Доклады Академии наук СССР
1959. Том 129, № 6

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ и Р. И. КАЧУРОВСКИЙ

К ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 VIII 1959*)

1. Пусть A — линейный интегральный оператор

$$Av = \int_D K(x, y)\, v(y)\, dy,$$

$hu = g(u(x), x)$ — оператор Немыцкого и $\Gamma = Ah$ — оператор Гаммерштейна. Во всех работах, в которых вариационным методом были установлены теоремы существования решений уравнения $\Gamma u = u$ или собственных функций и точек ветвления оператора Γ, требуется, чтобы оператор A был позитивным или квазипозитивным (см. ([1]), где указана библиография). Это требование оказалось стеснительным, так как оно не позволяло исследовать вариационным методом уравнения и операторы Гаммерштейна при наличии, например, у самосопряженного оператора A (вполне непрерывного) счетного числа положительных и счетного числа отрицательных характеристических чисел.

В настоящей работе мы выделяем класс $\mathfrak{A}$ операторов A и показываем, что если $A \in \mathfrak{A}$, то к уравнению $u = \Gamma u$ применим вариационный метод. Класс $\mathfrak{A}$ содержит самосопряженные вполне непрерывные операторы A со счетным числом положительных и счетным числом отрицательных характеристических чисел.

Идея доказательства заключается в том, что уравнение $\mu u = \Gamma u$ сводится к системе уравнений с симметричной матрицей линейных операторов. Оператор, определенный этой матрицей, действует в пространстве вектор-функций и не является позитивным или квазипозитивным, хотя каждый элемент матрицы представляет собой позитивный оператор. Затем мы рассматриваем другую систему уравнений с диагональной матрицей линейных операторов, элементы которой суть элементы прежней матрицы. Диагональная матрица линейных операторов определяет линейный позитивный оператор, действующий в некотором пространстве вектор-функций. Оказывается, что всякое решение второй системы определяет решение первой системы. Для простоты изложения при рассмотрении уравнения $u = \Gamma u$ мы полагаем, что D — измеримое множество, принадлежащее квадрату $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$. Во второй части заметки устанавливаются новые вариационные принципы существования неподвижной точки преобразования.

2. Пусть ядро $K(x, y)$ оператора A симметрично. Положим $K_{i\nu}(x, y) = K\left(x + \frac{i-1}{n},\ y + \frac{\nu - 1}{n}\right)$ для $0 \leqslant x,\ y < \frac{1}{n}$ $(i, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ n \geqslant 2)$. Из симметрии $K(x, y)$ следует, что $= K_{i\nu}(x, y) = K_{\nu i}(y, x)$. Рассмотрим еще в $L^2\left(0, \frac{1}{n}\right)$ оператор $A_{i\nu}$

$$A_{i\nu}\, v = \int_0^{1/n} K_{i\nu}(x, y)\, v(y)\, dy.$$

Мы скажем, что оператор $A \in \mathfrak{A}$, если при некотором n каждый из операторов $A_{i\nu}$ является самосопряженным и положительным в L^2. Легко построить примеры операторов, принадлежащих $\mathfrak{A}$, у которых имеется счетное число положительных и счетное число отрицательных характеристических чисел ([3]).

3. Будем рассматривать оператор Γ в предположении, что вещественная функция $g(u, x)$, заданная для $u \in (-\infty, +\infty)$ и $x \in [0, 1]$, непрерывна по u и измерима по x в D, а A действует вполне непрерывно из L^q в L^p ($p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1⁰. *Оператор $A \in \mathfrak{A}$ и действует вполне непрерывно из L^q в L^p.*

2⁰. $|g(u, x)| \leqslant a(x) + b\,|u|^{p-1}$,

$$2\int_0^u g(v, x)\,dv \leqslant a_1 u^2 + b_1(x)\,|u|^\alpha + c(x),$$

где $a(x) \in L^q$; $b < 0$; $a_1 < \lambda n^{-1}$; λ — наименьшее характеристическое число операторов $A_{i\nu}$; n — число, входящее в определение $A \in \mathfrak{A}$; $b_1(x) \in L^\gamma$; $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$; $0 < \alpha < 2$; $c(x) \in L^1$.

Тогда уравнение $u = \Gamma u$ имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству L^p.

Доказательство основано на сведении рассматриваемого уравнения к системе уравнений Гаммерштейна. Пусть n — число, определяющее принадлежность $A \in \mathfrak{A}$. Положим $g_\nu(u_\nu, y) = g\left(u_\nu, \quad y + \frac{\nu - 1}{n}\right)$, $0 \leqslant y < \frac{1}{n}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Тогда рассматриваемое уравнение сведется к системе

$$u_i(x) = \sum_{\nu=1}^n \int_0^{1/n} K_{i\nu}(x, y)\, g_\nu(u_\nu(y), y)\,dy = \sum_{\nu=1}^n A_{i\nu}\, h_\nu u, \tag{1}$$

представляющей частный вид системы

$$u_i(x) = \sum_{\nu=1}^n \int_D K_{i\nu}(x, y)\, g_\nu(u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y)\,dy \tag{2}$$

при

$$g_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n, y) = \frac{\partial}{\partial u_\nu} G(u_1 u_2, \ldots, u_n, y).$$

Наряду с системой (2), у которой квадратная матрица $((K_{ij}))$, составленная из положительно-определенных или положительно-полуопределенных ядер $K_{ij}(x, y)$, является симметричной, рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений с диагональной матрицей ядер

$$v_{i\nu}(x) = \int_D K_{i\nu}(x, y)\, g_\nu\Big(\sum_{k=1}^n v_{1k}(y), \sum_{k=1}^n v_{2k}(y), \ldots, \sum_{k=1}^n v_{nk}(y), y\Big)\,dy. \tag{3}$$

Из разрешимости системы (3) следует разрешимость системы (2).

Вариационный метод, изложенный в ([1]), неприменим к доказательству существования решения системы (3), если основной функционал $\varphi(u)$ (([1]), стр. 268) рассматривать в L_{2, n^2}. Однако если в L_{2,n^2} выделить подпространство $\widetilde{L}_{2, n^2}$, в котором $v_{i\mu}(x) = v_{\mu i}(x)$, и в нем рассмотреть $\varphi(v)$, то соображения из ([1]) будут применимы к исследованию системы (3). Данная идея приводит к завершению доказательства теоремы 1.

Отметим, что одновременно нами установлено следующее предложение:

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1^0. *Каждый самосопряженный и положительный оператор* $A_{i\nu}$:

$$A_{i\nu} v = \int_D K_{i\nu}(x, y) v(y) dy$$

действует вполне непрерывно из L^q *в* L^p $(p \geqslant 2, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1)$, *причем* $A_{i\nu} = A_{\nu i}$.

2^0. *Оператор Немыцкого* $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $\quad h_i u = g_i(u_1(x), \ldots \ldots, u_n(x), x)$ *действует из* $L_{p,n}$ *в* $L_{q,n}$.

3^0. $g_i = \frac{\partial G}{\partial u_i}$, *причем* $2G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_i|^\alpha + c(x)$, *где* $0 \leqslant a_i n < \lambda_{i\nu 1}$ ($\lambda_{i\nu 1}$ — *наименьшее характеристическое число ядер* $K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{in}$); $\quad 0 < \alpha < 2$; $\quad 0 \leqslant b_i(x) \in L^\gamma$; $\quad \gamma = \frac{2}{2-\alpha}$; $0 \leqslant c(x) \in L^1$; D — *изм римое множество s-мерного евклидова пространства конечной или бесконечной меры.*

Тогда система (2) имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству $L_{p,n}$.

Те же соображения позволяют устанавливать и другие предложения, из которых мы приведем следующее.

Теорема 3. *Если ядро* $K(x, y)$ *оператора* $A \in \mathfrak{A}$ *ограничено, причем, каково бы ни было число* $r > 0$, $|g(u, x)| \leqslant a_r(x) \in L^q$, *где* $1 < q < 2$, *если* $|u| \leqslant r$, *и*

$$2\int_0^u g(v, x) dv \leqslant au^2 + b(x) |u|^\alpha + c(x),$$

где $a < \lambda n^{-1}$; λ — *наименьшее характеристическое число операторов* $A_{i\nu}$; n — *число, входящее в определение* $A \in \mathfrak{A}$; $0 < \alpha < 2$; $b(x) \in L^\gamma$; $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$; $c(x) \in L^1$, *то уравнение* $u = \Gamma u$ *имеет по меньшей мере одно ограниченное решение.*

4. При рассмотрении вопроса о собственных функциях оператора Γ мы используем предыдущие соображения и рассматриваем в подпространстве $\tilde{L}_{2,n^2}$ функционал

$$f(A^{1/2} u) = \int_0^{1/n} G\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_{1\nu}^{1/2} u_{1\nu}, \sum_{\nu=1}^{n} A_{2\nu} u_{2\nu}, \ldots, \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}^{1/2} u_{n\nu}, \ y\right) dy,$$

где $A_{i\nu}^{1/2}$ — положительный корень квадратный из положительного оператора $A_{i\nu}$ и $A_{i\nu} = A_{\nu i}$. Изучение этого функционала в $\tilde{L}_{2,n^2}$ приводит к общим предложениям о собственных функциях оператора

$$AF = \left(\sum_{\nu=1}^{n} A_{1\nu} h_\nu u, \sum_{\nu=1}^{n} A_{2\nu} h_\nu u, \ldots, \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu} h_\nu u\right).$$

Приведем одно такое предложение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1^0 *и* 2^0 *теоремы 2, причем* $g_i = \partial G / \partial u_i$, $g_i(0, 0, \ldots, 0, x) = 0$.

Тогда, каково бы ни было положительное число a, *существует континуум собственных функций оператора* AF, *принадлежащих пространству* $L_{p,n}$, *нормы которых в* $L_{p,n}$ *не превосходят числа* a.

Эти общие предложения мы используем при доказательстве следующих теорем.

Теорема 5. *Пусть оператор* $A \in \mathfrak{A}$ *действует вполне непрерывно из* L^q *в* L^p $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ *и* $|g(u, x)| \leqslant a(x) + b|u|^{p-1}$, *где* $a(x) \in L^q$, $b > 0$, $g(0, x) = 0$.

Тогда существует континуум собственных функций оператора Γ, *принадлежащих пространству* L^p, *нормы которых в* L^p *меньше произвольного положительного числа.*

Теорема 6. *Если ядро* $K(x, y)$ *оператора* $A \in \mathfrak{A}$ *ограничено,* $g(0, x) = 0$, $|g(u, x)| \leqslant a(x) \in L^q$ $(1 < q < 2)$ *в некоторой окрестности точки* $u = 0$, *то существует континуум собственных функций* $v(x)$ *оператора* Γ, *для которых* $\operatorname{vrai\,sup}|v(x)|$ *меньше произвольного положительного числа.*

Отметим еще, что путем использования соответствующих теорем из ([1]) мы приходим к различным теоремам о точках бифуркации операторов AF и Γ.

5. Вариационные принципы существования неподвижной точки преобразования можно разделить на две группы. К первой принадлежат такие принципы, в которых требуется полная непрерывность основного нелинейного оператора или слабая непрерывность соответствующего функционала; ко второй — такие, как, например, теорема 9.4 из ([1]) и ее следствия, которые свободны от требований, указанных выше. При доказательстве теорем п. 3 были использованы принципы первой группы. Те же соображения п. 3 и принципы второй группы приводят к другим теоремам существования решений. Следующий новый принцип неподвижной точки также применим к изучению уравнений Гаммерштейна (ср. ([2])).

Теорема 7. *Пусть потенциальный оператор* $F(x)$, *заданный в рефлексивном банаховом пространстве* E, *удовлетворяет условиям:*

$$(F(x+y) - F(x), y) \geqslant 0,$$
$$(F(x_0+y) - F(x_0), y) \geqslant \|y\| \gamma(\|y\|),$$

где $x_0, x, y \in E$; x_0 — *некоторый фиксированный вектор;* x, y — *произвольные векторы;* $\gamma(t) > 0$ *для* $t > 0$ *и*

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^1 \gamma(tR)\, dt = +\infty.$$

Тогда существует единственное решение уравнения $F(x) = 0$ *в* E.

Из данного принципа мы выводим следующие следствия:

1) Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы положительный самосопряженный оператор A и потенциальный оператор $F(x)$, удовлетворяющий условию $(F(x+y) - F(x), y) \leqslant a_1(y, y)$ для любых $x, y \in H$, где $a_1\|A\| < 1$ при $a_1 > 0$. Тогда уравнение $x = AF(x)$ имеет в H единственное решение.

2) Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H задан квазиотрицательный оператор B, положительный спектр которого принадлежит отрезку $[m, \beta]$, где $m > 0$, и потенциальный оператор $F(x)$, удовлетворяющий условию $(F(x+y) - F(x), y) \geqslant \frac{2}{m}(y, y)$. Тогда уравнение $x = BF(x)$ имеет в H единственное решение.

Доказательство теоремы 7 использует следующую лемму:

Лемма. *Если потенциальный оператор* $F(x)$, *заданный в банаховом пространстве* E, *удовлетворяет условию* $(F(x+y) - F(x), y) \geqslant 0$ *для всех* $x \in D(\|x\| \leqslant r)$, $(x+y) \in D$, *то его потенциал слабо полунепрерывен снизу в шаре* $D(\|x\| \leqslant r)$.

Московский областной педагогический
институт им. Н. К. Крупской

Поступило
28 VIII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Вайнберг, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, 1956. [2] М. М. Вайнберг, Уч. зап. Моск. обл. пед. инст. им. Крупской, 77, 131 (1959). [3] Р. И. Качуровский, Уч. зап. Моск. обл. пед. инст. им. Крупской, 77, 187 (1959).