = 0$ $(\xi \in H_\varphi)$,

(ii) $|(\xi, \eta)_\#| \leq \|\xi \circ \eta\| \leq \|\xi\|_\# \|\eta\|_\#$ $(\xi, \eta \in H_\varphi)$,

(iii) $\widehat{x} \circ \widehat{y} = \gamma(x \circ y)$ $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$.

2.6. Замечание. Определим для нормального полуконечного веса φ на $\mathcal{A}$ симметрическую положительную форму $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi$, полагая $\langle x, y\rangle_\varphi \equiv \gamma(x)(y)$. Отметим, что если $\varphi(\mathbf{1}) < +\infty$, т. е. $\varphi \in \mathcal{A}_*^+$, то $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$ — автополярная форма на $\mathcal{A}$, ассоциированная с φ в смысле [14]. Это сразу следует из теоремы 2.1 с учетом того очевидного обстоятельства, что каждый положительный линейный функционал на $\mathcal{A}$, мажорируемый φ, нормален.

Следующий результат переносит предложенный в [14] аналог модулярной теории Томита–Такесаки [2] для нормального состояния — модулярное косинус-семейство (θ_t) — на случай веса. Будем, следуя [14], называть однопараметрическим косинус-семейством на линейном пространстве $\mathcal{L}$ семейство $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ линейных операторов в $\mathcal{L}$, удовлетворяющих функциональному уравнению косинуса:

$$2v_s v_t = v_{s+t} + v_{s-t}, \quad v_0 = I.$$

2.7. Теорема. *Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на JBW-алгебре $\mathcal{A}$. Существует, и притом единственное, косинус-семейство $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ положительных и сохраняющих $\mathbf{1}$ линейных отображений $\mathcal{A}$ в себя такое, что*

(i) *отображение $t \mapsto \theta_t(x)$ слабо непрерывно для всех $x \in \mathcal{A}$;*

(ii) $\varphi(\theta_t\cdot) = \varphi$, $\varphi(\theta_t(x) \circ y) = \varphi(x \circ \theta_t(y))$ $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$;

(iii) $\langle x, y\rangle_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x \circ \theta_t(y))[\mathrm{ch}(\pi t)]^{-1} dt$ $(x, y \in \mathfrak{m}_\varphi)$.

Доказательство несложно провести, следуя схеме, намеченной в [14] для случая $\varphi(\mathbf{1}) < +\infty$; поэтому ограничимся лишь несколькими замечаниями.

Начнем с единственности. Заметим, что из неравенства Кадисона–Шварца для JB-алгебр: $(\theta_t(x))^2 \le \theta_t(x^2)$ $(x \in \mathcal{A})$ (см. [12]) следует, что $\theta_t(\mathfrak{n}_\varphi) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ и $\|\theta_t(x)\|_\# \le \|x\|_\#$. Отсюда видно, что (θ_t) продолжается до косинус-семейства (v_t) в H_φ, причем $\|v_t\| \le 1$ $(t \in \mathbb{R})$. Прямые вычисления с косинус-преобразованием Фурье показывают, что

$$\langle x, y\rangle_\varphi = (\widehat{x}, (\mathrm{ch}\,\tfrac{1}{2}d)^{-1}\widehat{y})_\# \qquad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi),$$

где оператор $d = d^* \ge 0$ в H_φ — генератор (v_t), т. е. $v_t = \cos(td)$ $(t \in \mathbb{R})$. Остается проверить, что $\mathfrak{m}_\varphi$ плотно в H_φ. Если $\mathcal{A}$ есть эрмитова часть алгебры Неймана, то это известный факт теории Томита–Такесаки [2, лемма 3.3]; переходя к весу $\widetilde{\varphi}$ на алгебре Неймана $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ легко показать, что утверждение верно и для любой JW-алгебры. Для $\mathcal{A} = C(X, M_3^8)$ плотность $\widehat{\mathfrak{m}_\varphi}$ в H_φ следует из рассуждений, приводившихся в конце доказательства теоремы 2.1.

Для построения (θ_t) в случае JW-алгебры $\mathcal{A}$, не содержащей прямых слагаемых типа I_2, положим $\theta_t \equiv \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_{-t})|_\mathcal{A}$, где (σ_t) — модулярная группа, ассоциированная с весом $\widetilde{\varphi}$ на алгебре Неймана $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$. Если же $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям леммы 2.4, то пусть

$$\theta_t \equiv U_{\cos(th)}(\cdot) + U_{\sin(th)}(\cdot).$$

К последней ситуации может быть сведен как случай $\mathcal{A} = C(X, M_3^8)$ (см. конец доказательства теоремы 2.1), так и по той же схеме случай JW-алгебры типа I_2 (см. доказательство леммы 1.3). В общем случае воспользуемся, как и при доказательстве теоремы 2.1, возможностью разложения $\mathcal{A}$ в прямую сумму JBW-алгебр, для которых (θ_t) уже построено. Несложные вычисления с σ_t и выражением для γ из леммы 2.4 завершают доказательство.

§ 3. Пространства L_1 и L_2, ассоциированные с весом на JW-алгебре

Пусть $\mathcal{A}$ — JW-алгебра в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, φ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{A}$. Мы построим в этом, наиболее интересном с точки зрения неассоциативного интегрирования случае, содержательные реализации пополнений $\mathfrak{m}_\varphi$ и $\mathfrak{n}_\varphi$ по нормам $\|\cdot\|_\varphi$ и $\|\cdot\|_\# = (\varphi((\cdot)^2))^{1/2}$ соответственно.

Следуя [9], назовем *линеалом веса* φ линейное многообразие

$$\mathcal{D}_\varphi \equiv \{f \in \mathcal{H} \mid \exists\lambda \ge 0 : (xf, f) \le \lambda\varphi(x),\ \forall x \in \mathcal{A}^+\}.$$

Отметим, что если $\mathcal{A}$ не содержит прямых слагаемых типа I_2, то несложно проверить, что $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\widetilde{\varphi}}$ (напомним, что в этом случае $\widetilde{\varphi} = \varphi(\varepsilon\cdot)$ — продолжение веса φ на алгебру Неймана $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$, порожденную $\mathcal{A}$).

3.1. Определение (ср. [9, 5, 6]). Назовем билинейную форму (б.ф.) a на линеале $\mathcal{D}_\varphi$ (соответственно, линейный оператор r в $\mathcal{H}$ с $\mathcal{D}(r) = \mathcal{D}_\varphi$) *интегрируемой* (соответственно, *интегрируемым с квадратом*) относительно φ, если существует последовательность, называемая *определяющей,* $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi$ (соотв., $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$) такая, что

(i) $a(f,g) = \lim\limits_n (x_n f, g)$ $(f, g \in \mathcal{D}_\varphi)$,

(ii) $\lim\limits_{m,n} \|x_n - x_m\|_\varphi = 0$

(соответственно,

(i)′ $rf = \lim\limits_n x_n f$ $(f \in \mathcal{D}_\varphi)$,

(ii)′ $\lim\limits_{m,n} \|x_n - x_m\|_\# = 0$).

Обозначим через $L_1(\varphi)$ (соотв., $L_2(\varphi)$) вещественное линейное пространство всех интегрируемых относительно φ б.ф. (соотв., интегрируемых с квадратом операторов).

Заметим, что все б.ф. из $L_1(\varphi)$ (соотв., операторы из $L_2(\varphi)$) эрмитовы; в [9] и [5] соответствующие объекты (случай $\mathcal{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{A})^э$) обозначены через $L_1(\varphi)^э$ и $L_2(\varphi)^э$.

Условимся для $r, s \in L_2(\varphi)$ через $r \circ s$ обозначать б.ф. на $\mathcal{D}_\varphi$, заданную равенством

$$r \circ s\ (f,g) \equiv \frac{1}{2}[(rf, sg) + (sf, rg)].$$

Будем отождествлять естественным образом $\mathfrak{m}_\varphi$ (соотв., $\mathfrak{n}_\varphi$) с частью $L_1(\varphi)$ (соотв., $L_2(\varphi)$).

3.2. Теорема. (i) *Пусть б.ф. $a \in L_1(\varphi)$ и (x_n) — ее определяющая последовательность. Равенство*

$$\|a\|_\varphi \equiv \lim_n \|x_n\|_\varphi$$

корректно задает норму, превращающую $L_1(\varphi)$ в вещественное банахово пространство, изометрически изоморфное $\mathcal{A}_*$; соответствующий изоморфизм продолжает отображение γ и переводит конус положительных б.ф. $L_1^+(\varphi)$ на $\mathcal{A}_*^+$.

(ii) *Пусть $r, s \in L_2(\varphi)$, (x_n) и (y_n) — их определяющие последовательности. Равенство*

$$(r,s)_\# \equiv \lim_n \varphi(x_n \circ y_n)$$

корректно задает скалярное произведение, превращающее $L_2(\varphi)$ в вещественное гильбертово пространство, изометрически изоморфное H_φ; соответствующий изоморфизм продолжает вложение $\widehat{\ }): \mathfrak{n}_\varphi \to H_\varphi$. При этом б.ф. $r \circ s \in L_1(\varphi)$, $\gamma(r \circ s) = \widehat{r} \circ \widehat{s}$.

Доказательство. (i). Для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$ обозначим через x_f тот (необходимо единственный) оператор из $\mathfrak{m}_\varphi^+$, для которого $\gamma(x_f) = ((\cdot)f, f)$ на $\mathcal{A}$. Заметим, что каждая $\|\cdot\|_\varphi$-фундаментальная последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi$ определяет б.ф. $a \in L_1(\varphi)$ и функционал $\gamma(a) \equiv \lim\limits_n \gamma(x_n) \in \mathcal{A}_*$ так, что

$$a(f,f) = \lim_n \gamma(x_n)(x_f) = \gamma(a)(x_f).$$

Предположим, что при этом $a = 0$, и проверим, что тогда $\lim\limits_n \|x_n\|_\varphi = 0$. Пусть $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. Тогда функционал $\gamma(x) \le \|x\|\,\varphi$ и, следовательно, записывая его в виде $\gamma(x) = \sum_{i=1}^\infty((\cdot)f_i, f_i)$ $((f_i) \subset \mathcal{H})$ на $\mathcal{A}$ (существование такого представления устанавливается вполне аналогично случаю алгебр Неймана), имеем $(f_i) \subset \mathcal{D}_\varphi$. Положим $y_k = \sum_{i=1}^k x_{f_i}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда

$$\gamma(a)(y_k) = \lim_n \gamma(x_n)(y_k) = \lim_n \gamma(y_k)(x_n) = \lim_n \sum_{i=1}^k (x_n f_i, f_i) = \sum_{i=1}^k a(f_i, f_i) = 0.$$

Поскольку γ осуществляет порядковый изоморфизм $\mathfrak{m}_\varphi^+$ на $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^+)$, то $y_k \nearrow x$, так что

$$\gamma(a)(x) = \lim_k \gamma(a)(y_k) = 0.$$

Следовательно, $\gamma(a) = 0$, так как $\mathfrak{m}_\varphi$ плотно в $\mathcal{A}$ в слабой топологии. Таким образом,

$$\lim_n \|x_n\|_\varphi = \|\gamma(a)\| = 0.$$

Таким образом, установлена корректность определения $\|a\|_\varphi$; оставшаяся часть утверждения (i) вытекает из следствия 2.5.

(ii). Каждая $\|\cdot\|_\#$-фундаментальная последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ является определяющей для некоторого оператора $r \in L_2(\varphi)$, поскольку для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$ найдется $\lambda > 0$ так, что

$$\|x_n f - x_m f\|^2 \le \lambda\varphi((x_n - x_m)^2) \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Отсюда и из неравенства (i) леммы 1.9 следует, что (x_n^2) — определяющая последовательность для б.ф. $a = r \circ r$. Если при этом $r = 0$, то и $a = 0$, откуда $\|x_n\|_\#^2 = \|x_n^2\|_\varphi \to 0$. Остается воспользоваться тождеством

$$r \circ s = \frac{1}{2}[(r + s) \circ (r + s) - r \circ r - s \circ s]$$

и п° (ii) следствия 2.5. Теорема доказана.

3.3. Замечание. Зафиксировав некоторое представление веса φ на $\mathcal{A}$ в виде

$$\varphi = \sum_i ((\cdot)f_i, f_i) \qquad ((f_i) \subset \mathcal{D}_\varphi),$$

нетрудно показать, что

$$(r, s)_\# = \sum_i \mathrm{Re}(rf_i, sf_i) \qquad (r, s \in L_2(\varphi)),$$

причем ряд справа содержит не более счетного числа ненулевых слагаемых и сходится абсолютно (ср. [6, § 3, следствие 2]). Отсюда, в частности, следует, что все ограниченные б.ф. из $L_1(\varphi)$ (соотв., ограниченные операторы из $L_2(\varphi)$) определяются операторами из $\mathfrak{m}_\varphi$ (соотв., из $\mathfrak{n}_\varphi$).[1]

3.4. Следствие. *Для б.ф.* $a \in L_1^+(\varphi)$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $a = r \circ r$ *для некоторого* $r \in L_2(\varphi)$*;*

(ii) *б.ф. a замыкаема;*

(iii) *существует последовательность* $(\rho_n) \subset \mathcal{A}_*^+$ *такая, что* $\rho_n \leq \lambda_n \varphi$ $(\lambda_n \geq 0)$ *и* $\gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$.

Доказательство. Импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) очевидна; импликации (ii) $\Longrightarrow$ (iii) и (iii) $\Longrightarrow$ (i) нетрудно проверить по схеме доказательства аналогичных утверждений для алгебр Неймана (см. [6, § 2, теорема 9], [9, § 3, предложение 5]).

3.5. Следствие.

$$L_1(\varphi) = \{r \circ s \mid r, s \in L_2(\varphi)\}.$$

Доказательство. Дословно повторяя рассуждения, проводившикся при доказательстве теоремы 1 [3], можно показать, что каждая б.ф. $a \in L_1(\varphi)$ допускает разложение вида $a = b_1 - b_2$, где b_i — замыкаемые б.ф. из $L_1^+(\varphi)$. Тогда $b_i = r_i \circ r_i$ $(i = 1, 2)$ для некоторых $r_i \in L_2(\varphi)$ по следствию 3.4, откуда $a = (r_1 + r_2) \circ (r_1 - r_2)$.

3.6. Замечание. В [6] и [7] полностью описаны для случая алгебр Неймана те веса φ, названные там регулярными, для которых все б.ф. из $L_1^+(\varphi)$ удовлетворяют условиям следствия 3.4. Часть этих результатов может быть перенесена на JW-алгебры: в частности, конечность алгебры Неймана $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ обеспечивает выполнимость условий следствия 3.4 для всех б.ф. $a \in L_1^+(\varphi)$.

3.7. Замечание. Пусть $\mathcal{A}$ — JBW-алгебра, φ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{A}$, $^{\circ}) \colon H_\varphi \times H_\varphi \to \mathcal{A}_*$ — $\mathcal{A}_*$-значное “скалярное произведение” (см. следствие 2.5). Будем говорить, что вес φ *почти доминирует* функционал $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, если существует последовательность $(\rho_n) \subset \mathcal{A}_*^+$ такая, что $\rho_n \leq \lambda_n \varphi$ $(\lambda_n \geq 0)$ и $\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ (ср. [6]). Рассуждая в духе окончания доказательства теоремы 2.1, несложно проверить, что вес φ на $\mathcal{A} = C(X, M_3^8)$ почти доминирует каждый функционал $\rho \in \mathcal{A}_*^+$. В таком случае из следствий 3.4 и 3.5 ясно, что для общей JBW-алгебры $\mathcal{A}$ элементы $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, почти доминируемые весом φ, суть функционалы вида $\xi \circ \xi$ $(\xi \in H_\varphi)$ и, следовательно,

$$\mathcal{A}_* = \{\xi \circ \eta \mid \xi, \eta \in H_\varphi\}.$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что сильная (соответственно, слабая) топология на $\mathcal{A}$ порождается полунормами вида $x \mapsto \langle x^2, \xi \circ \xi \rangle^{1/2}$ (соотв., $x \mapsto |\langle x, \xi \circ \eta \rangle|$), где $\xi, \eta \in H_\varphi$. Таким образом H_φ берет на себя часть функций пространства стандартного представления алгебры Неймана.

§ 4. Приложение к JB-алгебрам: аналог конструкции ГНС

Пусть $\mathcal{B}$ — JB-алгебра, ρ — фиксированное состояние на $\mathcal{B}$ (т. е. $\rho \in \mathcal{B}^*$, $\rho \geq 0$, $\rho(\mathbf{1}) = 1$). Положим $N_\rho = \{x \in \mathcal{B} \mid \rho(x^2) = 0\}$ и пусть H_ρ — вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением фактор-пространства $\mathcal{B}/N_\rho$ по скалярному произведению $(\widehat{x}, \widehat{y}) = \rho(x \circ y)$, где в этом параграфе значком $\widehat{\ }$) обозначается каноническая сюръекция $\widehat{\ }) \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}/N_\rho$. Обозначим через $(H_\rho)_1$ замыкание $\widehat{\mathcal{B}_1}$ в H_ρ, где

$$\mathcal{B}_1 \equiv \{x \in \mathcal{B} \mid \|x\| \leq 1\}.$$

В следующей теореме предлагается, ввиду отсутствия полноценной ГНС-конструкции для JB-алгебр, ее некоторый аналог: оказывается, что существует лишь единственный естественный способ сопоставления векторам из H_ρ функционалов из $\mathcal{B}^*$.

4.1. Теорема. *Существует, и притом единственное, отображение* $^\circ)\colon H_\rho \times H_\rho \to \mathcal{B}^*$ *такое, что*

1°. $\widehat{\mathbf{1}} \circ \widehat{\mathbf{1}} = \rho$, $\quad \widehat{x^2} \circ \widehat{\mathbf{1}} = \widehat{x} \circ \widehat{x}$ $(x \in \mathcal{B})$,

2°. $\{\xi \circ \xi \mid \xi \in (H_\rho)_1\} = \{\theta \in \mathcal{B}^* \mid 0 \le \theta \le \rho\}$,

3°. $\{x, y\} \mapsto \langle \widehat{x}, \widehat{y} \circ \widehat{\mathbf{1}} \rangle$ — *симметрическая положительная билинейная форма на* $\mathcal{B}$,

4°. $|(\xi, \eta)| \le \|\xi \circ \eta\| \le \|\xi\|\,\|\eta\|$ $(\xi, \eta \in H_\rho)$.

Это отображение является симметрической положительной билинейной формой на H_ρ *со значениями в* $\mathcal{B}^*$ *и согласовано с умножением в* $\mathcal{B}$: $(\widehat{x \circ y}) \circ \widehat{\mathbf{1}} = \widehat{x} \circ \widehat{y}$ $(x, y \in \mathcal{B})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}^{**}$ — обертывающая JBW-алгебра для $\mathcal{B}$ (см. [10, 17]), $c(\rho)$ — центральный носитель ρ как нормального состояния на $\mathcal{B}^{**}$ и JBW–алгебра $\mathcal{A} \equiv U_{c(\rho)}(\mathcal{B}^{**})$. Считая $\mathcal{B}$ подалгеброй $\mathcal{B}^{**}$, определим гомоморфизм $\lambda\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, полагая $\lambda(x) = c(\rho) \circ x$, и пусть функционал $\varphi \in \mathcal{A}_*^+$ таков, что

$$\varphi(U_{c(\rho)}x) = \rho(x) \qquad (x \in \mathcal{B}^{**}).$$

Определим форму $^\circ)\colon \widehat{\mathcal{B}} \times \widehat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}^*$, полагая

$$\langle z, \widehat{x} \circ \widehat{y} \rangle = \langle \lambda(z), \gamma(\lambda(x \circ y)) \rangle \qquad (z \in \mathcal{B}),$$

где отображение $\gamma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}_*$ ассоциировано с φ по теореме 2.1. Тогда в силу $(\gamma 5)$ и п° (i) леммы 1.9

$$\|x \circ y\| \le \|\widehat{x}\|\,\|\widehat{y}\| \qquad (x, y \in \mathcal{B}),$$

так что $^\circ)$ продолжается по непрерывности на $H_\rho \times H_\rho$. При этом нужные свойства $^\circ)$ немедленно следуют из $(\gamma 1)$ – $(\gamma 5)$ с учетом предложений 3.9 и 5.6 [10], из которых вытекает сильная плотность $\lambda(\mathcal{B}_1)$ в единичном шаре $\mathcal{A}_1$ алгебры $\mathcal{A}$. Для проверки единственности $^\circ)$ предположим, что отображение $^*)\colon H_\rho \times H_\rho \to \mathcal{B}^*$ также удовлетворяет требованиям 1° – 4°. Заметим, что существует единственное отображение $x \mapsto \xi(x)$ из $\mathcal{A}$ в H_ρ такое, что $\xi(\lambda(y)) = \widehat{y}$ для всех $y \in \mathcal{B}$ и $\|\xi(x)\| = \varphi(x^2)^{1/2}$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Тогда равенство

$$\langle \lambda(z), \gamma'(x) \rangle = \langle z, \xi(x) * \widehat{\mathbf{1}} \rangle \qquad (z \in \mathcal{B})$$

определяет для каждого $x \in \mathcal{A}$ единственный функционал $\gamma'(x) \in \mathcal{A}_*$. При этом для отображения $\gamma'\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}_*$ очевидно выполнены условия $(\gamma 1)$ и $(\gamma 3)$ теоремы 2.1 и неравенство

$$0 \le \gamma'(x) \le \|x\|\,\varphi \qquad (x \in \mathcal{A}^+).$$

Для проверки справедливости ($\gamma 2$) для $\gamma\,'$ достаточно показать, что для каждого $\theta' \in \mathcal{A}_*$, $0 \leq \theta' \leq \varphi$, найдется $x \in \mathcal{A}^+$ такой, что $\theta' = \gamma\,'(x)$. Для этого определим $\theta \in \mathcal{B}^*$, полагая $\theta(z) \equiv \theta'(\lambda(z))$ $(z \in \mathcal{B})$. Тогда $0 \leq \theta \leq \rho$, так что $\theta = \xi * \xi$ для некоторого $\xi \in (H_\rho)_1$. В силу слабой компактности единичного шара $(\mathcal{B}^{**})_1$ найдется сеть $(y_\alpha) \subset \mathcal{B}$ такая, что $\widehat{y_\alpha} \to \xi$ в H_ρ и $y_\alpha^2 \to z$ в слабой топологии $\mathcal{B}^{**}$ для некоторого $z \in \mathcal{B}^{**}$. Полагая $x \equiv c(\rho) \circ z$, нетрудно проверить, что x и есть искомый элемент из $\mathcal{A}^+$. Таким образом, по теореме 2.1 $\gamma\,' = \gamma$, так что *) совпадает с $^\circ$) на $\widehat{\mathcal{B}} \times \widehat{\mathcal{B}}$, а отсюда с учетом 4° и всюду на $H_\rho \times H_\rho$. Теорема доказана.

Следующий результат служит аналогом хорошо известного свойства ГНС-конструкции для C*-алгебр: в ГНС-представлении, ассоциированном с фиксированным состоянием, каждый автоморфизм C*-алгебры, не меняющий этого состояния, реализуется с помощью унитарного оператора.

4.2. Следствие. *Пусть α — такой автоморфизм JB-алгебры $\mathcal{B}$, что $\rho(\alpha\cdot) = \rho$. Тогда существует такой унитарный оператор u в H_ρ, что*

$$\langle \alpha(z), \xi \circ \eta \rangle = \langle z, u\xi \circ u\eta \rangle \qquad (z \in \mathcal{B},\ \xi, \eta \in H_\rho).$$

Доказательство. В силу α-инвариантности ρ существует единственный унитарный оператор u в H_ρ такой, что $u\widehat{x} = \widehat{\alpha^{-1}(x)}$ для всех $x \in \mathcal{B}$. Определим с помощью равенства

$$\langle z, \xi * \eta \rangle \equiv \langle \alpha^{-1}(z), u\xi \circ u\eta \rangle \qquad (z \in \mathcal{B},\ \xi, \eta \in H_\rho)$$

отображение *)$\colon H_\rho \times H_\rho \to \mathcal{B}^*$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости для *) условий 1° – 4° теоремы 4.1. В таком случае $\xi \circ \eta \equiv \xi * \eta$, откуда и следует нужный результат.

Автор приносит благодарность А. Н. Шерстневу и О. Е. Тихонову за полезные обсуждения.

Литература

1. Аюпов Ш.А., *Интегрирование на йордановых алгебрах*, Изв. АН СССР (сер. матем.) **47** (1983), 1, 3–25.
2. Такесаки М., *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения*, Математика (сб. переводов) **18** (1974), 3, 84–120; 4, 34–63.
3. Тихонов О.Е., *Интегрируемые билинейные формы и интеграл по операторнозначной мере*, Изв. вузов. Математика (1982), 3, 76–80.
4. Трунов Н.В., *Локально конечные веса на алгебрах Неймана*, Казань, Казанск. ун-т, 1978, 24 с., рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101-79 Деп..
5. Трунов Н.В., *О некоммутативном аналоге пространства L_2*, Конструктивная теория функций и функц. анализ, вып. 1, изд. Казанск. ун-та, Казань, 1979, с. 93–114.
6. Трунов Н.В., *Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса*, Конструктивная теория функций и функц. анализ, вып. 3, изд. Казанск. ун-та, Казань, 1981, с. 73–87.
7. Трунов Н.В., *К теории нормальных весов на алгебрах Неймана*, Изв. вузов. Математика (1982), 8, 61–70.
8. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I*, Изв. вузов. Математика (1978), 7, 79–88; *II,* (1978), 12, 88–98.

9. Шерстнев А.Н., *К общей теории меры и интеграла в алгебрах Неймана*, Изв. вузов. Математика (1982), 8, 20–35.
10. Alfsen E., Shultz F., Størmer E., *A Gelfand–Neumark theorem for Jordan algebras*, Adv. Math. **28** (1978), 11–56.
11. Edwards C.M., *Ideal theory in JB-algebras*, J. London Math. Soc. **16** (1977), 507–513.
12. Effros E.G., Størmer E., *Positive projections and Jordan structure in operator algebras*, Math. Scand. **45** (1979), 127–138.
13. Haagerup U., *Normal weights on W^*-algebras*, J. Funct. Anal. **19** (1975), 302–317.
14. Hanche-Olsen H., *A Tomita–Takesaki theory for JBW-algebras*, in "Oper. Alg. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., p. 2", Providence R.I., 1982, pp. 301–303.
15. Jacobson N., *Structure and representation of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **39** (1969).
16. Pedersen G.K., Størmer E., *Traces on Jordan algebras*, Can. J. Math. **34** (1982), 370–373.
17. Shultz F., *On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces*, J. Funct. Anal. **31** (1979), 360–373.
18. Stacey P.J., *Type I_2 JBW-algebras*, Quart. J. Math. **33** (1982), 115–127.
19. Størmer E., *Jordan algebras of type I*, Acta Math. **115** (1966), 165–184.
20. Topping D.M., *An isomorphism invariant for spin factors*, J. Math. Mech. **15** (1966), 1055–1063.
21. Wright J.D.M., *Jordan C^*-algebras*, Michigan Math. J. **24** (1977), 291–301.
22. Wright J.D.M., Youngson M.A., *On isometries of Jordan algebras*, J. London Math. Soc. **17** (1978), 339–344.

Примечание

[1] Последнее утверждение в замечании 3.3 не всегда верно. А именно, на JW-алгебре $B(\mathcal{H})^{э}$ всех эрмитовых операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве можно построить точный нормальный полуконечный вес φ такой, что **не все** ограниченные б.ф. из $L_1(\varphi)$ определяются операторами из $\mathfrak{m}_\varphi$.

XI. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕКОММУТАТИВНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(В соавторстве с А. Н. Шерстневым)
В кн.: Совр. проблемы математики.
Новейшие достижения
(Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)
М., том 27, 1985, 167–190

ВВЕДЕНИЕ

В связи с прогрессом в теории алгебр Неймана, имевшим место в конце 60-х — начале 70-х годов, и стимулированным плодотворной теорией Томиты-Такесаки [72], а также теорией нормальных весов [43, 44], актуальной стала проблема распространения некоммутативной теории интегрирования Сигала [70] на нормальные веса, являющиеся нецентральными аналогами интеграла по неограниченной мере, заданного на классе ограниченных функций.

Впервые принципиальное решение этой проблемы было получено в работах [37, 38] и систематически изложено в [34, 35]. Оно существенно опиралось на решенную Хаагерупом [52] проблему характеризации нормальных весов на алгебре Неймана. В дальнейшем был получен ещё целый ряд схем построения интегрирования относительно нормальных весов. В последние годы в связи с усилившимся интересом к йордановым структурам естественно возникли идеи построения неассоциативного интегрирования. В данной статье дается обзор современного состояния указанных выше проблем.

§1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА

1.1. Введём сначала ряд наиболее употребительных обозначений и понятий. Через $\mathcal{B}(H)$, или просто $\mathcal{B}$, обозначается алгебра всех ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H. Если $A \subset \mathcal{B}$, то через A^{+}, A^{sa}, A^{pr} обозначаются соответственно множества неотрицательных, эрмитовых, эрмитовых идемпотентных элементов из A.

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана, действующая в H, $\mathcal{M}_*$ — банахово пространство всех ультраслабо непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{M}$ (преддвойственное пространство алгебры $\mathcal{M}$), $\mathcal{M}_*^+$ — конус всех положительных функционалов из $\mathcal{M}_*$. Весом на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ называется отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ со свойствами:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \quad (x, y \in \mathcal{M}^+,\ \lambda \geq 0)$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$). Вес φ называется *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$ $(x \in \mathcal{M})$. Множество $\mathfrak{n}_\varphi \equiv \{x \in \mathcal{M} \colon \varphi(x^*x) < +\infty\}$ — левый идеал в $\mathcal{M}$. Пусть $\mathfrak{m}_\varphi$ — $*$-алгебра, порождённая элементами вида y^*x $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$. Ограничение $\varphi|\mathfrak{m}_\varphi^+$ продолжается по линейности до положительного функционала на $\mathfrak{m}_\varphi$; этот функционал по-прежнему обозначается через φ. Вес φ на алгебре Неймана называется

— *точным*, если $\varphi(x) = 0$ $(x \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow x = 0$;
— *полуконечным*, если $\mathfrak{m}_\varphi$ ультраслабо плотно в $\mathcal{M}$;
— *нормальным*, если для каждой возрастающей сети $x_i \nearrow x$ $(x_i, x \in \mathcal{M}^+)$: $\varphi(x) = \sup\limits_i \varphi(x_i)$.

Пусть φ — точный нормальный полуконечный (т.н.п.) вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathfrak{n}_\varphi$ по скалярному произведению $\langle x, y\rangle \equiv \varphi(y^*x)$ $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$. Тогда отображение $\pi_\varphi \colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, определённое равенством $\pi_\varphi(x)y = xy$ $(x \in \mathcal{M}, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$, задаёт $*$-представление алгебры $\mathcal{M}$ в алгебру $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, точнее — изоморфизм алгебры Неймана $\mathcal{M}$ на алгебру Неймана $\pi_\varphi(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Алгебра $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*$ (где $\mathfrak{n}_\varphi^* \equiv \{x^* \colon x \in \mathfrak{n}_\varphi\}$) является плотной частью гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ и обладает структурой левой гильбертовой алгебры с инволюцией $x \to x^*$ $(x \in \mathfrak{A})$ [72]. Обозначим через S замыкание (в $\mathfrak{H}$) антилинейного оператора $x \to x^*$, и пусть $S = J\Delta^{1/2}$ — его полярное разложение. Здесь J — антилинейная изометрия со свойством $J^2 = 1$, а $\Delta \geq 0$ — несингулярный самосопряжённый оператор, называемый модулярным оператором, ассоциированным с φ. В этих обозначениях имеет место следующий результат (теорема Томита-Такесаки):

Отображение

$$x \to Jx^*J \quad (x \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}))$$

определяет антиизоморфизм алгебры $\pi_\varphi(\mathcal{M})$ на её коммутант $\pi_\varphi(\mathcal{M})'$. Однопараметрическая группа $\{\Delta^{\mathrm{i}\,t}(\cdot)\Delta^{-\mathrm{i}\,t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ унитарных преобразований алгебры $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ оставляет $\pi_\varphi(\mathcal{M})$ на месте: $\Delta^{\mathrm{i}\,t}\pi_\varphi(\mathcal{M})\Delta^{-\mathrm{i}\,t} = \pi_\varphi(\mathcal{M})$, и потому определяет группу $\Sigma = \{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ автоморфизмов $\sigma_t(x) = \pi_\varphi^{-1}\{\Delta^{\mathrm{i}\,t}\pi_\varphi(x)\Delta^{-\mathrm{i}\,t}\}$ $(x \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R})$ алгебры $\mathcal{M}$, называемою группой модулярных автоморфизмов, ассоциированной с φ. При этом $\sigma_t(x) = \Delta^{\mathrm{i}\,t}x$ $(x \in \mathfrak{n}_\varphi)^1$. В частности, многообразия $\mathfrak{n}_\varphi$, $\mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*$, $\mathfrak{m}_\varphi$ Σ-инвариантны и $\varphi(\sigma_t(x)) = \varphi(x)$ $(x \in \mathcal{M}^+)$.

1.2. К настоящему времени имеется целый ряд подходов к некоммутативному интегрированию относительно т.н.п. веса в алгебрах Неймана и ниже мы приведём их характерные особенности. Все они возникли как обобщения в определённых отношениях сигаловской теории интегрирования по следу [70], которую естественно поэтому взять в качестве отправной точки нашего изложения.

Пусть τ — т.н.п. след на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H. Функция $x \to \tau(|x|)$ $(x \in \mathfrak{m}_\tau)$ является нормой на комплексном векторном пространстве $\mathfrak{m}_\tau$ (здесь $|x| = (x^*x)^{1/2}$). Обозначим через $L_1(\tau)$ пополнение $\mathfrak{m}_\tau$ по этой норме. Сигал получил содержательную реализацию этого пространства замкнутыми (вообще, неограниченными) операторами, действующими в H. Более точно, $L_1(\tau)$ состоит из замкнутых плотно заданных операторов h, присоединённых к $\mathcal{M}$ и таких, что $\tau(|h|) < +\infty$. (Здесь и всюду ниже выражение $\tau(kx)$ для $x \in \mathcal{M}^+$ и самосопряжённого оператора $k \geq 0$, присоединённого к $\mathcal{M}$, понимается в следующем регуляризованном смысле (см. [67])

$$\tau(kx) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0+} \tau({k_\varepsilon}^{1/2} x {k_\varepsilon}^{1/2}),$$

где $k_\varepsilon = k(1+\varepsilon k)^{-1}$, $\varepsilon > 0$.)

1.3. Диксмье [46] (см. также [47]) и Сигал [70] охарактеризовали $L_1(\tau)$ как банахово пространство, зависящее алгебры Неймана $\mathcal{M}$. Соответствующий изоморфизм определён формулой $h \in L_1(\tau)^+ \to \tau(h\cdot) \in \mathcal{M}_*$. В подобной реализации пространства $L_1(\tau)$ функционалами конечный объект (банахов эквивалент пространства $L_1(\tau)$) — пространство $\mathcal{M}_*$ — не зависит не только от следа τ (обстоятельство хорошо известное из классической (коммутативной) ситуации), но и от гильбертова пространства H, где действует $\mathcal{M}$. Это замечательное обстоятельство можно рассматривать в последующем как своего рода критерий корректности содержательных конструкций пространства L_1 относительно веса.

1.4. При обобщении на веса наиболее близким к сигаловской реализации пространства L_1, является подход, при котором интегрируемые элементы получаются как некоторые предельные объекты из операторов алгебры Неймана [37, 38, 34, 35].

Пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H. Функция $x \to \varphi(|x|)$ уже не является, как это имело место для следа (см. п. 1.2), нормой на $\mathfrak{m}_\varphi$. В качестве аналога L_1-нормы рассмотрим на вещественном векторном пространстве $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ выпуклую функцию

$$\|x\|_\varphi = \inf\{\varphi(x_1 + x_2) \colon x = x_1 - x_2 \ (x_1, x_2 \in \mathfrak{m}_\varphi^+\}. \tag{1}$$

В частности, $\|x\|_\varphi = \varphi(x)$ для $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. С помощью техники левых гильбертовых алгебр устанавливается, что $\|\cdot\|_\varphi$ — норма на $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ [38]. Отметим, что если φ — след, то $\|x\|_\varphi = \varphi(|x|)$.

Формальное пополнение $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ по введённой норме приводит к вещественному банахову пространству $L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$, элеметами которого являются пока неконструктивные объекты, — фундаментальные последовательности. Содержательная их реализация основана на понятии линеала веса, впервые введённом в [37],[38][2]. *Линеалом нормального полуконечного веса* φ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H, называется линеал

$$D_\varphi \equiv \{f \in H \colon \exists \lambda > 0 \ \forall x \in \mathcal{M}^+ \ (\langle xf, f \rangle \leq \lambda \varphi(x))\}.$$

Линеал D_φ инвариантен относительно коммутанта $\mathcal{M}'$ и, если, кроме того, φ точен, D_φ плотен в H. Если теперь (x_n) — $\|\cdot\|_\varphi$-фундаментальная последовательность операторов из $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$, то, как нетрудно видеть, для любых векторов

$f, g \in D_\varphi$ числовая последовательность $\langle x_n f, g\rangle$ сходится. Таким образом, на линеале D_φ определена эрмитова билинейная форма (б.ф.)

$$a_{\{x_n\}}(f,g) \equiv \lim_n \langle x_n f, g\rangle \quad (f, g \in D_\varphi).$$

Тем самым мотивировано следующее определение: пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H. Эрмитову б.ф. a, заданную на линеале веса D_φ, назовём *интегрируемой* (относительно φ), если существует последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$, называемая *определяющей*, такая, что

(а) $a(f,g) = \lim_n \langle x_n f, g\rangle$ $(f, g \in D_\varphi)$,

(б) $\|x_n - x_m\|_\varphi \to 0$ $(n, m \to \infty)$.

Следующая принципиальная теорема решает задачу содержательного описания пространства $L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$.

Теорема 1 [38]. *Пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H, и (x_n) — определяющая последовательность для нулевой б.ф. Тогда* $\lim_n \|x_n\|_\varphi = 0$.

Из этой теоремы немедленно следует, что формула $\|a\|_\varphi \equiv \lim_n \|x_n\|_\varphi$, где a — интегрируемая б.ф. а (x_n) — какая-нибудь её определяющая последовательность, — задаёт однозначное продолжение нормы $\|\cdot\|_\varphi$ с $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ на вещественное векторное пространство всех интегрируемых эрмитовых б.ф., причём последнее полно относительно указанной нормы. Итак, пространство $L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$ можно отождествить с пространством всех интегрируемых эрмитовых б.ф. При этом для интегрируемой эрмитовой б.ф. $a = a_{\{x_n\}}$ корректно определена величина $\varphi(a) \equiv \lim_n \varphi(x_n)$, которую естественно назвать *интегралом* формы a относительно веса φ. Отметим, что существование величины $\varphi(a)$ и её независимость от выбора определяющей последовательности (x_n) также является следствием теоремы 1.

1.5. Определение интегрируемой б.ф. может быть распространено с эрмитова случая на общий. Скажем, что б.ф. a, заданная на D_φ, *интегрируема* относительно т.н.п. веса φ, если её эрмитова и косоэрмитова компоненты a_1, a_2 принадлежат $L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$. При этом класс $L_1(\varphi)$ всех интегрируемых б.ф. является комплексным векторным пространством, а величина $\varphi(a) \equiv \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$ $(a \in L_1(\varphi))$ называется *интегралом* б.ф. a относительно φ. Зададим теперь норму в $L_1(\varphi)$ так, чтобы на $L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$ эта норма совпадала с уже введённой. Следующий результат показывает, что естественное требование изометрического изоморфизма $L_1(\varphi)$ и $\mathcal{M}_*$ определяет эту норму по существу единственным способом.

Теорема 2 [25]. *Пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Существует, притом единственное, отображение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$,

(ii) $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^+) = \{\omega \in \mathcal{M}_*^+ : \exists\lambda > 0\ (\omega \leq \lambda\varphi)\}$,
(iii) *отображение* $\{x, y\} \to \gamma(x)(y^*)$ — *невырожденная положительная б.ф. на* $\mathfrak{m}_\varphi$.

При этом оказывается, что $\|x\|_\varphi = \|\gamma(x)\|$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}})$ [52, 25], причём линеал $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi)$ плотен в $\mathcal{M}_*$. Определим теперь норму в $L_1(\varphi)$ равенством $\|a\|_\varphi \equiv \lim \|\gamma(x_n + \mathrm{i}\, y_n)\|$, где (x_n), (y_n) — определяющие последовательности для соответственно эрмитовой и косоэрмитовой компонент билинейной формы a. Тогда отображение $\gamma : \mathfrak{m}_\varphi \to \mathcal{M}_*$ продолжается по непрерывности до изометрического изморфизма (в дальнейшем обозначаемого той же буквой γ) банаховых пространств $L_1(\varphi)$ и $\mathcal{M}_*$, переводящего конус $L_1(\varphi)^+$ интегрируемых положительных б.ф. на конус $\mathcal{M}_*^+$, и такого, что $\varphi(a) = \gamma(a)(1)$ $(a \in L_1(\varphi))$ [34]. Этот результат Петц [68] оформил с помощью понятия бивеса.

1.6. Как уже отмечалось, пространство $L_1(\tau)$, ассоциированное с т.н.п. следом τ, содержательно описывается операторами. Интересно выяснить, когда к операторам сводятся б.ф., интегрируемые относительно веса.

Пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ и $h \geq 0$ — самосопряжённый оператор. Если $D_\varphi \subset D(h^{1/2})$, то корректно определена б.ф. $e \circ h(f, g) \equiv \langle h^{1/2} f, h^{1/2} g\rangle$ $(f, g \in D_\varphi)$. Будем говорить, что положительная б.ф. a сводится к оператору, если существует самосопряжённый оператор $h \geq 0$, присоединённый к $\mathcal{M}$, такой что $a = e \circ h$. Как показал О. Е. Тихонов, интегрируемые б.ф. линейно порождены б.ф., сводящимися к операторам:

Теорема 3 [23]. *Пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Тогда для каждой б.ф. $a \in L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$ существуют положительные интегрируемые б.ф. a_1, a_2, сводящиеся к операторам, причём $a = a_1 - a_2$.*

Отметим, в частности, что положительная интегрируемая б.ф. также является, вообще говоря, разностью двух положительных интегрируемых б.ф., сводящихся к операторам. Сводимость к операторам всех интегрируемых положительных б.ф. требует дополнительных ограничений на вес. Отметим относящиеся к этому вопросу результаты.

Следуя [29, 48], скажем, что вес φ почти доминирует функционал $\omega \in \mathcal{M}_*^+$, если для любой последовательности $(x_n) \subset \mathcal{M}$ из условий $\varphi(x_n^* x_n) \to 0$, $\omega((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) \to 0$ $(n, m \to \infty)$ следует, что $\omega(x_n^* x_n) \to 0$.

Теорема 4 [29]. *Пусть б.ф. $a \in L_1(\varphi)^+$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *б.ф. a сводится к опрератору,*
(ii) *вес φ почти доминирует функционал $\gamma(a)$, где $\gamma : L_1(\varphi) \to \mathcal{M}_*$ — канонический изоморфизм,*
(iii) *существует возрастающая последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi^+$, являющаяся определяющей для б.ф. a,*
(iv) *существует последовательность $(f_n) \subset D_\varphi$ такая, что* $\gamma(a) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle (\cdot) f_n, f_n\rangle$.

Полное описание тех т.н.п. весов φ, для которых все б.ф. из $L_1(\varphi)^+$ сводятся к операторам, получено в работе [30]. Назовём, следуя [29, 30], вес φ на $\mathcal{M}$

регулярным, если

$$\forall \omega \in \mathcal{M}_*^+ \ (\omega \neq 0) \ \exists \omega' \in \mathcal{M}_*^+ \ (\omega' \neq 0, \ \omega' \leq \omega, \ \omega' \leq \varphi).$$

Отметим, что требование регулярности т.н.п. веса эквивалентно выполнимости утверждений (i) — (iv) теоремы 4 для всех б.ф. из $L_1(\varphi)^+$.

Теорема 5 [30]. *Пусть φ — нормальный регулярный (следовательно, точный) полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Тогда*

(i) *алгебра $\mathcal{M}$ полуконечна,*
(ii) *если $\varphi(1) < +\infty$, то $\mathcal{M}$ конечна.*

При этом оказывается, что регулярность всех т.н.п. весов на $\mathcal{M}$ эквивалентна конечности алгебры $\mathcal{M}$. Приведём описание нормальных регулярных полуконечных весов на полуконечной алгебре Неймана. Если φ — нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$, то существует самосопряжённый оператор $h \geq 0$, присоединённый к $\mathcal{M}$ (оператор плотности), такой, что $\varphi = \tau(h\cdot)$ ([67], теорема 5.12). Вес φ назовём *локально измеримым*, если оператор плотности h локально измерим в смысле [69] (см. также [76]).

Теорема 6 [30]. *Пусть τ — т.н.п. след на $\mathcal{M}$ и $\varphi = \tau(h\cdot)$ — нормальный полуконечный вес. Вес φ регулярен тогда и только тогда, когда h несингулярен и h^{-1} локально измерим.*

1.7. Следующим важным этапом построения теории некоммутативного интегрирования является построение шкалы пространств L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ и, в частности, пространства L_2. Для случая следа такая теория построена в работах Огасавара и Иошинага [66] и др. [46, 62, 65, 76] и использована Гроссом для решения задач существования и единственности для основных физических состояний [50].

Содержательное описание гильбертова пространства $L_2(\varphi)$ — пополнения $\mathfrak{n}_\varphi$ по скалярному произведению $\langle x, y\rangle = \varphi(y^*x)$, идейно близкое конструкции пространства $L_1(\varphi)$, — предложено в работах [27, 29]. Для т.н.п. веса φ на $\mathcal{M}$ элементами $L_2(\varphi)$ являются линейные операторы с общей областью определения D_φ, являющиеся поточечными пределами фундаментальных по норме $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ последовательностей операторов из $\mathfrak{n}_\varphi$. При этом оказывается [29], что общий вид б.ф. $a \in L_1(\varphi)$ определяется формулой

$$a(f,g) = \langle sf, tg\rangle \quad (f, g \in D_\varphi, \ s, t \in L_2(\varphi)).$$

Отметим, что замыкаемость всех операторов из $L_2(\varphi)$ эквивалентна требованию регулярности веса φ (ср. п. 1.6).

К сожалению, мы не располагаем пока способом построения всей шкалы L_p при самых общих предположениях (относительно алгебры Неймана и веса) в рамках изложенной выше конструкции. Однако используя иные подходы к построению некоммутативного интегрирования, можно получить шкалу L_p и в общих предположениях (см. ниже п. 1.8). Приведём ряд конструкций шкал L_p в духе изложенной выше идеологии при некоторых ограничениях на алгебру и на вес.

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра Неймана, τ — т.н.п. след на $\mathcal{M}$ и $\varphi = \tau(h\cdot)$ — т.н.п. локально измеримый вес на $\mathcal{M}$ (см. п. 1.6). Пусть $L_p(\tau)$ — банахово пространство измеримых операторов, интегрируемых с p-той степенью относительно τ, с нормой

$$\|s\|_p^\tau \equiv [\tau(|s|^p)]^{1/p}, \quad s \in L_p(\tau),\ 1 \le p < +\infty.$$

При $p = +\infty$, как обычно, $L_\infty(\tau) = \mathcal{M}$, $\|x\|_\infty = \|x\|$ $(x \in \mathcal{M})$. Для каждого $p \ge 1$ и $\alpha \in [0,1]$ положим

$$\mathfrak{m}_\alpha^{1/p} = \{x \in \mathcal{M} \colon h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p} \in L_p(\tau)\},$$
$$\|x\|_{p,\alpha} \equiv \|h^{\alpha/p} \cdot x \cdot h^{(1-\alpha)/p}\|_p^\tau \quad (x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p})$$

(здесь произведение операторов понимается в сильном смысле). Эти определения корректны (не зависят от выбора следа τ). Пространством $L_{p,\alpha}(\varphi)$ назовём банахово пространство, являющееся пополнением линеала $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ по норме $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.

Теорема 7 [28]. *Пусть $p \ge 1$ и т.н.п. вес φ локально измерим. Для каждого $\alpha \in [0,1]$ банахово пространство $L_{p,\alpha}(\varphi)$ изометрически изоморфно пространству $L_p(\tau)$.*

При дополнительном предположении регулярности веса φ (т. е. локальной измеримости оператора h^{-1}) эти пространства допускают реализацию локально измеримыми операторами. Именно, пусть $\mathcal{L}$ есть $*$-алгебра всех локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов. Тогда линеал

$$\{s \in \mathcal{L} \colon h^{\alpha/p} \cdot s \cdot h^{(1-\alpha)/p} \in L_p(\tau)\}$$

в $\mathcal{L}$, снабжённый нормой $\|s\|_{p,\alpha} \equiv [\tau(|h^{\alpha/p} \cdot s \cdot h^{(1-\alpha)/p}|^p)]^{1/p}$, является банаховым пространством, изоморфным пространству $L_{p,\alpha}(\varphi)$. При этом в случае конечной алгебры Неймана $\mathcal{M}$ и конечного веса φ пространство $L_{2,0}(\varphi)$ совпадает с гильбертовым пространством $L_2(\mathcal{M},\varphi)$, построенным в работе Дая [48]. Отметим, что формула, задающая норму $\|\cdot\|_{p,\alpha}$, введённая в [26] $(\alpha = 1/2)$ и [28], нашла приложения в конструкции интеграла по полуаддитивной мере на проекторах алгебры Неймана [42] и (см. ниже п. 2.3) на полуконечных JBW-алгебрах [1, 4].

В случае, когда φ — точное нормальное состояние, получена реализация пространства $L_{p,1/2}(\varphi)$ интегрируемыми б.ф. [26]. При этом для $p = 1$ получается в точности пространство $L_1(\varphi)$, описанное в пп. 1.4–1.5, а при $p > 1$ пространства $L_{p,1/2}(\varphi)$ оказываются линейными подпространствами пространства $L_1(\varphi)$. Интересно отметить, что хотя каждое нормальное состояние φ является локально измеримым, уже в случае алгебры $\mathcal{B}(H)$ $(\dim H = \infty)$ обратный к его оператору плотности заведомо не локально измерим, так что указанная выше реализация $L_{p,1/2}(\varphi)$ локально измеримыми операторами невозможна.

В работе [31] для т.н.п. веса φ построены две однопараметрические шкалы попарно изоморфных пространств $L_{1,\alpha}(\varphi)$ и $L_{2,\alpha}(\varphi)$ $(0 \le \alpha \le 1)$. При этом описанные выше пространства $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$ соответствуют $L_{1,1/2}(\varphi)$ и $L_{2,0}(\varphi)$, а в полуконечном случае эта конструкция включается в шкалу $L_{p,\alpha}(\varphi)$. Наличие дополнительного параметра α, обусловливающего “расщепление” пространств L_p, является следствием нецентральности веса φ и тесно связано с граничным условием Кубо-Мартина-Швингера [72, 31].

1.8. В этом пункте мы изложим конструкцию Хаагерупа шкалы пространств $L_p(\varphi)$ $(1 \le p \le \infty)$ относительно т.н.п. веса φ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ [53]. Эти пространства реализуются операторами. Достигается это некоторым расширением исходной алгебры $\mathcal{M}$, причём, вообще, изменяется и само гильбертово пространство, где первоначально действует $\mathcal{M}$. При построении шкалы используется понятие операторнозначного веса введенное Хаагерупом [54, 55].

Расширенной положительной частью алгебры Неймана $\mathcal{M}$ (обозначается $\widehat{\mathcal{M}}^+$) называется множество всех полунепрерывных снизу аддитивных и положительно-однородных отображений $m\colon \mathcal{M}_*^+ \to [0, +\infty]$. Конус $\mathcal{M}^+$ можно рассматривать как часть $\widehat{\mathcal{M}}^+$, если отождествить $x \in \mathcal{M}^+$ с m_x, где $m_x(\eta) = \eta(x)$ $(\eta \in \mathcal{M}_*^+)$. Для $a \in \mathcal{M}$, $m \in \widehat{\mathcal{M}}^+$ определим $a^*ma \in \widehat{\mathcal{M}}^+$, полагая

$$a^*ma(\eta) \equiv m(a\eta a^*), \quad \eta \in \mathcal{M}_*^+,$$

где $a\eta a^*(\cdot) \equiv \eta(a^*(\cdot)a)$. Каждый нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$ обладает единственным продолжением (также обозначаемым ψ) на $\widehat{\mathcal{M}}^+$ таким, что

$$\psi(\lambda m) = \lambda\psi(m),\ \psi(m+n) = \psi(m) + \psi(n) \quad (\lambda \ge 0,\ m, n \in \widehat{\mathcal{M}}^+),$$
$$m_i \nearrow m \Rightarrow \psi(m_i) \nearrow \psi(m),$$

где $m_i \nearrow m$ означает, что $\omega(m_i) \nearrow \omega(m)$ для любого $\omega \in \mathcal{M}_*^+$.

Пусть теперь $\mathcal{N}$ — подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$. *Операторнозначным весом* из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ называется аддитивное и положительно-однородное отображение $T\colon \mathcal{M}^+ \to \widehat{\mathcal{N}}^+$ такое, что $T(a^*xa) = a^*T(x)a$ $(x \in \mathcal{M}^+, a \in \mathcal{N})$. Операторнозначный вес T называется

— *нормальным*, если $x_i \nearrow x$ $(x_i, x \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow T(x_i) \nearrow T(x)$,
— *точным*, если $T(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
— *полуконечным*, если $\mathfrak{n}_T \equiv \{x \in \mathcal{M} \colon \|T(x^*x)\| < \infty\}$ ультраслабо плотно в $\mathcal{M}$.

Пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, Σ — группа модулярных автоморфизмов. С этой группой связана однопараметрическая группа $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ унитарных операторов такая, что $\sigma_t^\varphi(x) = U(t)xU(t)^*$ $(x \in \mathcal{M})$. Пусть $R(\mathcal{M}, \Sigma)$ — скрещенное произведение алгебры $\mathcal{M}$ на Σ [74]. $R(\mathcal{M}, \Sigma)$ — заведомо полуконечная алгебра Неймана и алгебру $\mathcal{M}$ можно рассматривать как её подалгебру (более точно, $\mathcal{M}$ изоморфна подалгебре $R(\mathcal{M}, \Sigma)$). В этих соглашениях определена однопараметричесская группа $(\theta)_{s\in\mathbb{R}}$ на $R(\mathcal{M}, \Sigma)$ (дуальное действие), характеризуемая равенствами (при всех $s \in \mathbb{R}$):

$$\theta_s(x) = x \quad (x \in \mathcal{M}), \qquad \theta_s(U(t)) = e^{-\mathrm{i}\, st}U(t)\ (t \in \mathbb{R}).$$

В частности, $\mathcal{M}$ — наибольшая подалгебра Неймана алгебры $R(\mathcal{M}, \Sigma)$, неподвижная относительно действия θ. Равенство

$$Tx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_s(x)\, ds, \quad x \in R(\mathcal{M}, \Sigma)^+,$$

определяет тогда т.н.п. операторнозначный вес из $R(\mathcal{M},\Sigma)$ в $\mathcal{M}$. При этом на $R(\mathcal{M},\Sigma)$ существует и определён однозначно т.н.п. след τ такой, что $\varphi\circ T = \tau(h\cdot)$, где $h\geq 0$ — самосопряжённый оператор, присоединённый к $R(\mathcal{M},\Sigma)$, такой, что $h^{\mathrm{i}\,t} = U(t)$. Этот след τ удовлетворяет равенству $\tau\circ\theta_s = e^{-s}\tau$ ($s\in\mathbb{R}$). Группу $(\theta)_{s\in\mathbb{R}}$ можно естественно продолжить до группы автоморфизмов на $\widehat{R(\mathcal{M},\Sigma)}^{+}$.

Для каждого нормального полуконечного веса ψ положим $\widetilde{\psi} = \psi\circ T$, и пусть h_ψ — производная Радона-Никодима $\widetilde{\psi}$ относительно следа τ, т. е. $\widetilde{\psi} = \tau(h_\psi\cdot)$; $h_\psi\geq 0$ — самосопряжённый оператор, присоединённый к $R(\mathcal{M},\Sigma)$, причём $\theta_s(h) = e^{-s}h$ ($s\in\mathbb{R}$). В частности, h_ψ τ-измерим [65] тогда и только тогда, когда ψ ограничен.

Пространства $L_p(\varphi)$ определяются теперь следующим образом. Пространство $L_p(\varphi)$ ($1\leq p<+\infty$) состоит из всех τ-измеримых операторов, присоединённых к $R(\mathcal{M},\Sigma)$ и таких, что $\theta_s(h) = e^{-s/p}h$ ($s\in\mathbb{R}$). Пространство $L_\infty(\varphi)$ состоит из всех τ-измеримых операторов, присоединённых к $R(\mathcal{M},\Sigma)$ и таких, что $\theta_s(h) = h$ ($s\in\mathbb{R}$). (В силу сказанного выше $L_\infty(\varphi) = \mathcal{M}$.) Из приведённой конструкции следует, что

(а) $L_p(\varphi)\cap L_q(\varphi) = \{0\}$, если $p\neq q$,

(б) при $p<\infty$ все ненулевые операторы из $L_p(\varphi)$ неограничены.

В частности, $L_1(\varphi)$ состоит из всех τ-измеримых операторов h, присоединённых к $R(\mathcal{M},\Sigma)$ и таких, что $\theta_s(h) = e^{-s}h$, а $L_1(\varphi)^+ = \{h_\psi\,|\,\psi\in\mathcal{M}_*^+\}$. На пространстве $L_1(\varphi)$ корректно определён линейный функционал Tr равенством $\mathrm{Tr}\,(h_\psi) = \psi(1)$. Отсюда вытекает согласованность конструкции Хаагерупа с критерием п. 1.3:

Теорема 8 [53]. *Пространство $L_1(\varphi)$, снабжённое нормой $\|h\|_1 = \mathrm{Tr}\,(|h|)$, является банаховым пространством, изометрически изоморфным пространству $\mathcal{M}_*$.*

Нормы $\|h\|_p\equiv[\mathrm{Tr}\,(|h|^p)]^{1/p}$ ($1\leq p<+\infty$), $\|h\|_\infty\equiv\|h\|$ позволяют говорить о шкале банаховых пространств $L_p(\varphi)$. При этом выполнено неравенство Гёльдера

$$\|hk\|_1\leq\|h\|_p\|k\|_q\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,\ h\in L_p(\varphi),\ k\in L_q(\varphi),\ p,q\in[1,+\infty)\right),$$

и справедлив аналог классической двойственности: если $p\in[1,+\infty)$ и $q = \dfrac{p}{p-1}$, то каждый оператор $h\in L_q(\varphi)$ определяет функционал $\langle\cdot,h\rangle\in L_p(\varphi)^*$: $\langle x,h\rangle\equiv\mathrm{Tr}\,(hx)$ ($x\in L_p(\varphi)$), причём отображение $h\to\langle\cdot,h\rangle$ является изометрическим изоморфизмом $L_q(\varphi)$ на $L_p(\varphi)^*$.

1.9. Иная конструкция пространств $L_p(\varphi)$ предложена Конном [45] и развита Хилсумом [58]. Пространства $L_p(\varphi)$ реализуются замкнутыми операторами в гильбертовом пространстве, где действует алгебра $\mathcal{M}$. Однако эти операторы, вообще говоря, не присоединены к алгебре $\mathcal{M}$.

Пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H, $\mathfrak{H}$ — пополнение $\mathfrak{n}_\varphi$ (см. п. 1.1). Каждому вектору f из линеала веса D_φ, сопоставим оператор $R(f) : \mathfrak{H} \to H$, определённый формулой $R(f) \equiv xf$ $(x \in \mathfrak{n}_\varphi)$. Этот оператор ограничен и тем самым корректно задан на $\mathfrak{H}$. При этом сопряжённый оператор $R(f)^*$ действует из H в $\mathfrak{H}$ и $R(f)R(f)^* \in \mathcal{M}'$ $(f \in D_\varphi)$. Для каждого нормального полуконечного веса ψ на алгебре Неймана $\mathcal{M}'$ тем самым определена положительная б.ф. a_ψ:

$$D(a_\psi) = \{f \in D_\varphi \colon \psi(R(f)R(f)^*) < +\infty\},$$
$$a_\psi(f,g) = \psi(R(f)R(g)^*) \quad (f,g \in D(a_\psi)).$$

Эта б.ф. оказывается замыкаемой и, следовательно, существует самосопряжённый оператор $\dfrac{d\psi}{d\varphi} \geq 0$ такой, что $a_\psi(f,f) = \left\| \left(\dfrac{d\psi}{d\varphi}\right)^{1/2} f \right\|^2$ $(f \in D(a_\psi))$. Оператор $\dfrac{d\psi}{d\varphi}$ называется “пространственной” производной Радона-Никодима веса ψ по весу φ.

Пространство $L_p(\varphi)$ определяется теперь как множество замкнутых операторов h, действующих в H и таких, что $|h|^p = \dfrac{d\psi}{d\varphi}$ при некотором $\psi \in \mathcal{M}'^{+}_{*}$.

Ещё одна конструкция шкалы L_p, близкая к приведённой здесь конструкции Конна и Хилсума, построена в работах Араки и Масуды ([40] (случай состояния) и Масуды [63] (случай веса). Элементами пространства $L_p(\mathcal{M}, \varphi)$, где φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, здесь являются замкнутые операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{H}$ представления, ассоциированного с φ (см. п. 1.1). (Отметим, что эти операторы, вообще говоря, не присоединены к алгебре Неймана $\pi_\varphi(\mathcal{M})$.) При этом произведение оператора из L_p на оператор из L_q лежит в L_r $(r^{-1} = p^{-1} + q^{-1},\ r \geq 1)$, а каноническая двойственность L_p и L_q $(1 = p^{-1} + q^{-1})$ индуцируется скалярным произведением из $\mathfrak{H}$. Получены также полярное и жорданово разложения операторов из $L_p(\mathcal{M}, \varphi)$ относительно положительной части $L_p(\mathcal{M}, \varphi)^+$. Построенные пространства не зависят с точностью до изометрического изоморфизма от выбора φ и естественным образом изоморфны пространствам L_p в упоминавшихся выше конструкциях Хаагерупа, Конна и Хилсума.

1.10. При рассмотрении шкалы пространств L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ естественно поставить вопрос о том, является ли такая шкала интерполяционной. Косаки [61] построил пространства L_p для состояния на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ как пространства комплексной интерполяционной шкалы, соединяющей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_*$, и показал, что эти пространства изоморфны пространствам L_p Хаагерупа (см. п. 1.8). Для случая т.н.п. веса пространства L_p Хаагерупа были реализованы с помощью K-метода Петре вещественной интерполяции в работе Косаки [60]. В работе Терп [75] был установлен изоморфизм между пространствами L_p Конна и Хилсума (см. п. 1.9) и пространствами комплексной интерполяционной шкалы, соединяющей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_*$.

В работах А. А. Золотарева [7, 8] построение и исследование пространств L_p, ассоциированных с состоянием на алгебре Неймана, основывалось на использовании шкалы $L_{1,\alpha}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, введённой в п. 1.7. При этом подходе в качестве аналога пространства L_p при каждом фиксированном $\alpha \in [0,1]$

выступает пространство $L_{p,\alpha}$ комплексной интерполяционной шкалы, построенной по банаховой паре $(L_{1,\alpha}, \mathcal{M})$. При каждом фиксированном $p \in [1,\infty]$ пространства $L_{p,\alpha}$ попарно изоморфны и семейство $L_{p,\alpha}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ образует комплексную интерполяционную шкалу. Имеет место каноническая двойственность $L^*_{p,\alpha} \simeq L_{p',\alpha'}$ $(p^{-1}+p'^{-1}=1,\ \alpha+\alpha'=1)$. Для состояния на полуконечной алгебре Неймана шкала $L_{p,\alpha}$ совпадает с соответствующей шкалой, введённой в п. 1.7. Аналогично пространству L_1, описанному в п. 1.4, пространства $L_{p,\alpha}$ реализуются как пространства б.ф. на плотном линеале в гильбертовом пространстве стандартного представления; однако оказывается [8], что для произвольных p и α линеал состояния для этих целей уже не подходит.

1.11. Ещё одна конструкция пространств L_p предложена О. Е. Тихоновым [24]. Она основана на теории обобщённых разложений единицы. Пусть φ — т.н.п. вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Для $x \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ положим

$$\|x\|_p = \begin{cases} \inf\left[\displaystyle\int_\Omega |f|^p\,\varphi(d\mathbf{X})\right]^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < +\infty, \\ \inf\limits_{\omega(\mathbf{X})} \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|, & \text{если } p = +\infty. \end{cases}$$

Здесь inf берётся по всем представлениям $x = \displaystyle\int_\Omega f\,d\mathbf{X}$ (интеграл понимается в ультраслабом смысле), где $\mathbf{X} = \{X(Q)\colon Q \in \mathfrak{A}(\Omega)\}$ — обобщённое $\mathcal{M}$-значное разложение единицы на σ-алгебре $\mathfrak{A}(\Omega)$ подмножеств множества Ω (см., например, [36]), f — вещественная ограниченная измеримая функция на Ω, а $\varphi(\mathbf{X})$ — σ-аддитивная неотрицательная мера на $\mathfrak{A}(\Omega)$, заданная равенством $\varphi(\mathbf{X})(Q) = \varphi(X(Q))$, $Q \in \mathfrak{A}(\Omega)$. Пространство $L_p(\varphi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ определяется как пополнение линеала $\{x \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}\colon \|x\|_p < +\infty\}$ по норме $\|\cdot\|_p$. При этом линеал $\mathfrak{m}^{\mathrm{sa}}_\varphi$ плотен в $L_p(\varphi)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$. Установлен ряд естественных свойств, аналогичных свойствам классических пространств L_p. В частности, получен аналог неравенства Гельдера. Однако вопрос о канонической двойственности для данной конструкции остаётся пока открытым.

1.12. В заключение этого раздела отметим ряд конструкций некоммутативного интегрирования, примыкающих к идеям и методам, изложенным в пп. 1.4—1.7. В работах авторов [33] (случай состояния) и [35] (случай веса) введено и изучено в рамках теории пространства $L_1(\varphi)$ интегрируемых б.ф. понятие некоммутативного условного ожидания. Этот подход, в отличие от принятого в алгебрах операторов (ср. [6, 73]), является возвращением к изначальной классической идее определения условного ожидания на классе всех интегрируемых объектов. Данная схема была расширена А. А. Золотаревым [8] на шкалу $L_{p,\alpha}$ (пп. 1.7, 1.10) и использована им для обобщения результата Гросса [50] о существовании основных физических состояний на класс алгебр Неймана, включающий в себя некоторые факторы типа III.

В работах [25, 30] исследовалась задача продолжения отображения γ (см. п. 1.5), ассоциированного с т.н.п. весом φ с конуса $\mathfrak{m}^+_\varphi$ на $\mathcal{M}^+$ и $\widehat{\mathcal{M}}^+$, естественно возникающая в связи с некоммутативным аналогом теоремы Радона-Никодима для нормальных весов в рамках подхода, описанного в пп. 1.4–1.5. Оказывается, что существование решения этой задачи эквивалентно дополнительному требованию на вес φ, названному в [25] *локальной конечностью*. В [30] получено полное описание нормальных локально конечных весов на полуконечных алгебрах Неймана (показано, что этот класс совпадает с классом локально измеримых весов) и изучался вопрос их существования на общих алгебрах Неймана.

В работе О. Е. Тихонова [22] предложена конструкция пространства $L_1(\varphi)$ относительно эрмитова ультраслабо непрерывного функционала φ на алгебре Неймана, согласующаяся для положительного φ с конструкцией п. 1.4, но принципиально не сводящаяся к ней в общей ситуации.

§2. ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ В JBW-АЛГЕБРАХ

2.1. Основные сведения о JB- и JBW-алгебрах содержатся в работах Альфсена, Шульца и Штермера [37, 71]; в дальнейшем будем придерживаться принятой в этих работах терминологии и обозначений.

Напомним, что JB-*алгеброй* называется вещественная йорданова алгебра A с 1, наделённая нормой, превращающей её в банахово пространство, причём для любых $x, y \in A$:

(i) $\|x \circ y\| \leq \|x\| \, \|y\|$,
(ii) $\|x^2\| = \|x\|^2$,
(iii) $\|x^2\| \leq \|x^2 + y^2\|$.

Здесь и далее через $x \circ y$ обозначается йорданово произведение элементов $x, y \in A$; будем полагать, следуя [39]:

$$U_x y \equiv 2x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y.$$

JB-алгебра A называется JBW-*алгеброй*, если она как банахово пространство является сопряжённым к некоторому банахову пространству A_*, которое может быть отождествлено, что мы и будем предполагать в дальнейшем, с пространством всех нормальных функционалов на A [71]. Будем далее через A^+ (соответственно A_*^+) обозначать конус положительных элементов JBW-алгебры A (соответственно преддвойственного пространства A_*). Слабой (соответственно сильной) топологией JBW-алгебры A называется локально выпуклая топология, порождённая всеми полунормами вида $x \to |\rho(x)|$ ($\rho \in A_*$) (соответственно полунормами $x \to \rho(x^2)^{1/2}$ ($\rho \in A_*^+$)). Эти топологии служат аналогами соответственно ультраслабой и ультрасильной топологий алгебр Неймана.

Важным примером JBW-алгебры служит JW-алгебра: это йорданова алгебра самосопряжённых органиченных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H с симметризованным произведением $x \circ y = \dfrac{1}{2}(xy + yx)$, замкнутая в слабой операторной топологии и содержащая тождественный оператор. Каждая JBW-алгебра A допускает разложение вида $A = A_{sp} \oplus A_{ex}$, где A_{sp} — JW-алгебра, $A_{ex} = C(X, M_3^8)$ — JBW-алгебра всех непрерывных функций на гиперстоуновском отделимом компакте X со значениями в исключительной йордановой алгебре M_3^8 всех симметрических матриц 3-го порядка над числами Кэли [7].

2.2. По аналогии со случаем алгебр Неймана весом на JBW-алгебре A [59,32] называется отображение $\varphi : A^+ \to [0,+\infty]$ со свойствами: $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ $(x, y \in A^+, \lambda \geq 0)$ (при этом $0(+\infty) \equiv 0$). Положим

$$\mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in A^+ \colon \varphi(x) < +\infty\}, \quad \mathfrak{n}_\varphi = \{x \in A \colon \varphi(x^2) < +\infty\},$$

и пусть $\mathfrak{m}_\varphi$ — линейная оболочка в A наследственного конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+$; той же буквой φ будем обозначать и линейное продолжение ограничения $\varphi \,|\, \mathfrak{m}_\varphi^+$ на $\mathfrak{m}_\varphi$. Если $A = \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ — эрмитова часть некоторой алгебры Неймана $\mathcal{M}$, то мы не будем различать понятий: вес на A и вес на $\mathcal{M}$ (отметим, что в этом случае, согласно п. 1.4, соответствующие объекты обозначались бы через $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ и $\mathfrak{n}_\varphi^{\mathrm{sa}}$). Вес φ на JBW-алгебре A называется

— *точным*, если $\varphi(x^2) = 0$, $x \in A \Rightarrow x = 0$,
— *полуконечным*, если $\mathfrak{m}_\varphi$ слабо плотно в A,
— *нормальным*, если существует семейство $(\rho_i) \subset A_*^+$ такое, что $\varphi(x) = \sum\limits_i \rho_i(x)$ $(x \in A^+)$.

Отметим, что для случая JW-алгебры A используемое здесь понятие нормальности эквивалентно (как и в случае алгебр Неймана [52]) требованию: для каждой возрастающей сети $x_i \nearrow x$ $(x_i, x \in A^+)$: $\varphi(x) = \sup\limits_i \varphi(x_i)$ (см. [32]).

Для веса φ на JBW-алгебре A ([59, 32]):
(а) $\mathfrak{m}_\varphi$ и $\mathfrak{n}_\varphi$ — *квадратичные идеалы в A, причём*

$$\mathfrak{m}_\varphi^+ = \mathfrak{m}_\varphi \cap A^+, \quad \mathfrak{m}_\varphi = \{x \circ y \colon x, y \in \mathfrak{n}_\varphi\};$$

(б) *следующие условия эквивалентны:*
(i) *вес φ полуконечен,*
(ii) *существует возрастающая сеть $e_\alpha \nearrow 1$, $e_\alpha \in \mathfrak{m}_\varphi^+$,*
(iii) *$\mathfrak{m}_\varphi$ плотно в A в сильной топологии.*

Для т.н.п. веса φ на JBW-алгебре A будем через H_φ обозначать вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathfrak{n}_\varphi$ по скалярному произведению $\langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle_\sharp \equiv \varphi(x \circ y)$, и пусть $\|\widehat{x}\|_\sharp \equiv \varphi(x^2)^{1/2}$, где $\widehat{\ })\colon \mathfrak{n}_\varphi \to H_\varphi$ — каноническое вложение. Отметим, что в общем случае отсутствует (ср. с п. 1.1) естественный способ представления A операторами в H_φ.

2.3. Вес τ на JBW-алгебре A называется *следом*, если $\tau(U_s x) = \tau(x)$ для всех $x \in A^+$, $s \in A$, $s^2 = 1$.

Схема интегрирования относительно точного нормального конечного следа на JBW-алгебре A, близкая к подходу Сигала, предложена Ш. А. Аюповым [3]. Пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ при этом вводятся как пополнения A по нормам $x \to \tau(|x|)$ и $x \to \tau(x^2)^{1/2}$ соответственно. В рамках теории OJ-алгебр показана возможность реализации этих пространств неограниченными измеримыми элементами и, в частности, для JW-алгебры A — неограниченными самосопряжёнными операторами, присоединёнными к A. Отображение $x \to \tau(x\cdot)$ допускает продолжение до изоморфизма $L_1(\tau)$ на преддвойственное пространство A_*.

Указанная конструкция перенесена на случай т.н.п. следа М. А. Бердикуловым [5]. Р. З. Абдуллаевым [1, 2] в этой же ситуации построена шкала L_p $(1 \leq p \leq \infty)$. В работах Р. З. Абдуллаева [1], Ш. А. Аюпова и Р. З. Абдуллаева [4] на полуконечные JBW-алгебры перенесены конструкции шкал L_p относительно состояния и веса на полуконечных алгебрах Неймана, предложенные в работах [26, 28] (см. п. 1.7).

Наиболее общий случай — неассоциативное интегрирование относительно нормального веса на JBW-алгебре, — изучен в работе [32]. Перейдем к изложению этой конструкции.

2.4. Отправной точкой здесь является следующий результат, переносящий на йорданов случай и усиливающий теорему 2 (п. 1.5).

Теорема 9 [32]. *Пусть φ — нормальный полуконечный вес на JBW-алгебре A. Существует, и притом единственное, отображение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to A_*$, удовлетворяющее условиям:*

(γ1) $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$,

(γ2) $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^+) = \{\rho \in A_*^+ : \exists \lambda > 0\ (\rho \leq \lambda\varphi)\}$,

(γ3) $\{x, y\} \to \gamma(x)(y)$ *— симметрическая положительная билинейная форма на $\mathfrak{m}_\varphi$.*

При этом отображение γ линейно и справедливы соотношения:

(γ4) $\|\gamma(x)\| = \|x\|_\varphi$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi$,

(γ5) $\gamma(x)(x) \leq \varphi(x^2)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$.

(Здесь $\|\cdot\|_\varphi$ — выпуклая функция на $\mathfrak{m}_\varphi$, задаваемая формулой (1) п. 1.4.)

Отметим явный вид отображения γ в следующем важном частном случае.

Следствие 1 [32]. *Пусть τ — точный нормальный конечный след на JBW-алгебре A и вес $\varphi = \tau(h^2 \circ (\cdot))$, где $h \in A$, $\lambda 1 \leq h \leq 1$ для некоторого $\lambda > 0$. Тогда*

$$\gamma(x)(y) = \tau((U_h x) \circ y), \qquad \|x\|_\varphi = \tau(|U_h x|) \quad (x, y \in A).$$

Неассоциативным аналогом теоремы 2 (п. 1.5) является следующее утверждение.

Следствие 2 [32]. *Пусть φ — т.н.п. вес на JBW-алгебре A. Тогда $\|\cdot\|_\varphi$ — норма на $\mathfrak{m}_\varphi$ и отображение γ переводит $\mathfrak{m}_\varphi$ на плотную часть A_* и, следовательно, продолжается до изометрического изоморфизма банахова пространства $L_1(\varphi)$ — пополнения $\mathfrak{m}_\varphi$ по норме $\|\cdot\|_\varphi$ — на A_*.*

Приводимый ниже результат устанавливает естественную связь неассоциативных пространств $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi) \equiv H_\varphi$ и отражает специфику йорданова случая.

Следствие 3 [32]. *Пусть φ — т.н.п. вес на JBW-алгебре A. Отображение $\{x, y\} \to \gamma(x \circ y)$ $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$ продолжается по непрерывности до A_*-значного "скалярного произведения" на H_φ, т. е. существует единственное билинейное отображение $\circ)\colon H_\varphi \times H_\varphi \to A_*$ такое, что*

(i) $\xi \circ \xi \in A_*^+$, $\xi \circ \xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$ $(\xi \in H_\varphi)$;

(ii) $|\langle\xi,\eta\rangle_\sharp| \le \|\xi\circ\eta\| \le \|\xi\|_\sharp\|\eta\|_\sharp \quad (\xi,\eta\in H_\varphi)$;
(iii) $\widehat{x}\circ\widehat{y} = \gamma(x\circ y)\ (x,y\in\mathfrak{n}_\varphi)$.

При этом $A_* = \{\xi\circ\eta \mid \xi,\eta\in H_\varphi\}$.

Отметим, что из последнего утверждения следствия 3 видно, что сильная (соответственно слабая) топология A порождается полунормами вида $x\to [x^2,\xi\circ\xi]^{1/2}$ (соответственно $x\to|[x,\xi\circ\eta]|$), где $\xi,\eta\in H_\varphi$, а $[\cdot,\cdot]$ — спаривание A и A_*.

2.5. Определим для нормального полуконечного веса φ на JBW-алгебре A симметрическую положительную форму $[\cdot,\cdot]_\varphi$ на $\mathfrak{m}_\varphi$, полагая $[x,y]\equiv\gamma(x)(y)$, где отображение γ ассоциировано с φ по теореме 9. Отметим, что если $\varphi(1)<+\infty$, т. е. $\varphi\in A_*^+$, то $[\cdot,\cdot]_\varphi$ — автополярная форма на A, ассоциированная с φ в смысле работ работ Хаагерупа и Ханче-Олсена [56, 57]. С помощью этой формы в указанных работах предложен йорданов аналог модулярной группы Σ теории Томита-Такесаки (см. п. 1) для нормального состояния на JBW-алгебре. Следующий результат переносит этот аналог на случай веса. Предварительно условимся, следуя [56], называть однопараметрическим косинус-семейством на линейном пространстве $\mathcal{L}$ семейство $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$ линейных операторов в $\mathcal{L}$, удовлетворяющих функциональному уравнению косинуса: $2V_sV_t = V_{s+t}+V_{s-t}$, $V_0=1$.

Теорема 10 [56,57,32]. *Пусть φ — т.н.п. вес на JBW-алгебре A. Существует, и притом единственное, косинус-семейство $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ положительных, сохраняющих 1 линейных отображений A в себя, такое, что*

(i) *отображение $t\to\theta_t(x)$ слабо непрерывно для всех $x\in A$,*
(ii) $\varphi(\theta_t\cdot)=\varphi(\cdot)$, $\varphi(\theta_t(x)\circ y)=\varphi(x\circ\theta_t(y))$ $(x,y\in\mathfrak{n}_\varphi,\ t\in\mathbb{R})$,
(iii) $[x,y]_\varphi = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x\circ\theta_t(y))}{\operatorname{ch}(\pi t)}\,dt \quad (x,y\in\mathfrak{m}_\varphi)$.

2.6. Всюду в этом разделе A — JW-алгебра в комплексном гильбертовом пространстве H, φ — т.н.п. вес на A. Мы опишем в этой, наиболее интересной с точки зрения неассоциативного интегрирования, ситуации содержательные реализации пополнений $\mathfrak{m}_\varphi$ и $\mathfrak{n}_\varphi$ по нормам $\|\cdot\|_\varphi$ и $\|\cdot\|_\sharp=\varphi((\cdot)^2)^{1/2}$ соответственно.

Назовём *линеалом веса* φ (ср. с п. 1.4) линейное многообразие

$$D_\varphi\equiv\{f\in H\colon \exists\lambda>0\ \forall x\in A^+\ (\langle xf,f\rangle\le\lambda\varphi(x))\}.$$

Назовём б.ф. a, заданную на D_φ (соответственно линейный оператор r в H, $D(r)=D(\varphi)$), *интегрируемой* (соответственно *интегрируемым с квадратом*) относительно φ, если существует последовательность $(x_n)\subset\mathfrak{m}_\varphi$ (соответственно $(x_n)\subset\mathfrak{n}_\varphi$), называемая *определяющей*, такая, что

(а) $a(f,g)=\lim\limits_n\langle x_nf,g\rangle \quad (f,g\in D_\varphi)$,
(б) $\|x_n-x_m\|_\varphi\to 0 \quad (m,n\to\infty)$,

(соответственно,

(а′) $rf=\lim\limits_n x_nf\ (f\in D_\varphi)$,
(б′) $\|x_n-x_m\|_\sharp\to 0 \quad (m,n\to\infty)$).

Обозначим через $L_1(\varphi)$ (соответственно $L_2(\varphi)$) вещественное линейное пространство всех интегрируемых относительно φ б.ф. (соответственно интегрируемых с квадратом операторов). Отметим, что все б.ф. из $L_1(\varphi)$ (соответственно операторы из $L_2(\varphi)$) эрмитовы. Если A — эрмитова часть некоторой алгебры Неймана, то соответствующие объекты, согласно п. 1.4, следовало бы обозначать через $L_1(\varphi)^{\mathrm{sa}}$ и $L_2(\varphi)^{\mathrm{sa}}$. Условимся для каждых $r, s \in L_2(\varphi)$ через $r \circ s$ обозначать б.ф. на D_φ, заданную равенством

$$r \circ s(f,g) = \frac{1}{2}[\langle rf, sg\rangle + \langle sf, rg\rangle] \quad (f, g \in D_\varphi).$$

Теорема 11 [32]. (i). *Пусть б.ф.* $a \in L_1(\varphi)$ *и* (x_n) *— её определяющая последовательность. Равенство* $\|a\|_\varphi \equiv \lim\limits_n \|x_n\|_\varphi$ *корректно определяет норму, превращающую* $L_1(\varphi)$ *в вещественном банахово пространство, изометрически изоморфное* A_*. *Соответствующий изоморфизм продолжает отображение* γ *и переводит конус положительных б.ф.* $L_1(\varphi)^+$ *на конус* A_*^+.

(ii). *Пусть операторы* $r, s \in L_2(\varphi)$ *и* $(x_n), (y_n)$ *— их определяющие последовательности. Равенство* $\langle r, s\rangle_\sharp = \lim\limits_n \varphi(x_n \circ y_n)$ *корректно задаёт скалярное произведение, превращающее* $L_2(\varphi)$ *в вещественное гильбертово пространство, изометрически изоморфное* H_φ. *Соответствующий изоморфизм продолжает вложение*$\widehat{\ }$)$\colon \mathfrak{n}_\varphi \to H_\varphi$. *При этом б.ф.* $r \circ s \in L_1(\varphi)$ *и* $\gamma(r \circ s) = \widehat{r} \circ \widehat{s}$.

Отметим, что все ограниченные б.ф. из $L_1(\varphi)^+$ (соответственно ограниченные операторы из $L_2(\varphi)$) определяются операторами из $\mathfrak{m}_\varphi^+$ (соответственно из $\mathfrak{n}_\varphi$). В следующем утверждении решается вопрос о том, какие неограниченные б.ф. из $L_1(\varphi)$ определяются операторами (ср. с теоремой 4).

Следствие. *Для б.ф.* $a \in L_1(\varphi)^+$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $a = r \circ r$ *для некоторого* $r \in L_2(\varphi)$,

(ii) *б.ф.* a *замыкаема,*

(iii) *существует последовательность* $(\rho_n) \subset A_*^+$ *такая, что*

$$\rho_n \le \lambda_n \varphi \ (\lambda_n \ge 0) \ \text{и} \ \gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n.$$

2.7. Для JB-алгебр отсутствует полноценный аналог конструкции ГНС. Однако описанная выше схема неассоциативного интегрирования позволяет предложить следующий ослабленный вариант такой конструкции.

Пусть B — JB-алгебра, ρ — фиксированное состояние на B (т. е. $\rho \in B^*$, $\rho \ge 0$, $\rho(1) = 1$). Положим $\mathcal{N}_\rho = \{x \in B \colon \rho(x^2) = 0\}$, и пусть H_ρ — вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением факторпространства $B/\mathcal{N}_\rho$ по скалярному произведению $\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle = \rho(x \circ y)$ (в этом пункте значком$\widehat{\ }$) обозначается каноническая сюръекция $B \to B/\mathcal{N}_\rho$). Обозначим через $(H_\rho)_1$ замыкание $\widehat{B}_1$ в H_ρ, где $B_1 = \{x \in B \colon \|x\| \le 1\}$.

Оказывается, существует лишь единственный естественный способ сопоставления векторам из H_ρ функционалов из B^*.

Теорема 12 [32]. *Существует, и притом единственное, отображение* $\circ)\colon H_\rho \times H_\rho \to B^*$ *такое, что*

1^0. $\widehat{1} \circ \widehat{1} = \rho$, $\widehat{x}^2 \circ \widehat{1} = \widehat{x} \circ \widehat{x}$ $(x \in B)$,

2^0. $\{\xi \circ \xi \colon \xi \in (H_\rho)_1\} = \{\theta \in B^* \colon 0 \le \theta \le \rho\}$,

3^0. $\{x, y\} \to [x, \widehat{y} \circ \widehat{1}]$ — *симметрическая положительная билинейная форма на* B,

4^0 $|\langle \xi, \eta \rangle| \le \|\xi \circ \eta\| \le \|\xi\| \, \|\eta\|$ $(\xi, \eta \in H_\rho)$.

При этом отображение $\circ)$ *является симметрической положительной билинейной формой на* H_ρ *со значениями в* B^* *и согласовано с умножением в* B:

5^0. $(\widehat{x \circ y}) \circ \widehat{1} = \widehat{x} \circ \widehat{y}$ $(x, y \in B)$.

Следующий результат служит аналогом хорошо известного свойства ГНС-конструкции для C^*-алгебр: в ГНС-представлении, ассоциированным с фиксированным состоянием, каждый автоморфизм C^*-алгебры, не меняющий этого состояния, реализуется с помощью унитарного оператора.

Следствие [32]. *Пусть* α — *такой автоморфизм* JB*-алгебры* B, *что* $\rho(\alpha \, \cdot) = \rho$. *Тогда существует такой унитарный оператор* U *в* H_ρ, *что*

$$[\alpha(x), \xi \circ \eta] = [x, U\xi \circ U\eta] \quad (x \in B;\ \xi, \eta \in H_\rho).$$

§3. О ПРОБЛЕМЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕОГРАНИЧЕННЫХ МЕР НА ПРОЕКТОРАХ

3.1. В заключительном параграфе остановимся на проблеме интегрирования относительно мер на проекторах. Под мерой на проекторах алгебры Неймана $\mathcal{M}$ мы понимаем отображение $m : \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \to [0, +\infty]$, удовлетворяющее требованию:

$$p = \sum_{i \in I} p_i \ \ (p, p_i \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}},\ p_i p_j = 0)\ (i \ne j)) \Rightarrow m(p) = \sum_{i \in I} m(p_i).$$

В частности, если φ — нормальный вес на $\mathcal{M}$, то $\varphi|\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — мера на проекторах. При этом в силу спектральной теоремы нормальный вес определён однозначно своим ограничением $\varphi|\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Обратно, если мера на проекторах продолжается до нормального веса, то проблема построения интеграла по такой мере редуцируется к проблеме построения интеграла по весу, решение которой было описано выше.

Поэтому в общем случае сначала естественно ответить на вопрос, продолжается ли мера на проекторах алгебры Неймана до нормального веса. Это — известная проблема линейности. Положительное её решение для унитарно инвариантных мер на проекторах получено по существу ещё Мюрреем и Нейманом (задолго до постановки общей проблемы линейности). Программа построения интеграла относительно таких мер реализована Сигалом [70] (результат, отмечавшийся выше в п. 1.2, получен Сигалом именно методом распространения меры на проекторах до интеграла). Следующим принципиальным продвижением является известная теорема Глисона [49], дающая описание всех конечных мер на проекторах фактора I_n $(3 \le n \le \infty)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Именно для всякой меры m, заданной на $\mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$ $(m(1) < +\infty)$, существует и определён однозначно ядерный оператор $k \ge 0$, действующий в H, такой, что $m(p) = \mathrm{Tr}\,(kp)$ $(p \in \mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}})$. Нетрудно видеть, что равенство $\varphi(x) = \mathrm{Tr}\,(kx)$ $(x \in \mathcal{B}(H))$ определяет продолжение меры m до нормального функционала φ на алгебре $\mathcal{B}(H)$.

К настоящему времени усилиями целого ряда математиков проблема линейности для конечных мер получила исчерпывающее решение [51, 16–18, 21, 41, 77, 78]. Именно, если алгебра Неймана $\mathcal{M}$ не содержит в качестве прямого слагаемого алгебру типа I_2, то всякая конечная мера на $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ продолжается до нормального функционала[3].

3.2. Таким образом, проблема построения интегрирования относительно мер на проекторах остаётся открытой для неограниченных мер $(m(1) = +\infty)$. Это объекты существенно более сложные, чем нормальные веса, и их строение изучено пока лишь для алгебры $\mathcal{B}(H)$ [12, 14, 9, 10]. Приведём здесь структурную теорему о строении неограниченных мер в несколько более общей форме, по сравнению с [12]. Меру m на проекторах алгебры Неймана $\mathcal{M}$ назовём *полуконечной*, если существует семейство $(p_i)_{i \in I}$ попарно ортогональных проекторов из $\mathcal{M}$ такое, что $1 = \sum\limits_{i \in I} p_i$ и $m(p_i) < +\infty$ $(i \in I)$. В частности, если $I = \mathbb{N}$, меру назовём *σ-конечной*.

Теорема 13 [10]. *Пусть H — гильбертово пространство $(\dim H \ge 3)$ и m — полуконечная мера на $\mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$. Тогда существует и определена однозначно плотно заданная положительная б.ф. t такая, что*

$$m(p) = \begin{cases} \mathrm{Tr}\,(t \circ p), & \textit{если } t \circ p \in \mathfrak{S}_1, \\ +\infty & \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

(Здесь $t \circ p \in \mathfrak{S}_1$ означает, что 1) pH содержится в линеале $D(t)$ — области определения б.ф. t, 2) б.ф. $t \circ p(f,f) \equiv t(pf,pf)$ $(f \in H)$ определяется некоторым ядерным оператором, который отождествляется с этой формой.) В частности, если б.ф. t замкнута, то мера продолжается до нормального веса на алгебре $\mathcal{B}(H)$. Вместе с тем, класс полуконечных мер существенно шире класса нормальных полуконечных весов на $\mathcal{B}(H)$. Уместно отметить, однако, что далеко не всякая положительная б.ф. t определяет с помощью равенства (2) полуконечную меру [12, 11]. Условие, характеризующее б.ф., задающие σ-конечные меры, найдено Г. Д. Луговой [9]. Это же условие характеризует б.ф., задающие полуконечные меры. Отметим замечательную особенность исследуемых мер. Если m — полуконечная мера на $\mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$, то среди нормальных весов, ограничение которых на $\mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$ мажорируется мерой m, существует наибольший нормальный (необходимо полуконечный) вес φ, называемый *регулярной компонентой* меры m. Если $\varphi|\mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}} \ne m$, то $\varphi(1) = +\infty$ и φ заведомо не выделяется как аддитивное слагаемое меры m (см. [14, 11]).

3.3. На основе приведённых выше результатов о строении неограниченных мер оказывается возможным ввести пространство L_1 для широкого класса неограниченных мер на проекторах $\mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$ и реализовать его преддвойственным пространством подходящей алгебры Неймана.

Следуя [15], назовем полуконечную меру $m:\mathcal{B}(H)^{\text{pr}}\to[0,+\infty]$ *абсолютно точной*, если точен вес φ — регулярная компонента меры m. Для положительной б.ф. t, ассоциированной с мерой m, обозначим через K_t^+ конус всех конечномерных неотрицательных операторов x в гильбертовом пространстве H таких, что область значений $\mathcal{R}(x)\subset D(t)$. Пусть K_t (соответственно K_t^{sa} — линейная (соответственно вещественная линейная) оболочка K_t^+. Из результатов статьи [13] следует, что мера m продолжается до линейного функционала (также обозначаемого m) на K_t. Определим на K_t^{sa} выпуклую функцию (ср. с (1) п. 1.4)

$$x\to\|x\|_m=\inf\{m(x_1)+m(x_2)\colon x=x_1-x_2,\ x_i\in K_t^+\}.$$

Для абсолютно точной меры $\|\cdot\|_m$ — норма. Банаховым пространством $L_1(m)^{\text{sa}}$ назовём пополнение пространства K_t^{sa} по норме $\|\cdot\|_m$. Для формулировки результата о реализации пространства $L_1(m)^{\text{sa}}$ нам понадобится следующий аналог конструкции ГНС.

Пусть $\mathfrak{n}_m$ — левый идеал (в алгебре $\mathcal{B}(H)$) всех конечномерных операторов x таких, что $x^*x\in K_t^+$. Тогда равенство

$$(x|y)\equiv m(y^*x)\quad(x,y\in\mathfrak{n}_m)$$

задаёт скалярное произведение в $\mathfrak{n}_m$. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathfrak{n}_m$ по этому скалярному произведению. Отображение $\pi_m:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, заданное равенством

$$\pi_m(a)x\equiv ax\quad(a\in\mathcal{B}(H),\ x\in\mathfrak{n}_m)$$

— морфизм алгебр Неймана. Более того, π_m — изометрия. При этом равенство (ср. [52], лемма 1.1)

$$\beta(y^*x)(a')\equiv(a'x|y)\quad(a'\in\pi_m(\mathcal{B}(H))';\ x,y\in\mathfrak{n}_m)$$

однозначно определяет линейное отображение $\beta:K_t\to\pi_m(\mathcal{B}(H))'_*$ такое, что $\|\beta(a)\|=\|a\|_m$ $(a\in K_t^{\text{sa}})$.

Теорема 14 [15]. *Пусть $m:\mathcal{B}(H)^{\text{pr}}\to[0,+\infty]$ — абсолютно точная мера. Тогда банахово пространство $L_1(m)^{\text{sa}}$ изометрически изоморфно пространству $\pi_m(\mathcal{B}(H))'^{\text{sa}}_*$.*

Определим, наконец, банахово пространство $L_1(m)$ как пополнение K_t по норме $a\to\|\beta(a)\|$ $(a\in K_t)$. Тогда $L_1(m)$ — комплексификация вещественного банахова пространства $L_1(m)^{\text{sa}}$ с согласованием соответствующих норм, причём оно изометрически изоморфно пространству $\pi_m(\mathcal{B}(H))'_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Р. З., *Пространства L_p для йордановых алгебр с полуконечным следом*, Ред. ж. "Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н.", Ташкент, 1983, 19 с. Библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 7 апр. 1983 г., 1875-83 Деп.) (РЖМат, 1983, 7Б761 Деп).
2. —, *Неассоциативные пространства L_p*, Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1983, 6, 3–5 (РЖМат, 1984, 6Б1052).
3. Аюпов Ш. А., *Интегрирование на йордановых алгебрах*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **47** (1983), 1, 3–25 (РЖМат, 1983, 7Б808).
4. —, Абдуллаев Р. З., *Теорема Радона-Никодима и L_p-пространства для весов на полуконечных JBW-алгебрах*, Ред. ж. "Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н.", Ташкент, 1984, 26 с. Библиогр. 19 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 19 апр. 1984 г., 2469-84 Деп.) (РЖМат, 1984, 8Б1055 Деп).
5. Бердикулов М. А., *Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBW-алгебр*, Докл. АН УзССР, 1982, 6, 3–4 (РЖМат, 1983, 2Б918).
6. Голодец В. Я., *Условные ожидания и модулярные автоморфизмы неймановских алгебр*, Функц. анализ и его прилож. **6** (1972), вып. 3, 68–69 (РЖМат, 1972, 11Б862).
7. Золотарев А. А., *Пространства L^p относительно состояния на алгебре Неймана и интерполяция*, Изв. вузов. Математика, 1982, 8, 36–43 (РЖМат, 1982, 12Б1067).
8. —, *К интерполяционной теории пространств L^p относительно состояния на алгебре Неймана*, Казан. ун-т. Казань, 1983, 40 с. Библиогр. 20 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 20 сент. 1983 г., 5389-83 Деп) (РЖМат, 1984, 1Б1051Деп).
9. Луговая Г. Д., *Билинейные формы, определяющие меры на проекторах*, Изв. вузов. Математика, 1983, 2, 88 (РЖМат, 1983, 8Б983).
10. —, *Неограниченные меры на проекторах алгебры Неймана*, Дис... канд. физ.-мат. н., Казань, 1983, 100 с.
11. —, *О строении неограниченных мер на проекторах гильбертова пространства*, В сб. "Исслед. по прикл. мат." Казань, 1984, 10, 202–205, (РЖМат, 1984, 10Б927).
12. —, Шерстнев А. Н. *О теореме Глизона для неограниченных мер*, Изв. вузов. Математика, 1980, 12, 30–32 (РЖМат, 1981, 4Б874).
13. —, —, *Об интегрировании ограниченных операторов относительно мер на идеалах проекторов*, В сб. "Конструктивн. теория функций и функц. анализ", Казань, 1981, вып. 3, 44–50 (РЖМат, 1982, 3Б841).
14. —, —, *Теорема Глизона для неограниченных мер на проекторах гильбертова пространства*, В сб. "Тезисы докл. III Межд. конф. по теории вероятн. и мат. статистике", Вильнюс, **т. 2** (1981), 13–14.
15. —,—, *О реализации пространства L_1 относительно неограниченной меры на проекторах*, Изв. вузов. Математика, 1984, 12, 35–42.
16. Матвейчук М. С., *Одна теорема о состояниях на квантовых логиках, I*, Теор. и мат. физ. **45** (1980), 2, 244–250 (РЖФиз, 1981, 2Б121).
17. —, *Одна теорема о состояниях на квантовых логиках, II*, Теор. и мат. физ. **48** (1981), 3, 261–265 (РЖФиз, 1982, 1Б93).
18. —, *Описание конечных мер в полуконечных алгебрах*, Функц. анализ и его прилож. **15** (1981), 3, 41–53 (РЖМат, 1982, 3Б842).
19. —, *Линейность состояния в неассоциативных логиках*, Изв. вузов. Физика, 1983, 11, 119–120.
20. —, *Одна теорема о состояниях на квантовых логиках. Состояния в алгебрах Йордана*, Теор. и мат. физ. **57** (1983), 3, 465–468 (РЖФиз, 1984, 4Б208).
21. —, Нессонов Н. И., *Описание конечных мер в W^*-факторах типа III*, Изв. вузов. Математика, 1984, 2, 13–16 (РЖМат, 1984, 9Б693).
22. Тихонов О. Е., *Интегрирование относительно эрмитова функционала на алгебре Неймана*, Казан. ун-т. Казань, 1981, 12 с. Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 июня 1981 г., 247–881 Деп) (РЖМат, 1981, 9Б753Деп).
23. —, *Интегрируемые билинейные формы и интеграл по операторнозначной мере*, Изв. вузов. Математика, 1982, 3, 76–80 (РЖМат, 1982, 7Б863).

24. —, *Пространства типа L_p относительно веса на алгебре Неймана*, Изв. вузов. Математика, 1982, 8, 76–78 (РЖМат, 1982, 12Б1066).
25. Трунов Н. В., *Локально конечные веса на алгебрах Неймана*, Казан. ун-т. Казань, 1978, 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101–79 Деп) (РЖМат, 1979, 5Б798Деп).
26. —, *О некоммутативном аналоге пространства L_p*, Изв. вузов. Математика, 1979, 11, 69–77 (РЖМат, 1980, 4Б959).
27. —, *О некоммутативном аналоге пространства L_2*, В сб. "Конструктивн. теория функций и функц. анализ", Казань, 1979, вып. 2, 93–114 (РЖМат, 1980, 9Б702).
28. —, *Пространства L_p, ассоциированные с весом на полуконечной алгебре Неймана*, В сб. "Конструктивн. теория функций и функц. анализ" Казань, 1981, вып. 3, 88–92 (РЖМат, 1982, 3Б846).
29. —, *Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса*, В сб. "Конструктивн. теория функций и функц. анализ" Казань, 1981, вып. 3, 73–87 (РЖМат, 1982, 3Б846).
30. —, *К теории нормальных весов на алгебрах Неймана*, Изв. вузов. Математика, 1982, 8, 61–70 (РЖМат, 1982, 12Б1065).
31. —, *К теории некоммутативных пространств L_1 и L_2*, В сб. "Конструктивн. теория функций и функц. анализ", Казань, 1983, вып. 4, 96–105.
32. —, *Интегрирование относительно веса в йордановых алгебрах*, Казан. ун-т. Казань, 1984, 34 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 июля 1984 г., 4948–84 Деп).
33. —, Шерстнев А. Н., *Условные ожидания в одной схеме некоммутативной теории вероятностей*, Trans. VIII Prague Conf. on Inform. Theory, Stat. Decis. Funct. Random Proc., vol. B, Prague, 1978, 287–299 (РЖМат, 1979, 6В236).
34. —, —, *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I*, Изв. вузов. Математика, 1978, 7, 79–88 (РЖМат, 1979, 4Б926)
35. —, —, *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, II*, Изв. вузов. Математика, 1978, 12, 88–99 (РЖМат, 1979, 8Б851).
36. Холево А.С., *Исследования по общей теории статистических решений*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **124** (1976), 140 с. (РЖМат, 1976, 12В193).
37. Шерстнев А. Н., *К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана*, Функц. анализ и его прил. **8** (1974), вып. 3, 89–90 (РЖМат, 1975, 1Б1007).
38. —, *Каждый гладкий вес является l-весом*, Изв. вузов. Математика, 1977, 8, 88–91 (РЖМат, 1978, 4Б586).
39. Alfsen E., Shultz F., Størmer E., *Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras*, Adv. Math. **28** (1978), no. 1, 11–56 (РЖМат, 1978, 10Б905).
40. Araki H., Masuda T., *Positive cones and L_p-spaces for von Neumann algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), no. 2, 339–411 (РЖМат, 1983, 3Б1078).
41. Christensen E., *Measures on projections and physical states*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), no. 4, 529–538 (РЖМат, 1983, 3В40).
42. Ciach L., *Linear-topological spaces of operators affiliated with a von Neumann algebra*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **31** (1983), no. 3–4, 161–166 (РЖМат, 1984, 8Б1078).
43. Combes F., *Poids associés à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compos. math. **23** (1971), no. 1, 49–77 (РЖМат, 1972, 1Б862).
44. —, *Poids et espérances conditionelles dans les algèbres de von Neumann*, Bull. Soc. math. France **99** (1971), no. 4, 73–112 (РЖМат, 1972, 1Б863) (Рус. пер.: Матем. Сб. переводов **18** (1974) вып. 6, 80–113).
45. Connes A., *On the spatial theory of von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **35** (1980), no. 2, 153–164 (РЖМат, 1980, 8Б751).
46. Dixmier J., *Formes lineàires sur un anneau d'opérateurs*, Bull. Soc. math. France **81** (1953), 9–39 (РЖМат, 1953, 816).
47. —, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, 2[e] édition (РЖМат, 1969, 8Б644), Gauthier-Villars, Paris, 1969, 367 p.
48. Dye H., *The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 243–280.
49. Gleason A., *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*, J. Math. Mech. **6** (1957), no. 6, 885–893 (РЖМат, 1959, 604).

50. Gross L., *Existence and uniqueness of physical ground states*, J. Funct. Anal. **10** (1972), no. 1, 52–109 (РЖМат, 1972, 11Б776).
51. Gunson J., *Physical states on quantum logics*, Ann. Inst. H. Poincaré **17** (1972), no. 4, 295–311.
52. Haagerup U., *Normal weights on W^*-algebras*, J. Funct. Anal. **19** (1975), no. 3, 302–317 (РЖМат, 1975, 12Б941).
53. —, *L_p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra*, CoIIoq int. CNRS (1979), no. 274, 175–184 (РЖМат, 1980, 8Б744).
54. —, *Operator-valued weights in von Neumann algebras, I*, J. Funct. Anal. **32** (1979), no. 2, 175–206 (РЖМат, 1979, 11Б849).
55. —, *Operator-valued weights in von Neumann algebras, II*, J. Funct. Anal. **33** (1979), no. 3, 339–361 (РЖМат, 1980, 4Б955).
56. —, Hanche-Olsen H., *Tomita-Takesaki theory for Jordan aigebras*, Odense Univ., Preprint no. 4 (1982), 35 p.
57. Hanche-Olsen H., *A Tomita-Takesaki theory for JBW-algebras*, “Operator Algebras and Appl., Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Kingston, 1980”, Part 2, Providence, 1982, 301–303 (РЖМат, 1983, 7Б753).
58. Hilsum M., *Les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann definies par la derivée spatiale*, J. Funct. Anal. **40** (1981), no. 2, 151–169 (РЖМат, 1981, 9Б750).
59. King W., *Semifinite traces on JBW-algebras*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **93** (1983), no. 3, 503–509 (РЖМат, 1984, 2Б1103).
60. Kosaki H., *Non-commutative Lorentz spaces associated with a von Neumann algebra and applications*, Proc. Jap. Acad. Ser. A **57** (1981), no. 6, 303–306 (РЖМат, 1982, 3Б848).
61. —, *Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: non-commutative L^p-spaces*, J. Funct. Anal. **56** (1984), no. 1, 25–79 (РЖМат, 1984, 8Б1071).
62. Kunze R., *L_p Fourier transforms on locally compact unimodular groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), no. 2, 519–540 (РЖМат, 1960, 4245).
63. Masuda T., *L_p-spaces for von Neumann algebra with reference to a faithful normal semifinite weight*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **19** (1983), no. 2, 673–727 (РЖМат, 1984, 6Б1069).
64. Murray F. J., von Neumann J., *On rings of operators, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 208–248.
65. Nelson E., *Notes on non-commutative integration*, J. Funct. Anal. **15** (1974), no. 1, 103–116 (РЖМат, 1974, 7Б818).
66. Ogasawara T., Yoshinaga K., *A non-commutative theory of integration for operators*, J. Sci. Hiroshima Univ. **18** (1955), no. 3, 311–347 (РЖМат, 1958, 500).
67. Pedersen G. K., Takesaki M., *The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87 (РЖМат, 1974, 7Б818).
68. Petz D., *A dual in von Neumann algebras with weights*, Math. Inst. of the Hung. Acad. sci., Preprint no. 9, Budapest (1983), 14 p.
69. Sankaran S., *The $*$-algebra of unbounded operators*, J. London Math Soc. **34** (1959), no. 3, 337–344 (РЖМат, 1960, 5524).
70. Segal I., *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. **57** (1953), 401–457 (РЖМат, 1954, 1713).
71. Shultz F., *On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces*, J. Funct. Anal. **31** (1979), 360–376 (РЖМат, 1979, 10Б903).
72. Takesaki M., *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lect. Notes Math. **128** (1970) Springer-Verlag, 123 p. (РЖМат, 1970, 11Б653) (Рус. пер.: Математика. Сб. переводов **18** (1974) вып. 3, 83–122; вып. 4, 34–63).
73. —, *Conditional expectations in von Neumann algebras*, J. Funct. anal. **9** (1972), no. 3, 306–321 (РЖМат, 1972, 7Б701).
74. —, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III*, Acta Math. **131** (1973), 249–308.
75. Terp M., *Interpolation spaces between a von Neumann algebra and its predual*, J. Oper. Theory **8** (1982), no. 2, 327–360.
76. Yeadon F., *Non-commutative L^p-spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), no. 1, 91–102 (РЖМат, 1975, 7Б604).

77. —, *Measures on projections in W^*-algebras of type II_1*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), no. 2, 139–145 (РЖМат, 1983, 7Б816).
78. —, *Finitely additive measures on projections in finite W^*-algebras*, Bull. London Math. Soc. **16** (1984), no. 2, 145–150 (РЖМат, 1972, 7Б701).

Примечания

[1] В этом равенстве $\sigma_t(x)$ и x рассматриваются как элементы $\mathfrak{H}$ в смысле вложения $\mathfrak{n}_\varphi \subset \mathfrak{H}$.

[2] Позднее Конн переоткрыл это понятие ([45], определение 1).

[3] Аналогичные результаты для JW-алгебр недавно получены М. С. Матвейчуком [19,20].

XII. ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ ВЕСА НА АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Конструктивн. теория функций и функц. анализ,
Казань, 1985, вып. 5, 80–94

В работе продолжается изучение одного специального класса нормальных весов на алгебрах Неймана, введенного автором в [3] в связи с задачами некоммутативного интегрирования. В схеме интегрирования в духе [2] относительно весов этого класса, названных в [3] локально конечными, удалось получить эффективные теоремы типа Радона–Никодима [3, 5], причем условие локальной конечности оказывается для этого фактически необходимым.

Работа состоит их трех параграфов. В §1 собраны необходимые предварительные сведения. В §2 получен новый критерий локальной конечности точного нормального полуконечного веса в терминах ассоциированной с ним группы модулярных автоморфизмов. В §3 предлагается конструкция, позволяющая описывать с помощью квадратичных форм на линеале фиксированного точного нормального локально конечного веса все нормальные веса на алгебре Неймана, естественно согласованная с теорией некоммутативного пространства L_1 из [2].

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Всюду ниже $\mathcal{M}$ – алгебра Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, $\mathcal{M}_*$ – ее преддвойственное пространство, $\mathcal{M}^+$ (соответственно $\mathcal{M}_*^+$) – конус положительных элементов $\mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{M}_*$). Мы будем придерживаться в дальнейшем терминологии и обозначений работ [1, 2, 8 и 10]. В частности, для веса φ на $\mathcal{M}$ полагаем

$$m_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < \infty\}, \quad n_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < \infty\}, \quad m_\varphi = n_\varphi^* n_\varphi.$$

Для точного нормального полуконечного веса φ через $(\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi)$ обозначается представление $\mathcal{M}$, ассоциированное с φ, $\widehat{\ }): n_\varphi \to \mathfrak{H}_\varphi$ – тождественное вложение. Через $J_\varphi, \Delta_\varphi, \ldots$ обозначены известные объекты теории Томита–Такесаки, ассоцииванные с обобщенной гильбертовой алгеброй $\widehat{n_\varphi^* \cap n_\varphi}$ в $\mathfrak{H}_\varphi$; (σ_t^φ) – группа модулярных автоморфизмов $\mathcal{M}$, связанная с φ. Следуя [2], будем через $L_1(\varphi)$ обозначать банахово пространство интегрируемых относительно φ билинейных форм (б.ф.) на линеале веса

$$D_\varphi = \{f \in H \mid \exists \lambda > 0 : (xf, f) \le \lambda\varphi(x),\ \forall x \in \mathcal{M}^+\},$$

и пусть $\gamma_\varphi: L_1(\varphi) \to \mathcal{M}_*$ – соответствующий канонический изоморфизм.

2. Напомним [2, 5], что нормальный вес φ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ называется *локально конечным*, если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(i) $\forall x \in \mathcal{M}^+\ (\varphi(x) = \infty)\ \exists y \in \mathcal{M}^+ : y \leq x,\ 0 < \varphi(y) < \infty$,

(ii) $\forall x \in \mathcal{M}^+\ \exists (x_i) \in m_\varphi^+ : x_i \nearrow x$,

(iii) $\forall x \in \mathcal{M}^+ : \varphi(x) = \sup\{\varphi(y) \mid y \in m_\varphi^+,\ y \leq x\}$.

3. Замечание. Отметим, что нормальный вес φ на $\mathcal{M}$ локально конечен тогда и только тогда, когда он наследственно полуконечен в следующем смысле: для каждого проектора $p \in \mathcal{M}$ вес φ_p – редукция φ на алгебру $p\mathcal{M}p$ – полуконечен. Действительно, достаточно вспомнить о существовании в $\mathcal{M}$ наибольшего проектора e такого, что вес φ_e полуконечен.

4. Замечание. В классе всех нормальных весов на $\mathcal{M}$ введем следующее отношение порядка: скажем, что ψ продолжает φ (пишем $\varphi \leq \psi$), если $\varphi(x) = \psi(x)$ для каждого $x \in m_\varphi^+$. Очевидно, что каждый нормальный локально конечный вес φ максимален относительно этого порядка, более того, даже наследственно максимален (т. е. для каждого проектора $p \in \mathcal{M}$ вес φ_p максимален). Наоборот, из замечания 3 следует, что каждый наследственно максимальный нормальный вес является локально конечным.

5. Напомним [4, 5], что нормальный вес φ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ называется *регулярным*, если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(i) $\forall \omega \in \mathcal{M}_*^+\ (\omega \neq 0)\ \exists \omega' \in \mathcal{M}_*^+\ (\omega' \neq 0) : \omega' \leq \omega,\ \omega' \leq \varphi$;

(ii) $\forall \omega \in \mathcal{M}_*^+\ \exists (\omega_n) \subset \mathcal{M}_*^+ : \omega = \sum_{n=1}^\infty \omega_n,\ \omega_n \leq \lambda_n \varphi$;

(iii) $\forall \omega \in \mathcal{M}_*^+\ \exists (f_n) \subset D_\varphi : \omega = \sum_{n=1}^\infty ((.)f_n, f_n)$.

§2. МОДУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ВЕСОВ

В этом параграфе φ – точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Обозначим через $D(\sigma_{i/2}^\varphi)$ множество тех операторов $z \in \mathcal{M}$, для которых функция $t \to \sigma_t^\varphi(z)$ $(t \in \mathbb{R})$ продолжается до функции $\alpha \to \sigma_\alpha^\varphi(z) (\in \mathcal{M})$, непрерывной в полосе $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} \alpha \leq 1/2\}$ и аналитической внутри этой полосы.

1. Теорема. *Для точного нормального полуконечного веса φ на $\mathcal{M}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *вес φ локально конечен,*

(ii) *для каждого $x \in \mathcal{M}^+$ найдется $z \in D(\sigma_{i/2}^\varphi)$ такой, что $x = z^* z$.*

Доказательство. (ii) $\Longrightarrow$ (i). Воспользуемся критерием, установленным в работе [3] (теорема 2.3), согласно которому достаточно проверить, что для каждого $x \in \mathcal{M}^+$ найдется такой нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, что

$$\psi(y) = \gamma_\varphi(y)(x) \quad (y \in m_\varphi^+) \tag{1}$$

(см. также [5], теорема 5). Мы проверим, что искомый вес ψ определяется равенством

$$\psi(y)=\varphi(\sigma^{\varphi}_{i/2}(z)y\sigma^{\varphi}_{i/2}(z)^*)\quad (y\in\mathcal{M}^+),\tag{2}$$

где $z\in\sigma^{\varphi}_{i/2}$ таков, что $x=z^*z$. Для этого, во-первых, отметим, что равенство (2), очевидно, задает некоторый нормальный вес на $\mathcal{M}$, так что достаточно установить (1). Пусть $y\in m^+_{\varphi}$. Воспользовавшись выкладками доказательства леммы 7 работы А. Конна [6] и известными соотношениями теории Томита–Такесаки [1], нетрудно показать, что $y^{1/2}\sigma^{\varphi}_{i/2}(z)^*\in n_{\varphi}$, причем $\widehat{y^{1/2}\sigma^{\varphi}_{i/2}(z)^*}=J_{\varphi}\pi_{\varphi}(z)J_{\varphi}\widehat{y^{1/2}}$. В таком случае по определению γ_{φ} [2] имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{\varphi}(y)(z^*z)&=(J_{\varphi}\pi_{\varphi}(z^*z)J_{\varphi}\widehat{y^{1/2}},\widehat{y^{1/2}})=\|\widehat{y^{1/2}\sigma^{\varphi}_{i/2}(z)^*}\|^2\\&=\varphi(\sigma^{\varphi}_{i/2}(z)y\sigma^{\varphi}_{i/2}(z)^*).\end{aligned}\tag{3}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть $x\in\mathcal{M}^+$. Тогда (см. [3], теорема 2.3) существует единственный нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, удовлетворяющий условию (1), причем $\psi\le||x||\varphi$. Пусть e – носитель ψ и ψ_e,φ_e – редукция ψ и φ соответственно на алгебру $e\mathcal{M}e$. Тогда ψ_e и φ_e – точные нормальные полуконечные веса на $e\mathcal{M}e$ (отметим, что полуконечность φ_e есть следствие того, что вес φ, а значит и φ_e, локально конечен). Поскольку $\psi_e\le||x||\varphi_e$, то найдется оператор $b\in e\mathcal{M}e$ такой, что $\psi_e(\cdot)=\varphi_e(b\cdot b^*)$ (см. [6], теорема 1 и замечание 2). Пусть $a=be$, тогда $a\in\mathcal{M}$, и для каждого $y\in\mathcal{M}^+$ имеем

$$\varphi(aya^*)=\varphi_e(b(ey|eH)b^*)=\psi_e(ey|eH)=\psi(y)\le||x||\varphi(y).$$

В таком случае в силу леммы 7 работы [6] функция $t\to\sigma^{\varphi}_t(a)$ продолжается до функции $\alpha\to\sigma^{\varphi}_{\alpha}(a)$ ($\in\mathcal{M}$) непрерывной в полосе $\{\alpha\in\mathbb{C}\mid -1/2\le\operatorname{Im}\alpha\le 0\}$ и аналитической внутри этой полосы. Положим $z=\sigma^{\varphi}_{i/2}(a)$. Нетрудно проверить, что $z\in D(\sigma^{\varphi}_{i/2})$ и $\sigma^{\varphi}_{i/2}(z)=a$. Воспользуемся теперь выкладкой (3), откуда следует, что

$$\gamma_{\varphi}(y)(z^*z)=\varphi(aya^*)=\psi(y)=\gamma_{\varphi}(y)(x)\quad (y\in m^+_{\varphi}).$$

Отсюда следует, что $x=z^*z$ в силу тотальности множества функционалов $\gamma_{\varphi}(m^+_{\varphi})$ в $\mathcal{M}_*$. Теорема доказана.

2. Замечание. Доказанная теорема дает полезный критерий локальной конечности по существу для любых нормальных полуконечных весов, а не только для точных, поскольку в [5] (лемма 3) показано, что для локальной конечности нормального веса достаточна и, очевидно, необходима локальная конечность точного нормального веса, являющегося его редукцией на носитель.

Ниже мы воспользуемся обозначениями, введенными в [3] и [5], где для точного нормального локально конечного веса φ на $\mathcal{M}$ через $\gamma_{\varphi}(x)$ обозначается нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, единственным образом определяемый условием (1) по $x\in\mathcal{M}^+$.

3. Следствие. *При выполнении эквивалентных условий теоремы 1 для каждого $z \in D(\sigma^{\varphi}_{i/2})$ справедливо равенство*

$$\gamma_{\varphi}(z^* z)(x) = \varphi(\sigma^{\varphi}_{i/2}(z) x \sigma^{\varphi}_{i/2}(z)^*) \quad (x \in \mathcal{M}^+). \tag{4}$$

Следующий результат устанавливает связь между производной нормального веса $\psi \leq \varphi$ по φ в смысле [3] и [5] и коциклом Конна $(D\psi : D\varphi)_t$ [6].

4. Следствие. *Пусть φ, ψ – точные нормальные веса на $\mathcal{M}$, причем $\psi \leq \varphi$ и φ локально конечен. Тогда функция $t \to u_t \equiv (D\psi : D\varphi)_t$ продолжается до функции $\alpha \to u_\alpha (\in \mathcal{M})$, непрерывной в полосе $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid -1/2 \leq \operatorname{Im} \alpha \leq 0\}$ и аналитической внутри этой полосы, причем*

$$\psi(x) = \gamma_{\varphi}(u_{-i/2} u^*_{-i/2})(x) \quad (x \in \mathcal{M}^+).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться равенством (4) и учесть, что

$$\psi(x) = \varphi(u^*_{-i/2} x u_{-i/2}) \quad (x \in m^+_{\varphi}).$$

(см. [6], замечание 4).

§3. НОРМАЛЬНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ НА ЛИНЕАЛЕ ВЕСА

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что φ – фиксированный точный нормальный локально конечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H. Здесь будет введено понятие нормальной квадратичной формы, заданной на линеале D_{φ} веса φ, и установлено взаимно однозначное соответствие между такими формами и нормальными весами на $\mathcal{M}$. Это соответствие является естественным продолжением соответствия между б.ф. из $L_1^+(\varphi)$ и положительными нормальными функционалами на $\mathcal{M}$.

Напомним следующее известное

1. Определение. *Квадратичной формой* (к.ф.) на D_{φ} называется отображение $q\colon D_{\varphi} \to [0, +\infty]$ такое, что

(а) $q(\lambda f) = |\lambda|^2 q(f)$ $(\lambda \in \mathbb{C}, f \in D_{\varphi})$, причем $0 \cdot \infty \equiv 0$,
(б) $q(f+g) + q(f-g) = 2(q(f) + q(g))$ $(f, g \in D_{\varphi})$.

Мы будем называть к.ф. q на D_{φ} *нормальной*, если существует такая возрастающая сеть б.ф. $(a_i) \subset L_1^+(\varphi)$, что

$$q(f) = \sup_i a_i(f, f) \quad (f \in D_{\varphi}).$$

Условимся через $Q(\varphi)$ обозначать множество всех нормальных квадратичных форм на D_{φ}. Заметим, что каждая к.ф. $q \in Q(\varphi)$ присоединена к $\mathcal{M}$ в следующем смысле: для каждого унитарного оператора $u \in \mathcal{M}'$ и $f \in D_{\varphi}$ справедливо равенство $q(uf) = q(f)$.

Определим в $Q(\varphi)$ отношение порядка и операции сложения и умножения на неотрицательные скаляры, полагая

(а) $q_1 \leq q_2$, если $q_1(f) \leq q_2(f)$ $(f \in D_{\varphi})$,
(б) $(q_1 + q_2)(f) = q_1(f) + q_2(f)$ $(f \in D_{\varphi})$,
(в) $(\lambda q)(f) = \lambda q(f)$ $(\lambda \geq 0,\ f \in D_{\varphi})$.

Отметим, что каждая возрастающая сеть к.ф. $(q_i) \subset Q(\varphi)$ имеет в $Q(\varphi)$ точную верхнюю грань $q = \sup q_i$, причем

$$q(f) = \sup_i q_i(f) \quad (f \in D_\varphi).$$

2. Примеры. (а) С каждой б.ф. $a \in L_1^+(\varphi)$ связана к.ф. $[a] \in Q(\varphi)$, определяемая равенством $[a](f) = a(f, f)$. Такие к.ф. мы будем называть *интегрируемыми.*

(б) Для каждого $x \in \mathcal{M}^+$ к.ф. $[x]$, заданная на D_φ равенством $[x](f) = (xf, f)$, является нормальной. Действительно, пусть возрастающая сеть $(x_i) \subset m_\varphi^+$ такова, что $x_i \nearrow x$. Тогда все к.ф. $[x_i]$ интегрируемы и $[x](f) = \sup_i [x_i](f)$ $(f \in D_\varphi)$. Очевидно, что формами вида $[x]$ $(x \in \mathcal{M}^+)$ исчерпываются все ограниченные к.ф. из $Q(\varphi)$.

(в) Пусть $\widehat{\mathcal{M}^+}$ – расширенная положительная часть алгебры Неймана $\mathcal{M}$ [9]. Для каждого $m \in \widehat{\mathcal{M}^+}$ определим к.ф. $[m]$ на D_φ, полагая

$$[m](f) = \int_0^\infty \lambda \, d\|e(\lambda)(1-p)f\|^2 + \infty \cdot \|pf\|^2,$$

где $m = \int_0^\infty \lambda \, de(\lambda) + \infty \cdot p$ – спектральное представление m. Тогда $[m] \in Q(\varphi)$, поскольку существует возрастающая сеть $(x_i) \subset \mathcal{M}^+$ такая, что $x_i \nearrow m$ в $\widehat{\mathcal{M}^+}$ (см. [9], следствие 1.6), и, следовательно, $[m](f) = \sup_i [x_i](f)$ $(f \in D_\varphi)$. Из леммы 1.4 [7] (см. также [9], лемма 5) следует, что к.ф. вида $[m]$ $(m \in \widehat{\mathcal{M}^+})$ суть элементы $Q(\varphi)$, полунепрерывные снизу в сильной топологии H.

Перед формулировкой следующей теоремы условимся через x_f обозначать для каждого $f \in D_\varphi$ оператор из m_φ^+, однозначно определяемый условием

$$\gamma_\varphi(x_f)(x) = (xf, f) \quad (x \in \mathcal{M}^+). \tag{5}$$

3. Теорема. *Для каждого нормального веса ψ на $\mathcal{M}$ равенство*

$$[\psi](f) = \psi(x_f) \quad (f \in D_\varphi) \tag{6}$$

определяет к.ф. $[\psi] \in Q(\varphi)$. Наоборот, для каждой к.ф. $q \in Q(\varphi)$ существует, и притом единственный, нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$ такой, что $[\psi] = q$.

Доказательство. Пусть ψ – нормальный вес на $\mathcal{M}$. Тогда найдется возрастающая сеть б.ф. $(a_i) \subset L_1^+(\varphi)$ такая, что

$$\psi(x) = \sup_i \gamma_\varphi(a_i)(x) \quad (x \in \mathcal{M}^+)$$

[2, 8]. В таком случае $[\psi](f) = \sup_i (a_i f, f)$ для каждого $f \in D_\varphi$, поскольку из (5) следует, что

$$a(f, f) = \gamma_\varphi(a)(x_f) \quad (a \in L_1(\varphi), f \in D_\varphi). \tag{7}$$

Таким образом, к.ф. $[\psi] \in Q(\varphi)$.

Наоборот, пусть к.ф. $q \in Q(\varphi)$ и возрастающая сеть б.ф. $(a_i) \subset L_1^+(\varphi)$ такова, что $q = \sup\limits_i [a_i]$ в $Q(\varphi)$. Поскольку сеть $\gamma_\varphi(a_i)$ положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$ возрастает, то равенство

$$\psi(x) = \sup_i \gamma_\varphi(a_i)(x) \quad (x \in \mathcal{M}^+)$$

определяет нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$. Из равенства (7) тогда следует, что $[\psi] = q$. Единственность ψ вытекает из следующей леммы, завершающей доказательство теоремы.

4. Лемма. *Для каждого $x \in \mathcal{M}^+$ существует семейство векторов $(f_i) \subset D_\varphi$ такое, что вес $\gamma_\varphi(x) = \sum\limits_i ((\cdot) f_i, f_i)$ на $\mathcal{M}^+$, при этом $\psi(x) = \sum\limits_i [\psi](f_i)$.*

Доказательство. Существование нужного представления нормального веса $\gamma_\varphi(x)$ следует из неравенства $\gamma_\varphi(x) \leq ||x||\varphi$ [3]. Обозначив для краткости $x_{f_i} \equiv x_i$, имеем $\gamma_\varphi(x) = \sum\limits_i \gamma_\varphi(x_i)$. Тогда, для каждого $y \in n_\varphi$

$$\begin{aligned}(\pi_\varphi(x) J_\varphi \widehat{y}, J_\varphi \widehat{y}) &= \gamma_\varphi(y^* y)(x) = \gamma_\varphi(x)(y^* y) = \sum_i \gamma_\varphi(x_i)(y^* y) \\ &= \sum_i (\pi_\varphi(x_i) J_\varphi \widehat{y}, J_\varphi \widehat{y}).\end{aligned}$$

В силу плотности $J_\varphi(\widehat{n_\varphi})$ в $\mathfrak{H}_\varphi$ отсюда следует, что $\pi_\varphi(x) = \sum\limits_i \pi_\varphi(x_i)$, так что $x = \sum\limits_i x_i$. В таком случае $\psi(x) = \sum\limits_i \psi(x_i) = \sum\limits_i [\psi](f_i)$. Лемма доказана.

5. Следствие. *Отображение $\psi \to [\psi]$ является монотонно аддитивной и положительно однородной биекцией множества всех нормальных весов на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ на $Q(\varphi)$, причем*

(а) $\psi(1) < \infty \iff$ *к.ф. $[\psi]$ интегрируема,*

(б) $\psi \leq \lambda\varphi$ *для некоторого $\lambda > 0 \iff$ к.ф. $[\psi]$ ограничена,*

(в) $\psi = \gamma_\varphi(m)$ *для некоторого $m \in \widehat{\mathcal{M}^+} \iff$ к.ф. $[\psi]$ полунепрерывна снизу.*

При этом $[\gamma_\varphi(a)] = [a]$ $(a \in L_1^+(\varphi))$ и $[\gamma_\varphi(m)] = [m]$ $(m \in \widehat{\mathcal{M}^+})$, где для $m \in \widehat{\mathcal{M}^+}$ нормальный вес $\gamma_\varphi(m)$ определен в [5] *(теорема 5).*

6. Замечание. В работе [7] А. Конн предложил описывать нормальные полуконечные веса ψ на $\mathcal{M}$ с помощью пространственных производных $d\psi/d\varphi'$ относительно фиксированного точного нормального полуконечного веса φ' на коммутанте $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Эти производные являются полунепрерывными снизу плотно определенными квадратичными формами на линеале $D_{\varphi'}$ и, следовательно, определяются положительными самосопряженными операторами. Однако даже для конечных весов ψ соответствующие операторы, вообще говоря, не присоединены к $\mathcal{M}$. В нашем подходе нормальные веса ψ на $\mathcal{M}$ описываются к.ф. $[\psi]$, присоединенными к $\mathcal{M}$, однако не всегда полунепрерывными снизу, т. е. не сводящимися, вообще говоря, к операторам. Более того, из теоремы 6 работы [5] следует, что все к.ф. из $Q(\varphi)$ полунепрерывны снизу тогда и только тогда, когда вес φ регулярен (тогда, в частности, алгебра $\mathcal{M}$ является полуконечной).

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о том, для каких нормальных весов ψ на $\mathcal{M}$ их производные – к.ф. $[\psi]$ – сводятся к операторам. Для этого, во-первых, условимся отождествлять самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$, с соответствующим элементом расширенной положительной части $\widehat{\mathcal{M}^+}$ алгебры $\mathcal{M}$. При этом, как нетрудно проверить, для $f \in D_\varphi$

$$[h](f) = \begin{cases} \|h^{1/2}f\|, & \text{если } f \in D(h^{1/2}) \cap D_\varphi, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим также, что из $h \leq k$ следует $[h] \leq [k]$, и если сеть $h_i \nearrow h$, то сеть к.ф. $[h_i] \nearrow [h]$ (по поводу порядка и сходимости в классе самосопряженных положительных операторов см. [10]).

Следующий результат является очевидным следствием предыдущих рассмотрений и теоремы Радона–Никодима, доказанной Г. Педерсеном и М. Такесаки [10] для σ_t^φ-инвариантных весов на $\mathcal{M}$. Ниже через $\mathcal{M}_\varphi$ обозначена подалгебра $\mathcal{M}$, состоящая из неподвижных точек группы автоморфизмов $(\sigma_t^\varphi)_{t\in\mathbb{R}}$.

7. Предложение (ср. [2], теорема 4). *Для каждого самосопряженного оператора $h \geq 0$, присоединенного к $\mathcal{M}$, к.ф. из $Q(\varphi)$, отвечающая нормальному полуконечному весу $\varphi(h\cdot)$ на $\mathcal{M}$, есть $[h]$. Наоборот, если ψ – нормальный полуконечный, σ_t^φ-инвариантный вес на $\mathcal{M}$, то существует, притом единственный, самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}_\varphi$, такой, что к.ф. $[\psi] = [h]$.*

8. Определение (ср. [4], определение 7 §2). Скажем, что вес φ *почти доминирует* нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, если для каждой последовательности $(x_n) \subset \mathcal{M}$ из условия $\lim\limits_{n,m} \psi((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) = 0$ и $\lim\limits_{n} \varphi(x_n^* x_n) = 0$ всякий раз следует, что $\lim\limits_{n} \psi(x_n^* x_n) = 0$.

9. Теорема (ср. [4], теорема 9 §2). *Пусть ψ – нормальный локально конечный вес на $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$, такой, что к.ф. $[\psi] = [h]$;*

(ii) *существует возрастающая последовательность $(x_n) \subset \mathcal{M}^+$ такая, что вес $\psi(\cdot) = \sup\limits_n \gamma_\varphi(x_n)(\cdot)$;*

(iii) *существует семейство $(f_i) \subset D_\varphi$ такое, что вес $\psi = \sum((\cdot)f_i, f_i)$ на $\mathcal{M}^+$;*

(iv) *к.ф. $[\psi]$ полунепрерывна снизу;*

(v) *к.ф. $[\psi]$ замыкаема (т. е. для каждой последовательности $(f_n) \subset D_\varphi$ из условия $\lim\limits_{m,n}[\psi](f_n - f_m) = 0$ и $\lim\limits_n \|f_n\| = 0$ всякий раз следует, что $\lim\limits_n[\psi](f_n) = 0$);*

(vi) *вес φ почти доминирует вес ψ.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

10. Лемма. *Для каждого нормального локально конечного веса ψ на $\mathcal{M}$ линеал*

$$D([\psi]) = \{f \in D_\varphi \mid [\psi](f) < \infty\}$$

плотен в гильбертовом пространстве H.

Доказательство. Поскольку к.ф. $[\psi]$ присоединена к $\mathcal{M}$, то линеал $D([\psi])$ инвариантен относительно $\mathcal{M}'$ и, следовательно, нам достаточно проверить, что $D([\psi])$ – разделяющее множество векторов для $\mathcal{M}$. С этой целью предположим, что оператор $x \in \mathcal{M}$ обращается в нуль на $D([\psi])$, и проверим, что $x = 0$. Поскольку D_φ плотно в H [2], то достаточно показать, что x обращается в нуль на D_φ, что мы сейчас и сделаем. Пусть $f \in D_\varphi$. Заметим, что $\gamma_\varphi(x^*x)(y) = 0$ для каждого $y \in m_\varphi^+$ такого, что $y \le x_f$. Действительно, нормальный вес $\gamma_\varphi(y)$ на $\mathcal{M}$ можно записать в виде $\gamma_\varphi(y) = \sum\limits_i((\cdot)f_i, f_i)$, где $(f_i) \subset D_\varphi$. Отметим, что все $f_i \in D([\psi])$, поскольку по лемме 4

$$[\psi](f_i) \le \sum_i [\psi](f_i) = \psi(y) < \infty.$$

Следовательно,

$$\gamma_\varphi(x^*x)(y) = \gamma_\varphi(y)(x^*x) = \sum_i |x_{f_i}|^2 = 0.$$

Выберем теперь возрастающую сеть $(y_i) \subset m_\varphi^+$ такую, что $y_i \nearrow x_f$. В таком случае $\gamma_\varphi(x^*x)(y_i) \equiv 0$ и, следовательно,

$$|x_f|^2 = \gamma_\varphi(x_f)(x^*x) = \gamma_\varphi(x^*x)(x_f) = \sup_i \gamma_\varphi(x^*x)(y) = 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 9.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). По спектральной теореме найдется возрастающая последовательность операторов $(x_n) \subset \mathcal{M}^+$ такая, что $[h](f) = \sup\limits_n (x_n f, f)$ для всех $f \in D_\varphi$. Тогда по следствию 5 вес $\psi(\cdot) = \sup\limits_n \gamma_\varphi(x_n)(\cdot)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Полагая $y_1 = x_1$, $y_n = x_n - x_{n-1}$ $(n = 2, 3, \dots)$, имеем $\psi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_\varphi(y_n)$. Заметим теперь, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ нормальный вес $\gamma_\varphi(y_n)$ допускает представление $\gamma_\varphi(y_n) = \sum\limits_i((\cdot)f_i^{(n)}, f_i^{(n)})$, где $(f_i^{(n)}) \subset D_\varphi$, поскольку $\gamma_\varphi(y_n) \le \|y_n\|\varphi$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Обозначив для краткости $x_{f_i} = x_i$, имеем для каждого $f \in D_\varphi$

$$[\psi](f) = \psi(x_f) = \sum_i (x_f f_i, f_i) = \sum_i \gamma_\varphi(x_i)(x_f) = \sum_i \gamma_\varphi(x_f)(x_i) = \sum_i [x_i](f).$$

Отсюда следует, что к.ф. $[\psi]$ полунепрерывна снизу как сумма непрерывных к.ф. $[x_i]$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v). По поводу этой импликации см., например, [7], лемма 5.

(v) $\Longrightarrow$ (i). Поскольку $D([\psi])$ плотно в H и к.ф. $[\psi]$ замыкаема на $D([\psi])$, то в силу хорошо известного результата о связи замыкаемых форм и операторов существует, притом единственный, самосопряженный оператор $h \geq 0$ в H такой, что $D([\psi])$ – существенная область определения оператора $h^{1/2}$ и $[\psi](f) = ||h^{1/2}f||^2$ для всех $f \in D([\psi])$. Поскольку к.ф. $[\psi]$ присоединена к $\mathcal{M}$, то из единственности такого оператора h легко вывести, что он присоединен к $\mathcal{M}$. Для проверки равенства $[\psi] = [h]$ в силу следствия 5 достаточно убедиться в том, что $\psi = \gamma_\varphi([h])$, а для этого в силу локальной конечности ψ нужно лишь проверить, что нормальные веса ψ и $\gamma_\varphi([h])$ совпадают на m_ψ^+. Для проверки последнего утверждения предположим, что $y \in m_\psi^+$. Тогда из рассуждений, проводившихся при доказательстве леммы 10, следует, что вес $\gamma_\varphi(y)$ допускает представление $\gamma_\varphi(y) = \sum\limits_i((\cdot)f_i, f_i)$, где $(f_i) \subset D_\varphi$. В таком случае по лемме 4

$$\psi(y) = \sum_i [\psi](f_i) = \sum_i [h](f_i) = \gamma_\varphi([h])(y).$$

Доказательство эквивалентности условий (v) и (vi) почти дословно повторяет доказательство эквивалентности условий (i) и (vi) в теореме 9 из §2 работы [4].

Теорема доказана.

11. Замечание. . Оператор h определяется условием (i) теоремы 9, вообще говоря, не единственным образом даже для конечных φ и ψ (см. [2], замечание на с. 88). Однако, как следует из доказательства импликации (v) $\Longrightarrow$ (i) этой теоремы, среди таких h существует единственный с условием, что $D([\psi])$ есть существенная область определения оператора $h^{1/2}$.

Результат теоремы 9 можно несколько усилить, если потребовать регулярность φ (что, в частности, влечет полуконечность алгебры $\mathcal{M}$ в силу теоремы 2 работы [5]). Отметим, что, как показано в [4], это равносильно выполнению эквивалентных условий (i) – (vi) теоремы 9 для всех конечных нормальных весов ψ на $\mathcal{M}$.

12. Предложение. *Пусть нормальный локально конечный вес φ регулярен и ψ – нормальный вес на $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *линеал $D([\psi])$ плотен в H,*

(ii) *существует самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$, такой, что к.ф. $[\psi] = [h]$.*

При выполнении этих условий такой оператор h единственен.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Согласно [5] (теорема 6) найдется $m \in \widehat{\mathcal{M}^+}$ с условием $\psi = \gamma_\varphi(m)$. Если $m = \int_0^\infty \lambda\, de(\lambda) + \infty \cdot p$ – спектральное представление m [9], то в силу плотности $D([\psi])$ проектор $p = 0$, и остается заметить, что к.ф. $[\psi] = [m]$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Поскольку линеал $D([\psi]) = D_\varphi \cap D(h^{1/2})$ инвариантен относительно $\mathcal{M}'$, то достаточно проверить, что $D([\psi])$ – разделяющее множество векторов для $\mathcal{M}$. С этой целью предположим, что оператор $x \in \mathcal{M}$ обращается в нуль на $D([\psi])$, и проверим, что $x = 0$. Поскольку $D(h^{1/2})$ плотно в H, то достаточно показать, что x обращается в нуль на $D(h^{1/2})$, что мы сейчас и сделаем. Пусть $f \in D(h^{1/2})$. Найдется последовательность $(f_i) \subset D_\varphi$ такая, что функционал $((\cdot)f, f) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i, f_i)$ на $\mathcal{M}$. Пусть $h = \int_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ – спектральное представление h и $h_n = \int_0^n \lambda\, de(\lambda)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда

$$\sup_n (h_n f_i, f_i) \le \sup_n (h_n f, f) = ||h^{1/2} f||^2 < \infty \quad (i = 1, 2, \dots),$$

откуда следует, что все $f_i \in D(h^{1/2})$. В таком случае

$$\|xf\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|xf_i\|^2 = 0,$$

откуда, в силу произвольности $f \in D(h^{1/2})$, оператор $x = 0$. Доказательство единственности оператора h почти дословно повторяет соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 6 из §7 работы [4]. Теорема доказана.

13. Следствие. *Пусть φ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$ удовлетворяет эквивалентным условиям* (i) *и* (ii) *предложения 12 тогда и только тогда, когда он полуконечен, при этом $\psi = \varphi(h\cdot)$.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 7, учитывая, что вес φ локально конечен и регулярен, причем $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{M}$.

Литература

1. Такесаки М., *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения*, Математика (сб. переводов) **18** (1974), 3, 84–120.
2. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса. I*, Изв. вузов. Матем. (1978), 7, 79–88.
3. Трунов Н. В., *Локально конечные веса на алгебрах Неймана*, Казан. ун-т, Казань, 1978, 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101-79 Деп.)
4. Трунов Н. В., *Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса*, Конструкт. теория функций и функц. анализ, вып. 3, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1981, с. 73–87
5. Трунов Н. В., *К теории нормальных весов на алгебрах Неймана*, Изв. вузов. Матем. (1982), 8, 61–70.
6. Connes A., *Sur le theorem de Radon-Nikodym pour les poids normaux fideles semifines*, Bull. Sc. Math. **93** (1973), 253–258.
7. Connes A., *On the spatial theory of von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **35** (1980), no. 2, 153–164.
8. Haagerup V., *Normal weights on W^* algebras*, J. Funct. Anal. **19** (1975), no. 3, 302–317.
9. Haagerup V., *Operator-valued weights in von Neumann algebras. I*, J. Funct. Anal. **32** (1979), no. 2, 175–206.
10. Pedersen G. K., Takesaki M., *The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras.*, Acta Math. **130** (1979), no. 1–2, 53–87.

XIII. ОБ УСЛОВНЫХ ОЖИДАНИЯХ В АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА

(В соавторстве с А. Н. Шерстневым)
Констр. теория функций и функц. анализ,
Казань, 1985, вып. 5, 94–111

Заметка непосредственно примыкает к работам авторов [2] и [3]. В ней продолжается исследование одного обобщения понятия условного ожидания в алгербах Неймана, введённого в этих работах в связи с теорией некоммутативного пространства L_1.

§**1.** Мы начнём со случая состояния. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана в гильбертовом пространстве H, φ — точное нормальное состояние на $\mathcal{M}$. В терминологии и обозначениях, касающихся теории пространства $L_1(\varphi)$ интегрируемых билинейных форм (б.ф.) на линеале состояния

$$D_\varphi = \{f \in H \mid \exists\lambda > 0\colon \langle xf, f\rangle \leq \varphi(x), \forall x \in \mathcal{M}^+\},$$

мы будем придерживаться работ [2] и [3]. В частности, условимся не различать оператор $x \in \mathcal{M}$ и порождённую им интегрируемую б.ф. $\langle x(\cdot), \cdot\rangle$ на D_φ. Пусть $\mathcal{N}$ — подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$, $\varphi_0 = \varphi \,|\, \mathcal{N}$ — ограничение φ на $\mathcal{N}$, $\gamma\colon L_1(\varphi) \to \mathcal{M}_*$ и $\gamma_0\colon L_1(\varphi_0) \to \mathcal{N}_*$ — канонические изоморфизмы.

Напомним следующий результат (см. [2], предложение 6) , являящийся простым следствием теории пространства $L_1(\varphi)$. При данных предположениях существует и однозначно определено условием

$$\gamma(a)(x) = \gamma_0(Ea)(x) \quad (x \in \mathcal{N},\ a \in L_1(\varphi)) \tag{1}$$

отображение $E\colon L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$, обладающее следующими свойствами:

E1. E — линейная сюрьекция,
E2. E положительно и точно,
E3. $\|E\| = 1$,
E4. $\varphi_0(Ea) = \varphi(a)$ $\ (a \in L_1(\varphi))$,
E5. Если $a_n \nearrow a$ в $L_1(\varphi)^+$, то $Ea_n \nearrow Ea$.

(Здесь символ $a_n \nearrow a$ означает, что последовательность a_n не убывает и $\sup\limits_n a_n = a \in L_1(\varphi)^+$ в смысле порядка, задаваемого конусом $L_1(\varphi)^+$.)

Основной результат работы [2] (теорема 11) утверждает, что дополнительное требование

$$Ex = x \qquad (x \in \mathcal{N}) \tag{2}$$

(аналог идемпотентности E) эквивалентно существованию обычного (ограниченного) условного ожидания $\varepsilon\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ относительно φ в смысле [1] и [6], причём ограничение E на $\mathcal{M}$ совпадает с ε.

С целью обобщения понятия условного ожидания в алгебрах Неймана займёмся изучением ограничения $\mathcal{E} = E \,|\, \mathcal{M}$ отображения E, определённого условием (1), на алгебру $\mathcal{M}$. Отметим, что в классической (коммутативной) теории вероятностей условное ожидание в L_∞ вводится, как правило, именно таким способом.

Теорема 1. *Отображение $\mathcal{E} = E \,|\, \mathcal{M}$ действует из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ и обладает следующими свойствами:*

$\mathcal{E}1$. *$\mathcal{E}$ — линейное отображение, $\mathcal{E}(1) = 1$,*

$\mathcal{E}2$. *$\mathcal{E}$ положительно и точно,*

$\mathcal{E}3$. *$\|\mathcal{E}\| = 1$, т. е. $\|\mathcal{E}x\| \le \|x\|$ $(x \in \mathcal{M})$,*

$\mathcal{E}4$. *$\varphi_0(\mathcal{E}x) = \varphi(x)$ $(x \in \mathcal{M})$,*

$\mathcal{E}5$. *$\mathcal{E}$ ультраслабо непрерывно,*

$\mathcal{E}6$. *$\gamma(\mathcal{E}x)(y) = \gamma(x)(\mathcal{E}y)$ $(x, y \in \mathcal{M})$.*

Доказательство. Для проверки включения $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$ достаточно установить, что $\mathcal{E}x \in \mathcal{N}$ для каждого $x \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$. С этой целью определим вещественный линейный функционал ω на плотном в $\mathcal{N}_*^{\mathrm{sa}}$ линеале $\gamma_0(\mathcal{N}^{\mathrm{sa}})$, полагая $\omega(\gamma_0(y)) = \gamma_0(\mathcal{E}x)(y)$ $(y \in \mathcal{N}^{\mathrm{sa}})$. Тогда

$$\begin{aligned}|\omega(\gamma_0(y))| &= |\gamma_0(\mathcal{E}x)(y)| = |\gamma(x)(y)| = |\gamma(y)(x)| \le \|\gamma(y)\|\,\|x\| = \|y\|_\varphi \|x\| \\ &\le \|y\|_{\varphi_0}\|x\| = \|\gamma_0(y)\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

В этой выкладке мы воспользовались тем, что

$$\|\gamma(z)\| = \|z\|_\varphi \equiv \inf\{\varphi(z_1 + z_2)\colon z = z_1 - z_2,\ z_1, z_2 \in \mathcal{M}^+\} \quad (z \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}})$$

(см. [2]). В таком случае найдётся $x_0 \in \mathcal{N}^{\mathrm{sa}}$ такой, что $\omega(\gamma_0(y)) = \gamma_0(y)(x_0)$ для всех $y \in \mathcal{N}^{\mathrm{sa}}$. Сравнивая с (1), имеем $\mathcal{E}x = x_0 \in \mathcal{N}^{\mathrm{sa}}$.

Пусть далее $(\pi, \mathfrak{H})$ — представление $\mathcal{M}$, ассоциированное с $\varphi, \widehat{\ }\colon \mathcal{M} \to \mathfrak{H}$ — тождественное вложение $\mathcal{M}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, являющееся пополнением $\widehat{\mathcal{M}}$ относительно скалярного произведения $\langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle = \varphi(y^* x)$, J — каноническая инволюция теории Томита-Такесаки в $\mathfrak{H}$ (напомним , что $J\pi(\mathcal{M})J = \pi(\mathcal{M})'$). Условимся нулевым индексом отмечать соответствующие объекты, связанные с $\mathcal{N}$ и φ_0: $\pi_0, \mathfrak{H}_0, J_0$ и т. д. Пусть p — ортогональный проектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_0 = \widehat{\mathcal{N}}$. Следующая выкладка справедлива для каждых $x \in \mathcal{M}$, $y, z \in \mathcal{N}$ в силу определения γ [2, 3]:

$$\langle J\pi(x)^* J\widehat{z}, \widehat{y} \rangle = \gamma(x)(y^* z) = \gamma_0(\mathcal{E}x)(y^* z) = \langle J_0\pi_0(\mathcal{E}x)^* J_0\widehat{z}, \widehat{y} \rangle.$$

Отсюда следует, что ограничение на $\mathfrak{H}_0$

$$(pJ\pi(x)J)|\mathfrak{H}_0 = J_0\pi_0(\mathcal{E}x)J_0,$$

так что явное выражение $\mathcal{E}$ задаётся формулой

$$\mathcal{E}x = \pi_0^{-1}(J_0(pJ\pi(x)J|\mathfrak{H}_0)J_0) \quad (x \in \mathcal{M}). \tag{3}$$

Свойства $\mathcal{E}1$, $\mathcal{E}2$, $\mathcal{E}4$ непосредственно следуют из E1, E2 и E4 соответственно, с учётом того, что $\gamma(1) = \varphi$, $\gamma_0(1) = \varphi_0$; $\mathcal{E}3$ есть прямое следствие представления (3); $\mathcal{E}6$ следует из симметричности формы $\gamma(\cdot)(\cdot)$ на $\mathcal{M}$. Для проверки $\mathcal{E}5$ покажем сначала, что $\mathcal{E}$ нормально, т. е. из $x_i \nearrow x$ $(x_i, x \in \mathcal{M}^+)$ следует, что $\mathcal{E}x_i \nearrow \mathcal{E}x$. Действительно, в силу положительности $\mathcal{E}$ сеть $\mathcal{E}x_i$ возрастает и ограничена сверху оператором $\mathcal{E}x \in \mathcal{N}^+$. Полагая $x_0 = \sup \mathcal{E}x_i$, имеем

$$\begin{aligned}\gamma(x)(y) = \gamma(y)(x) &= \sup_i \gamma(y)(x_i) = \sup_i \gamma_0(\mathcal{E}x_i)(y) = \sup_i \gamma_0(y)(\mathcal{E}x_i) \\ &= \gamma_0(y)(x_0) = \gamma_0(x_0)(y) \quad (y \in \mathcal{N}^+),\end{aligned}$$

откуда $x_0 = \mathcal{E}x$. Заметим теперь, что в силу нормальности $\mathcal{E}$ для каждого $\rho \in \mathcal{M}_*^+$ функционал $\rho(\mathcal{E}\cdot)$ на $\mathcal{M}$ положителен и нормален, а это немедленно влечёт $\mathcal{E}5$. Теорема доказана.

Замечание 1. Заметим, что доказательство включения $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$ фактически уже содержится в [2] (см. доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в теореме 11 указанной работы). Интересно отметить, что в работе Л. Аккарди и К. Чеккини [4], где также рассматривалась задача обобщения понятия условного ожидания в алгебрах Неймана, соответствующее понятие вводится из достаточно отдалённой аналогии с классической ситуацией. Однако сравнение формул (3.18) и (3.20) работы [4] и нашего равенства (3) показывает, что отображение $\mathcal{E} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и есть φ-условное ожидание в смысле [4]. Отметим, в частности, что $\mathcal{E}$ вполне положительно (это сразу следует, например, из (3)).

Замечание 2. При подготовке рукописи к печати авторам стала известна работа Л. Аккарди и К. Чеккини [5], где получены близкие к нашим результаты. Отметим, что в [5] используется вложение $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}_*$, которое в наших обозначениях есть $x \to \overline{\gamma(x^*)}$.

§**2.** Переходя к случаю веса, будем придерживаться обозначений и терминологии [3]. Пусть $\mathcal{N}$ — подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$, φ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ такой, что вес $\varphi_0 = \varphi|\mathcal{N}$ полуконечен, $\mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \colon \varphi(x) < \infty\}$, $\mathfrak{m}_\varphi$ — линейная оболочка $\mathfrak{m}_\varphi^+$; $\mathfrak{m}_{\varphi_0}^+$ и $\mathfrak{m}_{\varphi_0}$ — соответствующие объекты для φ_0. Через $E\colon L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$ обозначим, как и в §1, отображение, однозначно определяемое условием (1). В работе [3] (предложение 4) показано, что отображение E удовлетворяет условиям E1–E4 и в этом случае. Однако, поскольку в данном случае алгебра $\mathcal{M}$ уже не обязана входить целиком в $L_1(\varphi)$, то для определения отображения $\mathcal{E}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ мы воспользуемся приёмом, применявшимся при доказательстве теоремы 1.

Теорема 2. *Существует и однозначно определено условием*

$$\gamma(y)(x) = \gamma_0(y)(\mathcal{E}x) \qquad (y \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}^+) \tag{4}$$

отображение $\mathcal{E}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, *обладающее следующими свойствами:*

$\mathcal{E}1$. $\mathcal{E}$ *— линейное отображение,* $\mathcal{E}(1) = 1$,

$\mathcal{E}2$. $\mathcal{E}$ *положительно и точно,*

$\mathcal{E}3$. $\|\mathcal{E}\| = 1$, *т. е.* $\|\mathcal{E}x\| \le \|x\|$ $(x \in \mathcal{M})$,

$\mathcal{E}4$. $\varphi_0(\mathcal{E}x) = \varphi(x) \quad (x \in \mathfrak{m}_\varphi^+)$,
$\mathcal{E}5$. *$\mathcal{E}$ ультраслабо непрерывно,*
$\mathcal{E}6$. $\gamma(\mathcal{E}x)(y) = \gamma(x)(\mathcal{E}y) \quad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi)$,
$\mathcal{E}7$. $\mathcal{E}x = Ex \quad (x \in \mathfrak{m}_\varphi)$.

Доказательство с очевидными изменениями, касающимися использования $\mathfrak{m}_\varphi$ и $\mathfrak{m}_{\varphi_0}$ вместо $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, дословно повторяет доказательство теоремы 1. При этом явное выражение (3) для $\mathcal{E}$ остаётся, очевидно, верным и в данном случае.

Замечание 3. (ср. [3], замечание на с. 89). Пусть $\mathcal{N}_1$ — ещё одна подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$ такая, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{M}$, и пусть вес $\varphi_1 = \varphi|\mathcal{N}_1$ полуконечен. Для отображений $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, определённых в теореме 2, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\mathcal{E}"] \arrow[d, "\mathcal{E}_1"'] & \mathcal{N} \\ \mathcal{N}_1 \arrow[ur, "\mathcal{E}_2"'] & \end{tikzcd}$$

Это свойство транзитивности непосредственно следует из определения отображения $\mathcal{E}$.

Замечание 4. Отображение $\mathcal{E}$, построенное в теореме 2, совпадает с φ-условным ожиданием в смысле [4] (теорема 7.5) и, в частности, вполне положительно. Отметим, что переход от состояния к весу в [4] сводится к использованию явного соотношения типа (3), причём лишь для $x \in \mathfrak{m}_\varphi$, с последующим продолжением по непрерывности на все $x \in \mathcal{M}$. Таким образом, теорема 2 в связи с результатами [3] даёт некоторую дополнительную информацию о φ-условных ожиданиях по сравнению с [4].

§**3.** В качестве приложения теоремы 2 мы предложим новые доказательства теоремы 5 из [4] о связи между отображением E и ограниченным условным ожиданием, а также критерием М. Такесаки [6] существования ограниченного условного ожидания в терминах модулярной группы, ассоциированной с весом. Сохраняя обозначения §2, будем через $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (соответственно $(\sigma_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$) обозначать группу модулярных автоморфизмов $\mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{N}$), ассоциированную с φ (соответственно φ_0).

Напомним, что ограниченным условным ожиданием относительно веса φ называется отображение $\varepsilon\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ (необходимо единственное, см. [3]) такое, что

$\varepsilon 1$. ε — линейная сюръекция, $\varepsilon 1 = 1$,
$\varepsilon 2$. ε положительно и точно,
$\varepsilon 3$. $\|\varepsilon\| = 1$,
$\varepsilon 4$. $\varphi_0(\varepsilon(x)) = \varphi(x) \quad (x \in \mathfrak{m}_\varphi^+)$,
$\varepsilon 5$. ε ультраслабо непрерывно.

Теорема 3 ([3], теорема 5; [6]). *Пусть $\mathcal{N}$ — подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$, φ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ и вес $\varphi_0 = \varphi\,|\,\mathcal{N}$ полуконечен. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(i) $Ex = x \quad (x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0})$,
(ii) $\mathcal{E}x = x \ (x \in \mathcal{N})$,
(iii) *существует ограниченное условное ожидание* $\varepsilon\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *относительно* φ,
(iv) *подалгебра* $\mathcal{N}$ *инвариантна относительно* $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

При выполнении этих условий отображение $\mathcal{E}$ — ограниченное условное ожидание относительно φ.

Доказательство. Эквивалентность условий (i) и (ii) следует из $\mathcal{E}5$, $\mathcal{E}7$ и ультраслабой плотности $\mathfrak{m}_{\varphi_0}$ в $\mathcal{N}$.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна в силу теоремы 2.

Несложная проверка импликации (iii) $\Rightarrow$ (iv) фактически содержится в [3, с. 92–93]. Действительно, пусть S (соответственно S_0) — замыкание антилинейного отображения $x \to \widehat{x^*}$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$ в $\mathfrak{H}$ (соответственно отображения $x \to \widehat{x^*}$ $(x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0})$ в $\mathfrak{H}_0$) и $S = J\Delta^{1/2}$, $S_0 = J_0\Delta_0^{1/2}$ — их полярные разложения. Тогда, как показано в [3] (равенство (12)), $p\widehat{x} = \widehat{\varepsilon(x)}$ для каждого $x \in \mathfrak{m}_\varphi$ (напомним, что p — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{H}_0$). Поскольку $\varepsilon(x^*) = \varepsilon(x)^*$ $(x \in \mathcal{M})$, то $S_0 = S|\mathfrak{H}_0$, так что p коммутирует с Δ и $\Delta p = \Delta_0 p$. Остаётся воспользоваться известными соотношениями теории Томита-Такесаки:

$$\widehat{\sigma_t(x)} = \Delta^{\mathrm{i}\,t}\widehat{x} \ (x \in \mathfrak{m}_\varphi), \quad \widehat{\sigma_t^0(x)} = \Delta_0^{\mathrm{i}\,t}\widehat{x} \ (x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0},\ t \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Наконец, для проверки импликации (iv) $\Rightarrow$ (i) заметим, что в силу единственности однопараметрической ультраслабо непрерывной группы автоморфизмов алгебры Неймана $\mathcal{N}$, удовлетворяющей условию К.М.Ш. относительно точного нормального полуконечного веса φ_0, справедливо равенство $\sigma_t\,|\,\mathcal{N} = \sigma_t^0$ $(t \in \mathbb{R})$. Тогда из (5) следует, что Δ коммутирует с p и $\Delta p = \Delta_0 p$. В таком случае из (3) следует, что для любых $x, y \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}$:

$$\pi_0(y)\Delta_0^{1/2}(\widehat{\mathcal{E}x}) = J_0\pi_0(\mathcal{E}x)^* J_0\widehat{y} = J\pi(x)^* J\widehat{y} = \pi(y)\Delta^{1/2}\widehat{x} = \pi_0(y)\Delta_0^{1/2}\widehat{x}.$$

Устремляя в этом равенстве сеть $y \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}$ ультрасильно к 1, получим $\Delta_0^{1/2}(\widehat{\mathcal{E}x}) = \Delta_0^{1/2}\widehat{x}$, откуда $\widehat{\mathcal{E}x} = \widehat{x}$ в силу несингулярности $\Delta_0^{1/2}$, т. е. $\mathcal{E}x = x$ $(x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0})$. Остаётся учесть условие $\mathcal{E}7$. Теорема доказана.

Литература

[1] Голодец В. Я., *Условные ожидания и модулярные автоморфизмы неймановских алгебр*, Функц. анализ и его прилож. **6** (1972), вып. 3, 68–69.

[2] Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *Условные ожидания в одной схеме некоммутативной теории вероятностей*, Trans. VIII Prague Conf.on Inform. Theory, Stat. Decis. Funct. Random Proc., vol. B, Prague, 1978, 287–299.

[3] Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I–II.*, Изв. вузов. Математика (1978), I: 7, 79–88; II: 12, 88–99.

[4] Accardi L., Cecchini C., *Conditional expectations in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki*, J. Funct. Anal. **45** (1982), no. 2, 245–273.

[5] Accardi L., Cecchini C., *Surjectivity of the conditional expectations on the L^1-spaces*, Publ. Ist. math. Univ. Genova (1982), no. 413, 7 p.

[6] Takesaki M., *Conditional expectations in von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **9** (1972), no. 3, 306–321.

XIV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА НА JBW-АЛГЕБРАХ

Функц. анализ и его прил.,
1985, т. 19, вып. 3, 77–78

В заметке описывается конструкция интегрирования относительно нормального веса на JBW-алгебре, переносящая на неассоциативную ситуацию схему интегрирования в алгебрах Неймана [1, 2].

1. Пусть A – JBW-алгебра [3, 4], A_* – ее предсопряженное пространство, A^+ и A_*^+ – соответствующие конусы неотрицательных элементов. *Весом* на JBW-алгебре A называется отображение $\varphi\colon A^+ \to [0, +\infty]$ такое, что

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \quad (x, y \in A^+,\ \lambda \geq 0;\ 0 \cdot (+\infty) \equiv 0).$$

В дальнейшем той же буквой φ будем обозначать и соответствующий весу линейный функционал на $\mathfrak{m}_\varphi \equiv \operatorname{lin}\{x \in A^+ \mid \varphi(x) < +\infty\}$. Вес φ называется *нормальным*, если из $x_i \nearrow x$ $(x_i, x \in A^+)$ следует, что $\varphi(x_i) \nearrow \varphi(x)$; *полуконечным*, если $\mathfrak{m}_\varphi$ слабо плотно в A; *точным*, если из $\varphi(x^2) = 0$ $(x \in A)$ следует, что $x = 0$.

Отправной точкой конструкции является следующий результат, переносящий на йорданов случай и усиливающий теорему 2.1 [5].

Теорема 1. *Пусть φ – нормальный полуконечный вес на A. Существует, и притом единственное, отображение $\gamma\colon \mathfrak{m}_\varphi \to A_*$, удовлетворяющее условиям:*

(γ1) $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$;
(γ2) $\gamma(m_\varphi^+) = \{\rho \in A_*^+ \mid \exists\lambda \geq 0\ (\rho \leq \lambda\varphi)\}$;
(γ3) $\{x, y\} \to \gamma(x)(y)$ – *симметрическая положительная билинейная форма на* $\mathfrak{m}_\varphi$.

При этом отображение γ линейно, и справедливы соотношения:

(γ4) $\|\gamma(x)\| = \|x\|_\varphi \equiv \inf\{\varphi(x_1 + x_2) \mid x = x_1 - x_2,\ x_i \in \mathfrak{m}_\varphi^+\}$ $\quad(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$;
(γ5) $\gamma(x)(x) \leq \varphi(x^2)$ $\quad(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$.

В частности, если $\varphi = \tau(h^2 \circ (\cdot))$, где τ – точный нормальный конечный след на A [6] и $h \in A^+$, то $\gamma(x)(y) = \tau(U_h x \circ y)$ и $\|x\|_\varphi = \tau(|U_h x|)$ $(x, y \in A)$ (здесь $U_h x \equiv 2h \circ (h \circ x) - h^2 \circ x$).

2. Пусть φ – точный нормальный полуконечный вес на A. Из теоремы 1 следует, что $\|\cdot\|_\varphi$ – норма на $\mathfrak{m}_\varphi$ и отображение γ продолжается до изометрического изоморфизма пополнения $\mathfrak{m}_\varphi$ по этой норме на A_* (ср. [1, 2]).

Положим $\mathfrak{n}_\varphi \equiv \{x \in A \mid \varphi(x^2) < +\infty\}$ и пусть H_φ – вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathfrak{n}_\varphi$ по скалярному произведению $(\hat{x}, \hat{y})_\# \equiv \varphi(x \circ y)$, где $\hat{}\,)\colon \mathfrak{n}_\varphi \to H_\varphi$ – тождественное вложение.

Тогда отображение $\{x, y\} \to \gamma(x \circ y)$ продолжается до A_*-значного "скалярного произведения" на H_φ, т. е. существует единственное билинейное отображение ${}^{\circ})\colon H_\varphi \times H_\varphi \to A_*$ такое, что

(i) $\xi \circ \xi \in A_*^+, \quad \xi \circ \xi = 0 \implies \xi = 0 \quad (\xi \in H_\varphi)$;

(ii) $|(\xi, \eta)_\#| \le \|\xi \circ \eta\| \le \|\xi\|_\# \cdot \|\eta\|_\# \quad (\xi, \eta \in H_\varphi)$;

(iii) $\hat{x} \circ \hat{y} = \gamma(x \circ y) \quad (x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$.

При этом оказывается, что $A_* = \{\xi \circ \eta \mid \xi, \eta \in H_\varphi\}$.

Отметим, что если $\varphi(1) < +\infty$, то $\gamma(\cdot)(\cdot)$ – автополярная форма на A в смысле [7], с помощью которой в [7] предложен аналог модулярной группы теории Томита–Такесаки для состояния на JBW-алгебре. Следующий результат обобщает эту конструкцию на случай веса. Предварительно условимся, следуя [7], называть косинус-семейством на A семейство $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$, линейных отображений A в себя, удовлетворяющее функциональному уравнению косинуса: $2\theta_t\theta_s = \theta_{s+t} + \theta_{s-t}$, $\theta_0 = 1$.

Теорема 2. *Существует, и притом единственное, косинус-семейство $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ положительных, сохраняющих 1, линейных отображений A в себя такое, что*

(i) *отображение $t \to \theta_t(x)$ слабо непрерывно для всех $x \in A$,*

(ii) $\varphi(\theta_t \cdot) = \varphi(\cdot), \quad \varphi(\theta_t(x) \circ y) = \varphi(x \circ \theta_t(y)) \quad (x, y \in \mathfrak{n}_\varphi, t \in \mathbb{R})$;

(iii) $\displaystyle \gamma(x)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x \circ \theta_t(y))[\operatorname{ch}(\pi t)]^{-1} dt \quad (x, y \in \mathfrak{m}_\varphi)$.

3. Пусть теперь A – JW-алгебра [3, 4] в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Опишем в этой, наиболее интересной с точки зрения неассоциативного интегрирования ситуации, содержательные реализации пополнений $\mathfrak{m}_\varphi$ и $\mathfrak{n}_\varphi$ по нормам $\|\cdot\|_\varphi$ и $\|\cdot\|_\# \equiv \varphi((\cdot)^2)^{1/2}$ соответственно.

Назовем линеалом точного нормального полуконечного веса φ на A линейное многообразие (ср. [1, 2])

$$D_\varphi \equiv \{f \in \mathcal{H} \mid \exists \lambda \ge 0\ \forall x \in A^+\ ((xf, f) \le \lambda \varphi(x))\}.$$

Назовем билинейную форму (б. ф.) a, заданную на D_φ (соответственно, линейный оператор r в $\mathcal{H}$ с $D(r) = D_\varphi$) *интегрируемой* (соответственно, *интегрируемым с квадратом*) относительно φ, если существует последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi$ (соответственно $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$), называемая *определяющей,* такая, что $a(f, g) = \lim(x_n f, g)$ $(f, g \in D_\varphi)$ и $\lim \|x_n - x_m\|_\varphi = 0$ (соответственно, $rf = \lim x_n f$ $(f \in D_\varphi)$ и $\lim \|x_n - x_m\|_\# = 0$). Обозначим через $L_1(\varphi)$ (соответственно, $L_2(\varphi)$) вещественное линейное пространство всех интегрируемых относительно φ б. ф. (соответственно, интегрируемых с квадратом операторов). Для $r, s \in L_2(\varphi)$ через $r \circ s$ условимся обозначать б. ф. на D_φ, заданную

равенством
$$r \circ s(f,g) \equiv \frac{1}{2}[(rf,sg)+(sf,rg)] \quad (f,g \in D_\varphi).$$

Теорема 3 (ср. [1, 2]). (i) *Пусть б. ф. $a \in L_1(\varphi)$ и (x_n) – ее определяющая последовательность. Равенство $\|a\|_\varphi \equiv \lim \|x_n\|_\varphi$ корректно определяет норму, превращающую $L_1(\varphi)$ в вещественное банахово пространство, изометрически изоморфное A_*. Соответствующий изоморфизм продолжает отображение γ и переводит конус положительных б. ф. $L_1^+(\varphi)$ на конус A_*^+.*

(ii) *Пусть операторы $r,s \in L_2(\varphi)$ и $(x_n),(y_n)$ – их определяющие последовательности. Равенство $(r,s)_\# \equiv \lim \varphi(x_n \circ y_n)$ корректно определяет скалярное произведение, превращающее $L_2(\varphi)$ в вещественное гильбертово пространство, изометрически изоморфное H_φ. Соответствующий изморфизм продолжает вложение $\hat{}): \mathfrak{n}_\varphi \to H_\varphi$. При этом б. ф. $r \circ s \in L_1(\varphi)$ и $\gamma(r\circ s) = \hat r \circ \hat s$.*

4. Пусть B – JB-алгебра [3] и ρ – состояние на B. Для JB-алгебр отсутствует полноценный вариант конструкции ГНС. Однако описанная выше схема интегрирования позволяет предложить следующий ослабленный вариант такой конструкции.

Пусть $N_\rho \equiv \{x \in B \mid \rho(x^2)=0\}$ и H_ρ – вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением фактор-пространства B/N_ρ по скалярному произведению $(\hat x, \hat y) \equiv \rho(x\circ y)$ (здесь $\hat{}): B \to B/N_\rho$ – каноническая сюръекция). Обозначим через $(H_\rho)_1$ замыкание в H_ρ множества $\widehat{B_1}$, где $B_1 \equiv \{x \in B \mid \|x\| \le 1\}$.

Теорема 4. *Существует, и притом единственное, отображение $^\circ): H_\rho \times H_\rho \to B^*$ такое, что:*

1°. $\hat 1 \circ \hat 1 = \rho$, $\widehat{x^2} \circ \hat 1 = \hat x \circ \hat x \quad (x \in B)$;

2°. $\{\xi \circ \xi \mid \xi \in (H_\rho)_1\} = \{\omega \in B^* \mid 0 \le \omega \le \rho\}$;

3°. $\{x,y\} \to \langle x, \hat y \circ \hat 1\rangle$ — *симметрическая положительная билинейная форма на B*;

4°. $|(\xi,\eta)| \le \|\xi \circ \eta\| \le \|\xi\| \cdot \|\eta\| \quad (\xi,\eta \in H_\rho)$. *При этом отображение $^\circ)$ является симметрической положительной билинейной формой на H_ρ со значениями в B^* и согласовано с умножением в B*;

5°. $\widehat{(x\circ y)} \circ \hat 1 = \hat x \circ \hat y \quad (x,y \in B)$.

Следующее утверждение является йордановым аналогом известного способа реализации автоморфизмов C^*-алгебр в представлении ГНС.

Пусть α – такой автоморфизм B, что $\rho(\alpha\,\cdot) = \rho$. Тогда из теоремы 4 вытекает существование унитарного оператора U в H_ρ такого, что
$$\langle \alpha(x), \xi \circ \eta\rangle = \langle x, U\xi \circ U\eta\rangle \quad (x \in B,\ \xi,\eta \in H_\rho).$$

Автор признателен О. Е. Тихонову, А. Н. Шерстневу и А. И. Штерну за полезные обсуждения.

Литература

[1] Трунов Н. В., Шерстнев А. Н., Изв. вузов. Математика (1978), 7, 79–88; 12, 88–98.
[2] Шерстнев А. Н., Изв. вузов. Математика (1982), 8, 20–35.
[3] Alfsen E., Shultz F., Stormer E., Adv. Math. **28** (1978), no. 1, 11–56.
[4] Shultz F. W., J. Funct. Anal. **31** (1978), no. 3, 360–376.
[5] Трунов Н. В., Рукоп. деп. в ВИНИТИ (1979), Деп. 101-79.
[6] Аюпов Ш. А., Изв. АН СССР, сер. мат. **47** (1983), 1, 3–25.
[7] Hanche-Olsen H., Oper. Alg. Proc. Symp. Pure Math. (Amer. Math. Soc.), Part 2, 1982, 301–303.

XV. ТЕОРЕМА ПЛОТНОСТИ КАПЛАНСКОГО ДЛЯ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Изв. вузов. Математика,
1987, вып. 4, 75–78.

Теорема плотности И. Капланского [1] несомненно является (как подчеркивается в известной монографии С. Сакаи [2]) одной из наиболее полезных теорем в теории операторных алгебр. Там же (см. [2], с. 23) указана в качестве важной проблемы задача распространения этой теоремы на более общие алгебры.

В данной работе теорема плотности Капланского переносится на класс вещественных йордановых банаховых алгебр с предсопряженным пространством (JBW-алгебры). Эти алгебры, введенные в работе Ф. Шульца [3], интенсивно изучаются в последнее время в качестве вещественных неассоциативных аналогов алгебр Неймана.

§1. Предварительные сведения

Основные сведения о JB- и JBW-алгебрах содержатся в работах [4] и [3], по поводу общей теории йордановых алгебр см. монографию [5].

Напомним, что JB-*алгеброй* называется вещественная йорданова алгебра A с единицей 1, наделенная нормой, превращающей ее в банахово пространство, причем для любых элементов $x, y \in A$ справедливы соотношения

(i) $\|x \circ y\| \le \|x\| \cdot \|y\|$,
(ii) $\|x^2\| = \|x\|^2$,
(iii) $\|x^2\| \le \|x^2 + y^2\|$.

Здесь и далее через $x \circ y$ обозначается йорданово произведение элементов $x, y \in A$; следуя [4], [5], будем полагать $U_x y \equiv 2x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y$.

Важным примером JB-алгебры служит JC-*алгебра*: это йорданова алгебра самосопряженных ограниченных операторов в комплексном гильбертовом пространстве с симметризованным произведением $x \circ y \equiv 1/2(xy + yx)$, обладающая единицей и замкнутая в равномерной операторной топологии. Отметим, что $U_x y = xyx$ для любых операторов x, y из JC-алгебры A.

JB-алгебра A называется JBW-*алгеброй*, если она как банахово пространство является сопряженным к некоторому банахову пространству A_*. При этом предсопряженное пространство A_*, как показано в [3], может быть отождествлено (что мы и будем в дальнейшем предполагать) с пространством всех нормальных функционалов на A.

Будем далее через A^+ (соответственно A_*^+) обозначать конус положительных элементов JBW-алгебры A (соответственно предсопряженного пространства A_*). Отметим, что $A = A^+ - A^+$ и $A_* = A_*^+ - A_*^+$ [3].

Слабой (соответственно сильной) топологией JBW-алгебры A называется локально выпуклая топология A, порожденная всеми полунормами вида $x \to |\rho(x)|$ $(\rho \in A_*)$ (соответственно полунормами $x \to \rho(x^2)^{1/2}$ $(\rho \in A_*^+)$). Эти топологии служат аналогами соответственно ультраслабой и ультрасильной топологий алгебр Неймана.

Отметим, что в силу очевидных неравенств

$$\rho(x^2) \leq ||x||^2\rho(1), \quad \rho(x \circ y)| \leq \rho(x^2)^{1/2}\rho(y^2)^{1/2} \quad (x, y \in A,\ \rho \in A_*^+)$$

равномерная (т. е. определяемая нормой) топология JBW-алгебры A сильнее сильной, которая, в свою очередь, сильнее слабой топологии A. Отметим также, что из теоремы 2.3 из [3] и леммы 4.1 из [4] следует, что умножение в JBW-алгебре раздельно слабо непрерывно.

§2. Вспомогательные результаты

Утверждение следующей леммы 1 представляет и определенный самостоятельный интерес. Оно служит аналогом хорошо известного (см. [2], [6]) факта теории алгебр Неймана о согласованности ультрасильной топологии с двойственностью между алгеброй Неймана и ее предсопряженным пространством. В частном случае, когда A есть обертывающая JBW-алгебра некоторой JB-алгебры, соответствующий результат получен Ф. Шульцем [3] (лемма 1.3).

Лемма 1. *Линейный функционал ω на JBW-алгебре A слабо непрерывен тогда и только тогда, когда он сильно непрерывен.*

Доказательство. Поскольку сильная топология A сильнее слабой, то достаточно проверить, что сильно непрерывный линейный функционал ω на A слабо непрерывен.

Заметим, что множество полунорм $x \to \rho(x^2)^{1/2}$ $(\rho \in A_*^+)$, задающих сильную топологию A, является, очевидно, фильтрующимся. Следовательно (см., напр., [7], II, §5, предложение 9), найдется такой функционал $\rho \in A_*^+$, что

$$|\omega(x)| \leq \rho(x^2)^{1/2} \quad (x \in A). \tag{1}$$

Пусть $N_\rho \equiv \{x \in A \mid \rho(x^2) = 0\}$ и $\widehat{\ }): A \to A/N_\rho$ – каноническая факторизация. Обозначим через $\mathfrak{H}$ вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением A/N_ρ по скалярному произведению $(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \rho(x \circ y)$ $(x, y \in A)$. В силу неравенства (1) отображение $x \to \omega(x)$ $(x \in A)$ корректно определяет на плотном в $\mathfrak{H}$ линеале $\hat{A}$ линейный функционал, ограниченный по норме $\mathfrak{H}$. Следовательно, по теореме Рисса найдется такой вектор $\xi \in \mathfrak{H}$, что

$$\omega(x) = (x, \xi) \quad (x \in A). \tag{2}$$

Отметим, что для проверки слабой непрерывности линейного функционала ω достаточно установить слабую непрерывность ограничения ω на единичный шар $A_1 \equiv \{x \in A \mid \|x\| \leq 1\}$ (см., напр., [7], IV, 5, следствие 1 из предложения 3).

В силу равенства (2) для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что отображение $x \to \hat{x}$ $(x \in A_1)$ непрерывно в слабой топологии, индуцированной из A на A_1, и слабой топологии гильбертова пространства $\mathfrak{H}$.

Для проверки последнего утверждения предположим, что сеть $x_\alpha \to 0$ в слабой топологии A и $\|x_\alpha\| \leq 1$. Тогда для плотного в $\mathfrak{H}$ множества векторов вида $\hat{y}$ $(y \in A)$ имеем

$$\lim_\alpha (\hat{x}_\alpha, \hat{y}) = \lim_\alpha \rho(x_\alpha \circ y) = 0$$

в силу раздельной непрерывности умножения в слабой топологии A. Кроме того, из неравенства $\|x_\alpha^2\| = \|x_\alpha\|^2 \leq 1$ следует, что $0 \leq x_\alpha^2 \leq 1$ (см. [4], теорема 2.1). Отсюда, в свою очередь, следует, что сеть векторов $\hat{x}_\alpha$ равномерно ограничена в $\mathfrak{H}$, поскольку $\|\hat{x}_\alpha\|^2 = \rho(x_\alpha^2) \leq \rho(1)$. Тогда, как нетрудно видеть, $\hat{x}_\alpha \to 0$ в слабой топологии $\mathfrak{H}$, что и требовалось проверить. Лемма доказана.

Пусть теперь A есть JB-алгебра и ρ – состояние на A (т. е. ρ – линейный ограниченный функционал на A такой, что $\rho(x^2) \geq 0$ для всех $x \in A$ и $\|\rho\| = \rho(1) = 1$).

Рассмотрим вещественную непрерывную функцию

$$f(t) = 2t(1 + t^2)^{-1} \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

которая используется при доказательстве теоремы плотности Капланского в монографии Ж. Диксмье [6]. Отметим, что эта функция строго возрастает на сегменте $[-1, 1]$ и принимает все значения из $[-1, 1]$.

Для каждого $x \in A$ определим элемент $f(x) \equiv 2x(1 + x^2)^{-1} \in A$. В силу свойств непрерывного функционального исчисления в JB-алгебрах (см. [4]) $||f(x)|| \leq 1$ и определенное таким образом отображение $f\colon A_1 \to A_1$ является биекцией.

Лемма 2. *При указанных предположениях для любых элементов $x, y \in A$ справедливо неравенство*

$$|\rho(f(x) - f(y))| \leq 2[(\rho(U_{(1+y^2)^{-1}}(x-y)^2))^{1/2} + \frac{1}{4}(\rho(U_{f(y)}(x-y)^2))^{1/2}]. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть A_0 – йорданова подалгебра A, порожденная элементами x, y и 1, B – ее равномерное замыкание в A.

Заметим, что JB-алгебра B изоморфна некоторой JC-алгебре. Действительно, алгебра A_0 по теореме Ширшова (см. [5], гл. 3, §3) является специальной. Если $F(a, b, c) = 0$ – такое s-тождество от трех переменных, которое верно в каждой специальной йордановой алгебре, но не выполняется в исключительной йордановой алгебре $H(C_3)$ всех симметрических матриц третьего порядка над числами Кэли (см. [5]), то $F(a, b, c) = 0$ и для всех $a, b, c \in B$ в силу равномерной непрерывности умножения по совокупности переменных в JB-алгебре. Остается применить лемму 9.4 работы [4]. Несколько иное, более длинное доказательство этого замечания содержится в предложении 2.1 [8].

Заметим теперь, что поскольку элементы $f(x)$, $f(y)$, $(1+y^2)^{-1}$ и $(x-y)^2$ лежат в B, то можно сразу считать $A = B$. Следовательно, мы можем без ограничения общности предполагать, что A есть JC-алгебра ограниченных самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть C^*-алгебра операторов в H, порожденная A, и $\mathfrak{A}^э$ – ее эрмитова часть. Отметим, что 1 $(\in A)$ – единица в $\mathfrak{A}$.

Продолжим ρ по теореме Хана–Банаха до вещественного ограниченного линейного функционала ρ' на $\mathfrak{A}^э$ с сохранением нормы (т. е. $\|\rho'\| = \|\rho\| = \rho(1) = 1$). Обозначим через $\widetilde{\rho}$ линейное продолжение ρ' на $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^э + i\mathfrak{A}^э$ и проверим, что $\widetilde{\rho}$ – состояние на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$.

Действительно, если $a \in \mathfrak{A}^э$ и $\|a\| = 1$, то $\|1 - a^2\| \le 1$, откуда $|1 - \widetilde{\rho}(a^2)| = |\rho'(1-a^2)| \le 1$. 0тсюда следует, что $\widetilde{\rho}(a^2) \ge 0$, так что функционал $\tilde{\rho}$ положителен.

Поскольку x, y и 1 – самосопряженные операторы в H, то очевидна следующая выкладка (ср. доказательство теоремы плотности Капланского в [6], с. 44):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(x) - f(y)) &= (1+x^2)^{-1}[x(1+y^2) - (1+x^2)y](1+y^2)^{-1}\\ &= (1+x^2)^{-1}(x-y)(1+y^2)^{-1} + (1+x^2)^{-1}x(y-x)y(1+y^2)^{-1}\\ &= (1+x^2)^{-1}(x-y)(1+y^2) + \frac{1}{4}f(x)(y-x)f(y). \qquad (5)\end{aligned}$$

Воспользовавшись положительностью ρ и неравенством Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned}&|\widetilde{\rho}((1+x^2)^{-1}(x-y)(1+y^2)^{-1})|\\ &\qquad \le (\rho((1+x^2)^{-2}))^{1/2}(\rho((1+y^2)^{-1}(x-y)^2(1+y^2)^{-1}))^{1/2}\\ &\qquad \le (\rho(U_{1+y^2)^{-1}}(x-y)^2))^{1/2}, \qquad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\widetilde{\rho}(f(x)(x-y)f(y))| &\le (\rho(f(x)^2)^{1/2}(\rho(f(y)(x-y)^2f(y)))^{1/2}\\ &\le (\rho(U_{f(y)}(x-y)^2))^{1/2}, \qquad (7)\end{aligned}$$

(здесь также учтено, что $\|f(x)\| \le 1$ и $\|(1+x^2)^{-1}\| \le 1$).

Неравенство (4) теперь непосредственно следует из (5) и оценок (6), (7). Лемма доказана.

§3. Основной результат

Теорема. *Пусть M, N – йордановы подалгебры JBW-алгебры A, причем $M \subset N$ и M сильно плотна в N. Тогда единичный шар $M_1 \equiv \{x \in M \mid \|x\| \le 1\}$ алгебры M сильно плотен в единичном шаре N_1 алгебры N.*

Доказательство. Пусть $\overline{M}$ и $\overline{N}$ – замыкания M и N соответственно в равномерной топологии JBW-алгебры A. Тогда $\overline{M}$ и $\overline{N}$ – йордановы подалгебры A, причем шары M_1 и N_1 плотны по норме, а следовательно, и сильно в единичных шарах $(\overline{M})_1$ и $(\overline{N})_1$ алгебр $\overline{M}$ и $\overline{N}$ соответственно. Поэтому, не ограничивая общности, будем предполагать, что M и N замкнуты в равномерной топологии A.

Заметим, что поскольку по лемме 1 сильная топология A согласуется с двойственностью между A и A_*, то в силу выпуклости M_1 и N_1 нам достаточно убедиться в слабой плотности M_1 в N_1 (см., напр., [7]).

Пусть элемент $x \in N_1$. Займемся построением сети $y_\alpha \subset M_1$ слабо сходящейся к x.

В силу свойств функции f (см. [4]) найдется такой элемент $y \in A_1$, что $x = f(y)$. Заметим, что поскольку y лежит в равномерном замыкании множества полиномов от x без свободного члена, то $y \in N$. По условию найдется сеть $(x_\alpha) \subset M$, сходящаяся к y в сильной топологии. Определим сеть y_α, полагая $y_\alpha = f(x_\alpha)$. Тогда все $y_\alpha \in M_1$, поскольку $f(x_\alpha)$ лежит в равномерном замыкании множества полиномов от x_α без свободного члена и $\|f(x_\alpha)\| \leq 1$.

Пусть теперь $\rho \in A_*^+$ и $\rho(1) = 1$. Воспользовавшись неравенством (4) из леммы 2, имеем

$$\begin{aligned} |\rho(x - y_\alpha)| &= |\rho(f(x_\alpha) - f(y))| \\ &\leq 2[(\rho(U_{(1+y^2)^{-1}}(x_\alpha - y)^2))^{1/2} + \frac{1}{4}(\rho(U_x(x_\alpha - y)^2))^{1/2}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Проверим, что каждое из слагаемых в последней части (8) стремится к 0. Действительно, в силу сильной сходимости сети x_α к y сеть $(x_\alpha - y)^2 \to 0$ слабо. Тогда в силу раздельной слабой непрерывности умножения в A сети

$$U_{(1+y^2)^{-1}}(x_\alpha - y)^2 \to 0, \quad U_x(x_\alpha - y)^2 \to 0$$

в слабой топологии A, откуда и следует требуемое.

Таким образом, мы показали, что $\rho(x - y_\alpha) \to 0$. Тогда в силу равенства $A_* = A_*^+ - A_*^+$ сеть $y_\alpha \to x$ в слабой топологии A. Теорема доказана.

Замечание. Частным случаем доказанной теоремы (W есть JB-алгебра, $N = A = M^{**}$ – ее обертывающая JBW-алгебра) является предложение 3.9 работы [4].

Примечание при корректуре. После того, как статья была сдана в печать, автору стал известен еще один вариант теоремы плотности Капланского для JBW-алгебр, полученный несколько иным способом в книге: Hanche-Olsen H., Størmer E. *Jordan operator algebras*, London, 1984, 183 p. (Th. 4.5.12).

Литература

[1] Kaplansky I., *A theorem on rings of operators*, Pacific J. Math. **1** (1951), no. 1, 227–232.
[2] Sakai S., *C^*-algebras and W^*-algebras*, Berlin-New York, 1971, 256 p.
[3] Shultz F. W., *On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces*, J. Funct. Anal. **31** (1979), no. 3, 460–376.
[4] Alfsen E. M., Shultz F. W., Størmer E., *A Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras*, Adv. Math. **28** (1978), no. 1, 11–56.
[5] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., *Кольца, близкие к ассоциативным*, М., 1978, 432 с.
[6] Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, 2^e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1969, 367 p.
[7] Бурбаки Н., *Топологические векторные пространства*, М., 1959, 410 с.
[8] Wright J., *Jordan C^*-algebras.*, Michigan Math. J. **24** (1977), no. 3, 291–301.

XVI. О ВЕСЕ ХААРА НА АЛГЕБРЕ НЕЙМАНА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ

(совместно с И. И. Фульманом)
Изв. вузов. Математика,
1992, 11, 65–71

В работе продолжается изучение двух специальных классов нормальных весов на алгебрах Неймана: локально конечных и регулярных, введенных одним из авторов в связи с задачами некоммутативного интегрирования (см. [1]–[3]). В первом параграфе получены некоторые необходимые условия локальной конечности и регулярности, являющиеся и достаточными для веса на полуконечной алгебре. Во втором параграфе с использованием этих условий показано, что канонический вес Хаара на левой алгебре Неймана локально компактной группы является локально конечным или регулярным тогда и только тогда, когда группа унимодулярна. Отсюда, в частности, следует, что задача об извлечении положительно определенного сверточного квадратного корня из каждой положительно определенной функции, принадлежащей алгебре Фурье, разрешима только для унимодулярных групп.

В обозначениях и терминологии, касающейся алгебр Неймана и весов на них, мы будем следовать работам [4]–[7]. Всюду ниже $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана, $\mathcal{M}^+$ (соответственно $\mathcal{M}_*^+$) — конус положительных элементов $\mathcal{M}$ (соответственно преддвойственного к $\mathcal{M}$ пространства $\mathcal{M}_*$).

Напомним, что *весом* на $\mathcal{M}$ называется отображение φ из $\mathcal{M}^+$ в $[0,+\infty]$ такое, что

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\quad \varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)\qquad (x,y\in\mathcal{M}^+,\ \lambda\geq 0,\ 0\cdot\infty\equiv 0).$$

Вес φ называется *следом,* если $\varphi(x^*x)=\varphi(xx^*)$ $(x\in\mathcal{M})$. Вес φ называется:

— *нормальным*, если $\varphi(x) = \sup\varphi(x_i)$ для каждой возрастающей сети $x_i\nearrow x$ $(x_i,x\in\mathcal{M}^+)$;

— *точным*, если из $\varphi(x)=0$ $(x\in\mathcal{M}^+)$ следует, что $x=0$;

— *полуконечным*, если линейная оболочка $\mathfrak{m}_\varphi$ конуса $\mathfrak{m}_\varphi^+\equiv\{x\in\mathcal{M}^+\mid \varphi(x)<\infty\}$ ультраслабо плотна в $\mathcal{M}$.

Нормальный вес φ на $\mathcal{M}$ называется:

— *локально конечным,* если

$$\forall x\in\mathcal{M}^+\ (\varphi(x)=\infty)\ \exists y\in\mathcal{M}^+\colon\ y\leq x,\ 0<\varphi(y)<\infty;$$

— *регулярным,* если

$$\forall\omega \in \mathcal{M}_*^+ \ (\omega \neq 0) \ \exists\omega' \in \mathcal{M}_*^+ \ (\omega' \neq 0)\colon \ \omega' \leq \omega, \ \omega' \leq \varphi.$$

Отметим, что для нормального следа локальная конечность равносильна полуконечности, а регулярность — точности (см. [3]).

§ 1

Определение. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Оператор k в $\mathcal{H}$ назовем *правильным* (относительно $\mathcal{M}$), если он плотно определен, замкнут и для каждого $x \in \mathcal{M}$ оператор xk замыкаем.

Отметим, что если замкнутый плотно определенный оператор k присоединен к $\mathcal{M}$, то его правильность равносильна локальной измеримости относительно $\mathcal{M}$ [8].

Следующая лемма описывает полезный в дальнейшем класс правильных операторов, не обязательно присоединенных к $\mathcal{M}$.

Лемма 1. *Пусть самосопряженные операторы k_1 и k_2 присоединены к алгебре Неймана $\mathcal{M}$ и ее коммутанту $\mathcal{M}'$ соответственно. Если оператор $k = k_1 \circ k_2$ — их сильное (т.е. замыкание обычного) произведение, то правильность оператора k равносильна правильности оператора k_1.*

Доказательство. Пусть оператор k_1 правильный. Тогда для каждого $x \in \mathcal{M}$

$$kx = (k_2 \circ k_1)x \supset k_2(k_1x) = k_2(u\,|k_1x|) = (k_2u)|k_1x| \supset (uk_2)|k_1x| = u(k_2|k_1x|).$$

(Здесь $k_1x = u\,|k_1x|$ — полярное представление замкнутого плотно определенного оператора k_1x.) Оператор $k_2|k_1x|$ плотно определен как произведение коммутирующих самосопряженных операторов, так что плотно определен и оператор kx. В силу произвольности $x \in \mathcal{M}$ и равенства $(x^*k)^* = kx$ оператор k правильный.

Пусть, наоборот, оператор k правильный. Пусть оператор $x \in \mathcal{M}$ обратим в $\mathcal{M}$. Проверим, что kx есть замыкание $\overline{k_2k_1x}$ оператора k_2k_1x. Будем в дальнейшем через $\mathcal{D}(h)$ обозначать область определения оператора h. Если $f \in \mathcal{D}(kx)$, т. е. $xf \in \mathcal{D}(k)$, то для некоторой последовательности f_n из $\mathcal{D}(k_1)$ последовательность $k_1f_n \in \mathcal{D}(k_2)$, $f_n \to xf$ и последовательность $k_2k_1f_n$ сходится. Полагая $g_n = x^{-1}f_n$, имеем $xg_n = f_n \in \mathcal{D}(k_2k_1)$, $g_n \to f$, и последовательность $k_2k_1xg_n = k_2k_1f_n$ сходится. Таким образом, $f \in \mathcal{D}(\overline{k_2k_1x})$, так что $kx \subset \overline{k_2k_1x}$. Обратное включение здесь очевидно. В таком случае оператор k_2k_1x плотно определен; отсюда плотно определен и оператор k_1x (для обратимого в $\mathcal{M}$ оператора x!). Для произвольного $x \in \mathcal{M}$ положим $x_n = \int_{1/n}^{\infty} \lambda\, de(\lambda)$, где $|x| = \int_0^{\infty} \lambda\, de(\lambda)$ — спектральное разложение оператора $|x| = (x^*x)^{1/2}$. В таком случае для каждого $f \in \mathcal{D}(k_1)$ последовательность $\|x_nk_1f\|$ возрастает и $\|xk_1f\| = \sup \|x_nk_1f\|$. В силу обратимости операторов x_n из уже доказанного и леммы 7.9 [6] (см. также лемму 7 [3]) следует замыкаемость оператора xk_1. Лемма доказана.

Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. В дальнейшем будем считать, что $\mathcal{M}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_\varphi$ стандартного представления, ассоциированного с φ. В обозначениях, связанных с теорией Томита–Такесаки обобщенных гильбертовых алгебр, будем следовать работам [5], [6], [9]. В частности $\mathfrak{n}_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < \infty\}$, $\widehat{\ })\colon \mathfrak{n}_\varphi \to \mathfrak{H}_\varphi$ — тождественное вложение, $\mathfrak{A}_\varphi = \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*$ — совершенная обобщенная гильбертова алгебра, ассоциированная с φ; Δ_φ, J_φ, $^\sharp)$, $^\flat)$ — соответственно модулярный оператор, каноническая изометрическая инволюция, замыкание в $\mathfrak{H}_\varphi$ отображения $\widehat{x} \mapsto \widehat{x^*}$ $(x \in \mathfrak{n}_\varphi)$ и отображение, сопряженное к $^\sharp)$.

Теорема 1. *Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Если вес φ локально конечен (соответственно регулярен), то оператор $\Delta_\varphi^{1/2}$ (соответственно $\Delta_\varphi^{-1/2}$) правильный. Для полуконечной алгебры $\mathcal{M}$ справедливы и обратные утверждения.*

Доказательство. Пусть вес φ локально конечен и $x \in \mathcal{M}$. Проверим, что оператор $x\Delta_\varphi^{1/2}$ замыкаем. Переходя к полярному представлению x, легко проверить, что достаточно ограничиться случаем $x \geq 0$. Более того, рассматривая возрастающую сеть $x_i \nearrow x$, $x_i \in \mathfrak{m}_\varphi^+$ (см. [3], лемма 1) и учитывая уже использованную лемму 7.9 [6], можно сразу считать, что $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. В таком случае $\mathcal{D}(\Delta_\varphi^{1/2}x) \supset \widehat{\mathfrak{A}}_\varphi$, поскольку $\mathfrak{m}_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi^2 \subset \mathfrak{A}_\varphi$. Остается учесть плотность $\widehat{\mathfrak{A}}_\varphi$ в $\mathfrak{H}_\varphi$.

Если вес φ регулярен, то в силу теоремы 2 из [3] алгебра $\mathcal{M}$ полуконечна. Таким образом, остается проверить утверждения теоремы, относящиеся лишь к полуконечному случаю. Все они непосредственно вытекают из описания локально конечных и регулярных нормальных весов, полученного в [3] (теорема 1), из леммы 1 и следующей леммы 2, являющейся несложной переформулировкой теоремы 14.1 [9] (точнее, равенства (14.17) из ее доказательства).

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$ и $\varphi = \tau(h\,\cdot)$ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ (здесь присоединенный к $\mathcal{M}$ оператор h — производная φ по τ в смысле теоремы 5.12* [6]*). Тогда $\Delta_\varphi^{1/2} = (J_\varphi h^{-1/2} J_\varphi) \circ h^{1/2}$.*

Замечание. Вопрос о том, достаточно ли правильности оператора $\Delta_\varphi^{1/2}$ (соответственно $\Delta_\varphi^{-1/2}$) для локальной конечности (соответственно регулярности) веса φ, в общем случае остается открытым.

§ 2

Пусть G — локально компактная группа, ds — фиксированная левая мера Хаара на G. Обозначим через $l(\cdot)$ левое регулярное представление G в гильбертовом пространстве $L_2(G) \equiv L_2(G, ds)$, т. е. $(l(s)f)(t) = f(s^{-1}t)$ $(f \in L_2(G))$. *Левой алгеброй Неймана* группы G называется алгебра Неймана

$$\mathcal{L}(G) \equiv \{l(s) \mid s \in G\}''.$$

Будем называть *весом Хаара* (см. [10]) точный нормальный полуконечный вес φ на $\mathcal{L}(G)$, определенный равенством

$$\varphi(x) = \begin{cases} \|f\|^2, & \text{если } x = \pi_l(f)^*\pi_l(f) \text{ для некоторого } f \in L_2(G); \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (x \in \mathcal{L}(G)^+)$$

(здесь через $\pi_l(f)$ обозначается оператор в $L_2(G)$ левой свертки с функцией f).

Алгеброй Фурье группы G (см. [11]) называется алгебра (относительно умножения) $\mathcal{A}(G)$, состоящая из всех функций на G вида $f * g^\flat$ $(f, g \in L_2(G))$, где $g^\flat(s) = \overline{g(s^{-1})}$ $(s \in G)$. Для каждой такой функции $\alpha = f * g^\flat$ определим функционал $\omega_\alpha \in \mathcal{L}(G)_*$, полагая $\omega_\alpha(\cdot) = ((\cdot)f, g)$. Отметим, что соответствие $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ является линейной биекцией $\mathcal{A}(G)$ на $\mathcal{L}(G)_*$ (см. [11]).

Для доказательства следующей теоремы 2 нам понадобятся некоторые сведения из теории пространства $L_1(\varphi)$ интегрируемых билинейных форм, определенных на линеале $\mathcal{D}_\varphi$ точного нормального полуконечного веса φ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Отметим, что в нашем случае $\mathcal{D}_\varphi = J_\varphi \widehat{\mathfrak{n}}_\varphi$ и совпадает с множеством ограниченных справа функций из $L_2(G)$. Отсылая за точными определениями к работе [12] и обзору [7], напомним, что через $\gamma_\varphi \colon L_1(\varphi) \to \mathcal{M}_*$ обозначается канонический порядковый изоморфизм, однозначно определяемый условием: если $x, y \in \mathfrak{n}_\varphi$ и билинейная форма $a \in L_1(\varphi)$ определяется оператором $y^*x \in \mathfrak{m}_\varphi$, то $\gamma_\varphi(a)(\cdot) = ((\cdot)J_\varphi\widehat{y}, J_\varphi\widehat{x})$. Если, в частности, φ — вес Хаара и билинейная форма $a \in L_1(\varphi)$ такова, что $\gamma_\varphi(a) = \omega_\alpha$, где $\alpha = f * g^\flat \in \mathcal{A}(G)$, то, как нетрудно проверить, $a(\cdot,\cdot) = (\pi_l(J_\varphi g)(\cdot), \pi_l(J_\varphi f)(\cdot))$.

Нам понадобится также следующее понятие *почти доминируемости* весом φ функционала $\omega \in \mathcal{M}_*^+$, означающее, что для каждой последовательности $(x_n) \subset \mathcal{M}$ из

$$\lim_{m,n} \omega((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_n \varphi(x_n^* x_n) = 0$$

всякий раз следует, что $\lim\limits_n \omega(x_n^* x_n) = 0$.

Теорема 2. *Положительно определенная функция $\alpha \in \mathcal{A}(G)$ имеет вид $\alpha = f * f$ для некоторой положительно определенной функции f тогда и только тогда, когда вес Хаара на $\mathcal{L}(G)$ почти доминирует функционал ω_α.*

Доказательство. Напомним, что положительная определенность функции α означает ее измеримость и справедливость неравенства

$$\int_G \int_G \alpha(s^{-1}t)\overline{g(s)}g(t)\,ds\,dt \ge 0$$

для каждой непрерывной функции g с компактным носителем. В частности, функция $f \in L_2(G)$ положительно определена тогда и только тогда, когда оператор $\pi_l(Jf)$ левой свертки с функцией $(Jf)(s) \equiv \Delta^{-1/2}(s)\overline{f(s^{-1})}$ положителен в $L_2(G)$ (здесь $\Delta(s)$ — модулярная функция группы G). Отметим также, что $L_2(G)$ естественно отождествляется с гильбертовым пространством $\mathfrak{H}_\varphi$ стандартного представления, ассоциированного с весом Хаара φ, так, что операторы из $\mathcal{L}(G)$ совпадают со своими образами. При этом $(\Delta_\varphi f)(s) = \Delta(s)f(s)$,

$J_\varphi = J$, $f^\sharp(s) = \Delta(s)^{-1}\overline{f(s^{-1})}$, а отображение $^\flat$) совпадает с определенным выше (см. [10]).

Пусть положительно определенная функция $\alpha \in \mathcal{A}(G)$ имеет вид $\alpha = f * f$ для некоторой положительно определенной функции f. Тогда, учитывая, что $f = f^\flat$, имеем

$$\int_G |f|^2 ds = (f * f^\flat)(e) = \alpha(e) < \infty,$$

следовательно, $f \in L_2(G)$. Определим теперь на линеале веса $\mathcal{D}_\varphi = J_\varphi \widehat{\mathfrak{n}}_\varphi$ положительную билинейную форму $a \in L_1(\varphi)$, полагая

$$a(\cdot,\cdot) = (\pi_l(J_\varphi f)(\cdot), \pi_l(J_\varphi f)(\cdot)).$$

В силу положительности оператора $\pi_l(J_\varphi f)$ форма a замыкаема, так что вес φ почти доминирует функционал $\gamma_\varphi(a)$ (см. [2]). Остается заметить, что $\gamma_\varphi(a) = \omega_\alpha$.

Пусть, наоборот, вес φ почти доминирует функционал ω_α и билинейная форма $a \in L_1(\varphi)$ такова, что $\gamma_\varphi(a) = \omega_\alpha$. Тогда a замыкаема и, следовательно, имеет вид

$$a(\cdot,\cdot) = (\pi_l(\xi)(\cdot), \pi_l(\xi)(\cdot))$$

для некоторого $\xi \in \mathfrak{H}_\varphi = L_2(G)$ такого, что оператор $\pi_l(\xi)$ левой свертки с ξ положителен (см. [2]). Рассмотрим функцию $f = J_\varphi \xi \in L_2(G)$. Тогда f положительно определена и, как нетрудно видеть, $\alpha = f * f$.

Следствие. *Вес Хаара на $\mathcal{L}(G)$ регулярен тогда и только тогда, когда каждая положительно определенная функция $\alpha \in \mathcal{A}(G)$ имеет вид $\alpha = f * f$ для некоторой положительно определенной функции f. При этом такая функция $f \in L_2(G)$ и определена по α однозначно.*

Доказательство сразу следует из теоремы 2 и результатов работы [2].

Замечание. В работе Годмана [13] было показано (см. также [14], теорема 13.8.6), что каждая непрерывная положительно определенная функция α из $L_2(G)$ имеет вид $\alpha = f * f$ для некоторой положительно определенной функции $f \in L_2(G)$. Отметим, что выделенный теоремой 2 класс положительно определенных функций из $\mathcal{A}(G)$ содержит класс функций, рассмотренных Годманом, но не сводится к нему для некомпактных групп (в компактном случае, как известно, $\mathcal{A}(G) \subset L_2(G)$). Это очевидным образом следует из существования положительного самосопряженного оператора k, присоединенного к $\mathcal{L}(G)$, такого, что $\varphi(k) < \infty$, но $\varphi(k^2) = \infty$ (о продолжении нормального веса на неограниченные операторы см. [2]).

Следующая теорема 3 решает, в частности, вопрос о совпадении класса функций, выделенного теоремой 2, с классом всех положительно определенных функций из $\mathcal{A}(G)$ в терминах группы G.

Теорема 3. *Пусть G — локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *вес Хаара на $\mathcal{L}(G)$ локально конечен;*
(ii) *вес Хаара на $\mathcal{L}(G)$ регулярен;*

(iii) *каждая положительно определенная функция* $\alpha \in \mathcal{A}(G)$ *имеет вид* $\alpha = f * f$ *для некоторой положительно определенной функции* f;

(iv) *группа* G *унимодулярна.*

Доказательство. Импликации (iv) $\Longrightarrow$ (i), (iv) $\Longrightarrow$ (ii) вытекают из того, что для унимодулярной группы G вес Хаара на ней является следом. Равносильность условий (ii) и (iii) есть следствие теоремы 2.

Для проверки импликаций (i) $\Longrightarrow$ (iv) и (ii) $\Longrightarrow$ (iv) нам понадобятся три леммы. Ниже через $\mathbb{Z}$ обозначается аддитивная группа целых чисел, наделенная считающей мерой; через $\mathbb{T}$ — одномерный тор, наделенный мерой Лебега, рассматриваемый как группа, двойственная $\mathbb{Z}$. Через $\mathcal{F}\colon L_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{T})$ обозначается соответствующее преобразование Фурье–Планшереля. В дальнейшем элементы $\mathbb{T}$ каноническим образом отождествляются с точками промежутка $[0, 2\pi)$.

Лемма 3. *Пусть функция* $f \in L_2(\mathbb{Z})$ *и* $\mathcal{F}f$ *обращается в нуль почти всюду вне отрезка* $[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$. *Если для некоторого вещественного числа* $\delta \neq 0$ *функция* $\widetilde{f}$, *определенная равенством* $\widetilde{f}(n) = e^{\delta n} f(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$, *лежит в* $L_2(\mathbb{Z})$, *то* $f = 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь случай $\delta > 0$. Проверим, что функция

$$r(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-izn} f^2(n) \qquad (*)$$

определена и непрерывна в полосе $0 \le \operatorname{Im} z \le 2\delta$ и аналитична внутри нее. Действительно, как нетрудно проверить с помощью признака Вейерштрасса, ряд $(*)$ сходится абсолютно и равномерно в полосе $0 \le \operatorname{Im} z \le 2\delta$, а результат его формального дифференцирования — в каждой полосе $\delta_1 \le \operatorname{Im} z \le \delta_2$, где $0 < \delta_1 < \delta_2 < 2\delta$. Граничное значение $r(z)$ при $\operatorname{Im} z = 0$ совпадает на интервале $[0, 2\pi)$ с функцией $\mathcal{F}(f^2) = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}f)$ и, следовательно, обращается в нуль на промежутке $[0, \pi/4]$. В силу единственности аналитического продолжения функция $r(z) = 0$ в полосе $0 \le \operatorname{Im} z \le 2\delta$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{F}(f^2) = 0$, так что $f = 0$.

Замечание. Справедлив и непрерывный аналог леммы 3. Пусть функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ такова, что ее преобразование Фурье–Планшереля обращается в нуль почти всюду вне некоторого компакта. Если для некоторого вещественного числа $\delta \neq 0$ функция $\widetilde{f}$, определенная равенством $\widetilde{f}(x) = e^{\delta x} f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, лежит в $L_2(\mathbb{R})$, то $f = 0$ почти всюду.

Лемма 4. *Пусть вещественное число* $\delta \neq 0$ *и* k — *оператор в* $L_2(\mathbb{Z})$ *умножения на функцию* $e^{\delta n}$. *Тогда* k *не является правильным относительно левой алгебры Неймана* $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Достаточно указать проектор $p \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ такой, что оператор kp не является плотно определенным. Пусть q — оператор в $L_2(\mathbb{T})$ умножения на характеристическую функцию отрезка $[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$ и $p = \mathcal{F}q\mathcal{F}^{-1}$. Тогда p — проектор из $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$. Проверим, что он искомый. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{D}(k) \cap pL_2(\mathbb{Z}) = \{0\}$. Но если функция $f \in \mathcal{D}(k) \cap pL_2(\mathbb{Z})$, то она, очевидно, удовлетворяет всем условиям леммы 3 и, следовательно, $f = 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть U — замкнутая унимодулярная подгруппа локально компактной группы G, du — мера Хаара на U, V — борелевское подмножество G, содержащее ровно по одному элементу из каждого правого класса смежности однородного пространства $U\backslash G$. Тогда существует такая борелевская мера dv на V, что*

$$L_2(G) \simeq L_2(U, du) \otimes L_2(V, dv),$$

причем изоморфизм осуществляется отображением $f \mapsto \widehat{f}$, где $\widehat{f}(u,v) = f(uv)$.

Доказательство. Из результата Макки [15] следует, что (в наших обозначениях) для любой строго положительной борелевской функции $\rho\colon G \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $\rho(us) = \Delta(u)\rho(s)$ $(u \in U,\ s \in G)$, существует борелевская мера $d\overset{\circ}{s}$ на однородном пространстве $U\backslash G$ такая, что

$$\int_G f(s)\rho(s)\, d_r s = \int_{U\backslash G} \left(\int_U f(us)\, du \right) d\overset{\circ}{s},$$

где $d_r s$ — правая мера Хаара группы G, $\overset{\circ}{s}$ — соответствующий правый класс смежности элемента $s \in G$. Подставляя в это равенство вместо ρ модулярную функцию Δ группы G и обозначая через dv борелевскую меру на V, в которую переходит $d\overset{\circ}{s}$ при каноническом отображении $U\backslash G$ на V, имеем

$$\int_G f(s)\, ds = \int_V \left(\int_U f(uv)\, du \right) dv.$$

Утверждение леммы теперь есть простое следствие последнего равенства. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству импликаций (i) $\Longrightarrow$ (iv), (ii) $\Longrightarrow$ (iv). Пусть группа G не является унимодулярной. Тогда найдется элемент $s \in G$ такой, что $\Delta(s) > 1$. Полагая $U = \{s^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, легко видеть, что U — замкнутая подгруппа G, изоморфная $\mathbb{Z}$. Пусть

$$V = \{t \in G \mid \Delta(t) \in [1, \Delta(s))\}.$$

Нетрудно проверить, что борелевское множество V содержит ровно по одному элементу из каждого правого класса смежности однородного пространства $U\backslash G$, и, следовательно, мы находимся в условиях леммы 5. Напомним, что модулярный оператор Δ_φ веса Хаара φ на $\mathcal{L}(G)$ есть оператор умножения в $L_2(G)$ на модулярную функцию Δ группы G. Пусть W — унитарный оператор из леммы 5, осуществляющий изоморфизм гильбертовых пространств $L_2(G)$ и $L_2(U) \otimes L_2(V)$, Δ_U (соответственно Δ_V) — оператор в $L_2(U)$ (соответственно в $L_2(V)$) умножения на функцию $\Delta|U$ (соответственно $\Delta|V$). Тогда из равенства $\Delta(uv) = \Delta(u)\Delta(v)$ $(u \in U,\ v \in V)$ следует, что $W\Delta_\varphi^{1/2}W^{-1} = \Delta_U^{1/2} \otimes \Delta_V^{1/2}$. Поэтому в силу теоремы 1 достаточно убедиться, что операторы $\Delta_U^{1/2} \otimes \Delta_V^{1/2}$ и $\Delta_U^{-1/2} \otimes \Delta_V^{-1/2}$ не являются правильными относительно алгебры Неймана $\mathrm{M} = \{WxW^{-1} \mid x \in \mathcal{L}(G)\}$, действующей в гильбертовом пространстве $L_2(U) \otimes L_2(V)$.

Рассмотрим алгебру Неймана $\mathcal{N} = \mathcal{L}(U) \otimes \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — алгебра операторов в $L_2(V)$, кратных тождественному. Тогда $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ в силу легко проверяемого равенства

$$l_U(u) \otimes Wl(u)W^{-1} \qquad (u \in U),$$

где l (соответственно l_U) — левое регулярное представление группы G (соответственно U) в $L_2(G)$ (соответственно в $L_2(U)$). Таким образом, достаточно убедиться лишь в том, что операторы $\Delta_U^{1/2} \otimes \Delta_V^{1/2}$ и $\Delta_U^{-1/2} \otimes \Delta_V^{-1/2}$ не являются правильными относительно подалгебры $\mathcal{N}$. Для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что операторы $\Delta_U^{1/2}$ и $\Delta_U^{-1/2}$ не являются правильными относительно алгебры Неймана $\mathcal{L}(U)$. Учитывая, что отображение $s^n \mapsto n$ осуществляет изоморфизм группы U на $\mathbb{Z}$, переводящий оператор Δ_U в оператор умножения на функцию $s^n \mapsto \Delta(s)^n$ в $L_2(G)$, для завершения доказательства остается сослаться на лемму 4 с $\delta = \frac{1}{2}\ln\Delta(s)$ для оператора $\Delta_U^{1/2}$ и $\delta = -\frac{1}{2}\ln\Delta(s)$ для $\Delta_U^{-1/2}$. Теорема доказана.

Литература

1. Трунов Н. В., *Локально конечные веса на алгебрах Неймана*, Казан. ун-т. Казань (1978), 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 янв. 1979 г., 101-79 Деп.)
2. Трунов Н.В., *Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса*, Конструкт. теория функций и функц. анализ, вып. 3, изд. Казанск. ун-та, Казань, 1981, с. 73–87.
3. Трунов Н.В., *К теории нормальных весов на алгебрах Неймана*, Изв. вузов. Математика (1982), 8, 61–70.
4. Haagerup U., *Normal weights on W*-algebras*, J. Funct. Anal. **19** (1975), no. 3, 302–317.
5. Combes F., *Poids associé a une algèbre hilbertienne a gauche*, Compositio Math. **23** (1971), no. 1, 49–77.
6. Pedersen G., Takesaki M., *The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. **130** (1973), no. 1–2, 53–87.
7. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н., *Введение в теорию некоммутативного интегрирования*, Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Совр. пробл. матем., т. 27, 1985, с. 167–190.
8. Yeadon F., *On a result of P.G. Dixon*, J. London Math. Soc. (2) **9** (1975), no. 4, 610–612.
9. Такесаки М., *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения. I*, Математика (сб. переводов) **18** (1974), 3, 83–122; *II*, **18** (1974), 4, 34–63.
10. Walter M.E., *Convolution of the reduced dual of a locally compact group*, Math. Scand. **37** (1975), no. 1, 145–166.
11. Eymard P., *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), no. 2, 181–236.
12. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н., *К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I*, Изв. вузов. Математика (1978), 7, 79–88; *II*, (1978), 12, 88–98.
13. Godement R., *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), no. 1, 1–84.
14. Диксмье Ж., *C*-алгебры и их представления*, Наука, М., 1974, 399 с.
15. Mackey G.W., *Induced representation of locally compact groups*, Ann. Math. **55** (1952), no. 2, 101–139.