УДК 533.88+519.3

А. А. Владимиров
Ю. Е. Нестеров
Ю. Н. Чеканов

О РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ

Исследуются некоторые свойства равномерно выпуклых функционалов, выводятся достаточные условия равномерной выпуклости, и на их основе строятся некоторые классы равномерно выпуклых функционалов, формулируются условия их существования в нормированных пространствах.

Понятие равномерно выпуклого функционала было введено в [1]. С тех пор эти функционалы нашли широкое применение в теории экстремальных задач и математическом программировании ([2—8]). Из равномерно выпуклых функционалов хорошо известен и исследован подкласс сильно выпуклых функционалов, общий же случай изучен меньше. В настоящей работе дается определение равномерно выпуклого функционала, доказывается обобщенная теорема Вейерштрасса, выводятся условия равномерной выпуклости, указываются конкретные классы равномерно выпуклых функционалов, исследуются условия существования таких функционалов в банаховых пространствах.

§ 1. Определение. Простейшие свойства. Мы будем рассматривать только вещественные нормированные пространства, не оговаривая этого в дальнейшем. Через E будем обозначать линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, через B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$, через H — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H=\sqrt{<\cdot,\cdot>}$, где $<\cdot,\cdot>$ — скалярное произведение в H. Там, где это не вызовет недоразумений, индексы при знаке нормы будут опускаться. Через E^* будем обозначать пространство, сопряженное к E, а через $<h, u>$ — значение линейного функционала $h\in E^*$ на элементе $u\in E$. Пусть $J(u)$ — функционал, определенный на $U\subseteq E$, конечный во всех точках из U. Множество линейных непрерывных функционалов, опорных к $J(u)$ в точке $v\in U$, будем обозначать через $\partial J(u)$.

Определение 1. Функционал $J(u)$, определенный на выпуклом множестве $U\subseteq E$, будем называть равномерно выпуклым на U, если существует неотрицательная функция $\delta(t)$, $\delta(0)=0$, $\delta(t_0)>0$ при некотором $t_0>0$, такая, что для всех u, $v\in U$ и любого $\alpha\in[0, 1]$ выполнено неравенство

$$J(\alpha u+(1-\alpha)v)\leqslant\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-\alpha(1-\alpha)\delta(\|u-v\|). \quad (1)$$

Функцию $\delta(t)$ назовем модулем выпуклости функционала $J(u)$ на U, а функцию

$$\mu(t)=\inf_{\substack{u,v\in U:\|u-v\|=t\\ 0<\alpha<1}}\frac{\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-J(\alpha u+(1-\alpha)v)}{\alpha(1-\alpha)}$$

будем называть точным модулем выпуклости функционала $J(u)$ на U. Очевидно, что $\mu(t)\geqslant\delta(t)$ для любого модуля выпуклости $\delta(t)$.

Определение 2. Если найдется $\delta(t)$, такая, что $\delta(t)>0$ при всех $t>0$, то функционал $J(u)$, удовлетворяющий неравенству (1), будем называть строго равномерно выпуклым.

Отметим некоторые простейшие свойства равномерно выпуклых функционалов:

1. Пусть функционал $J(u)$ является равномерно выпуклым на выпуклом множестве $U\subseteq E$ с модулем выпуклости $\delta(t)$, и пусть функционал $\psi(u)$ является выпуклым на U. Тогда функционал $J(u)+\psi(u)$ также будет равномерно выпуклым на U с модулем $\delta(t)$. Отсюда, в частности, следует, что равномерно выпуклые функционалы не обладают лучшими дифференциальными свойствами по сравнению с выпуклыми функционалами.

2. Если $\psi(u)$ — линейный функционал, $\mu(t)$ — точный модуль выпуклости функционала $J(u)$, то этот модуль останется точным и для функционала $J(u)+\psi(u)$, $u\in U$.

3. Пусть функционалы $J_k(u)$, $k=1, 2, \ldots$, равномерно выпуклы на выпуклом множестве U с модулями $\delta_k(t)$, и для последовательности $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k>0$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k J_k(u)$ сходится при каждом $u\in U$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k\delta_k(t)$ сходится при всех t, таких, что существуют u_1, $u_2\in U$, $\|u_1-u_2\|=t$, и функционал $J(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k J_k(u)$ является равномерно выпуклым на U с модулем $\delta(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k\delta_k(t)$.

4. Пусть функционал $J(u)$ является равномерно выпуклым на выпуклом множестве $U\subseteq E$ и $\delta(t)$ — его модуль выпуклости. Тогда

$$J(v)\geqslant J(u)+\langle l(u), v-u\rangle+\delta(\|u-v\|) \quad (2)$$

для любого u, $v\in U$ и $l(u)\in\partial J(u)$.

В самом деле, по определению 1

$$\delta(\|u-v\|)\leqslant\frac{J(v)-J(\alpha u+(1-\alpha)v)}{\alpha}+\frac{J(u)-J(\alpha u+(1-\alpha)v)}{1-\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{J(v)-J(\alpha u+(1-\alpha)v)}{\alpha}+\langle l(u), u-v\rangle.$$

В точке u существует опорный функционал, поэтому $J(u)$ полунепрерывен снизу в этой точке. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\alpha\to1-0$, получим (2).

5. Пусть $J(u)$ — равномерно выпуклый на выпуклом множестве U функционал. Тогда справедливо неравенство

$$\langle l(u)-l(v), u-v\rangle\geqslant2\delta(\|u-v\|) \quad (3)$$

для всех u, $v\in U$, $l(u)\in\partial J(u)$, $l(v)\in\partial J(v)$, где $\delta(t)$ — модуль выпуклости функционала $J(u)$. Это утверждение сразу следует из (2).

§ 2. Обобщенная теорема Вейерштрасса. Сначала докажем одно важное свойство точного модуля выпуклости функционала $J(u)$.

Лемма 1. Пусть $\mu(t)$ — точный модуль выпуклости функционала $J(u)$ на выпуклом множестве $U \subseteq E$, а $c \geqslant 1$ и $t \geqslant 0$ таковы, что функция $\mu(t)$ определена в точке ct. Тогда $\mu(ct) \geqslant c^2 \mu(t)$.

Доказательство. Пусть сначала $1 < c < 2$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению $\mu(t)$ найдутся точки u_1, u_2, $u_3 \in U$, такие, что

$$\|u_1 - u_2\| = ct; \quad u_3 = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2, \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

и

$$\mu(ct) + \varepsilon \geqslant \frac{\alpha J(u_1) + (1-\alpha) J(u_2) - J(u_3)}{\alpha(1-\alpha)} \geqslant \mu(ct). \tag{4}$$

Обозначим $\beta = \frac{1}{c}$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Выберем точку $u_4 = \beta u_1 + (1-\beta) u_2$. Тогда $\|u_2 - u_4\| = t$, $u_3 = \frac{\alpha}{\beta} u_4 + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) u_2$, и из (4) имеем

$$\mu(ct) + \varepsilon \geqslant \frac{\alpha J(u_1) + (1-\alpha) J(u_2) - \frac{\alpha}{\beta} J(u_4) - \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) J(u_2)}{\alpha(1-\alpha)} +$$

$$+ \frac{\frac{\alpha}{\beta} J(u_4) + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) J(u_2) - J(u_3)}{\alpha(1-\alpha)} \geqslant \frac{\beta J(u_1) + (1-\beta) J(u_2) - J(u_4)}{\beta(1-\alpha)} +$$

$$+ \frac{\beta - \alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\mu(t)}{\beta^2} \geqslant \frac{1-\beta}{1-\alpha} \mu(ct) + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} c^2 \mu(t)$$

или

$$\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} \mu(ct) \geqslant c^2 \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} \mu(t) - \varepsilon.$$

Заметим, что $0 < \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\beta - \frac{1}{2}}$, поэтому в силу произвольности ε получаем $\mu(ct) \geqslant c^2 \mu(t)$ для $c \in (1, 2)$. Случай $c \geqslant 2$ очевидным образом сводится к предыдущему.

Следствие. Пусть выпуклое множество $U \subseteq E$ состоит более чем из одной точки. Тогда класс функционалов, равномерно выпуклых на U с модулем $\delta(t)$, таким, что $\overline{\lim\limits_{t \to +0}} \frac{\delta(t)}{t^p} < \infty$ при $1 \leqslant p < 2$, пуст.

Теорема 1. Пусть U — замкнутое выпуклое множество рефлексивного банахова пространства B, а $J(u)$ — равномерно выпуклый полунепрерывный снизу на U функционал. Тогда: 1) множество $M(v) = \{u \in U \mid J(u) \leqslant J(v)\}$ выпукло, замкнуто, ограничено при любом $v \in U$; 2) $J(u)$ ограничен снизу на U, т. е. $\inf\limits_U J(u) = J^* > -\infty$; 3) существует точка $u^* \in U$, такая, что $J(u^*) = J^*$; 4) при всех $u \in U$ справедливо неравенство

$$\mu(\|u - u^*\|) \leqslant J(u) - J(u^*). \tag{5}$$

Если, кроме того, функционал $J(u)$ строго равномерно выпуклый, то точка u^* единственна и задача минимизации $J(u)$ на U корректна по норме пространства B.

Доказательство. Выберем $v \in U$ и $t_0 > 0$: $\mu(t_0) > 0$. Рассмотрим множество $S = \{u \in U \mid \|u - v\| \leqslant t_0\}$. В силу условий теоремы $J(u)$ ограничен снизу на S (см., например, [5]). Обозначим $\inf\limits_S J(u) = J^* > -\infty$.

Пусть теперь $u \in U \setminus S$. Тогда $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\mu(t_0)}{\mu(\|u-v\|)}} < 1$ и из (1) получаем: $\alpha_0 J(u) \geqslant J(v + \alpha_0(u-v)) - (1-\alpha_0) J(v) + \alpha_0(1-\alpha_0)\mu(\|u-v\|)$. Заметим, что в силу леммы 1 $\mu(t_0) = \alpha_0^2 \mu(\|u-v\|) \geqslant \mu(\alpha_0 \|u-v\|)$. Следовательно, $v + \alpha_0(u-v) \in S$, а значит, $J(v + \alpha_0(u-v)) \geqslant J(v) - \varkappa$, где $\varkappa = J(v) - J^*$. Поэтому можно записать

$$\alpha_0 J(u) \geqslant \alpha_0 J(v) - \varkappa + \alpha_0(1-\alpha_0)\mu(\|u-v\|).$$

Отсюда имеем

$$J(u) \geqslant J(v) + (1-\alpha_0)\mu(\|u-v\|) - \frac{\varkappa}{\alpha_0} = J(v) + \mu(\|u-v\|) -$$

$$- \sqrt{\mu(\|u-v\|)} \left(\sqrt{\mu(t_0)} + \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu(t_0)}}\right) \geqslant J(v) +$$

$$+ \frac{1}{2}\mu(\|u-v\|) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu(t_0)} + \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu(t_0)}}\right)^2.$$

Таким образом, для всех

$$u \in U \setminus S \quad J(u) \geqslant J(v) + \frac{1}{2}\mu(\|u-v\|) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu(t_0)} + \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu(t_0)}}\right)^2.$$

Нетрудно видеть, что это неравенство остается верным при всех $u \in U$. Отсюда сразу следует, что $J(u)$ ограничен снизу на U, а множество $M(v)$ выпукло, замкнуто и ограничено. Так как $J^* = \inf\limits_U J(u) = \inf\limits_{M(v)} J(u)$, а пространство B рефлексивно, то выпуклый полунепрерывный снизу функционал достигает на U нижней грани хотя бы в одной точке $u^* \in U$ (см., например, [4]). Из того что $0 \in \partial J(u^*)$ и из неравенства (2) сразу следует оценка (5). Наконец, если $J(u)$ — строго выпуклый функционал, то корректность задачи минимизации $J(u)$ на U вытекает из оценки (5). Теорема 1 доказана.

Заметим, что известные нам из литературы аналогичные теоремы доказывались при более жестких ограничениях на функционал, например: в [5] (с. 148—149, теорема 10.7 и замечание к ней), в [9] (с. 337—339) аналогичные результаты получены для строго равномерно выпуклых функционалов при излишнем требовании ограниченности снизу. Заметим также, что в теореме 1 строгая равномерная выпуклость использовалась только при доказательстве корректности задачи минимизации. Приведем пример, показывающий, что для корректности одной только равномерной выпуклости функционала недостаточно. Пусть в пространстве l_2 задан функционал

$$J(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{k} + \xi\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1], \\ (t-1)^2, & t \geqslant 1 \end{cases}; \quad u = (x_1, x_2, \ldots).$$

Как будет показано в § 5 (теорема 3), этот функционал равномерно выпуклый. Ясно, что $u^* = 0$, $J(u^*) = 0$. Нетрудно видеть, что последовательность $u_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (единица стоит на k-м месте) будет минимизирующей, в то время как $\|u_k - u^*\| = \|u_k\| = 1$ для всех $k \geqslant 1$.

§ 3. Равномерно монотонные операторы. Обозначим через $\mathscr{D}(G)$ область определения отображения G, а через 2^U — множество всех подмножеств множества U.

Определение 3 (ср. с [6]). Многозначное отображение $G:\mathscr{D}(G)\to 2^{E^*}$, $\mathscr{D}(G)\subseteq E$, называется равномерно монотонным оператором, если

$$\langle y_1-y_2,\ x_1-x_2\rangle \geqslant \gamma(\|x_1-x_2\|) \tag{6}$$

для любых $x_1,\ x_2\in\mathscr{D}(G)$, $y_1\in G(x_1)$, $y_2\in G(x_2)$, где $\gamma(t)$ — неотрицательная функция, определенная при $t\geqslant 0$, такая, что $\gamma(t_0)<0$ для некоторого $t_0>0$.

Утверждение 1. Пусть $J(u)$ — равномерно выпуклый на выпуклом множестве $U\subseteq E$ функционал, такой, что $\partial J(u)\neq\varnothing$ для всех $u\in U$. Тогда $\partial J(u)$ — равномерно монотонный оператор, причем за $\gamma(t)$ в (6) в этом случае можно взять $2\delta(t)$, где $\delta(t)$ — модуль выпуклости функционала $J(u)$ на U.

Это утверждение следует из неравенства (3).

Утверждение 2. Пусть оператор G является равномерно монотонным на выпуклом множестве $\mathscr{D}(G)$ и выполнено неравенство (6). Тогда $\overline{\lim\limits_{t\to+0}}\ \dfrac{\gamma(t)}{t^2}<\infty$.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k>0$, $t_k\to 0$ при $k\to\infty$, такая, что $\gamma(t_k)>kt_k^2$. Зафиксируем некоторые $u,\ v\in\mathscr{D}(G)$, $u\neq v$, а также $z_1\in G(u)$, $z_2\in G(v)$. Пусть k — натуральное число, такое, что $t_k\leqslant\|u-v\|$. Обозначим

$$x_n=u+nt_k\frac{v-u}{\|v-u\|},\quad 0\leqslant n\leqslant N_k=\left[\frac{\|v-u\|}{t_k}\right].$$

Заметим, что $N_k\geqslant\dfrac{\|v-u\|}{2t_k}$. Выберем $y_n\in G(x_n)$, $1\leqslant n\leqslant N_k$, $y_0=z_1$. Тогда

$$\langle z_2-z_1,\ v-u\rangle=\sum_{n=1}^{N_k}\langle y_n-y_{n-1},\ v-u\rangle+\langle z_2-y_{N_k},\ v-u\rangle\geqslant$$

$$\geqslant N_k\sum_{n=1}^{N_k}\langle y_n-y_{n-1},\ x_n-x_{n-1}\rangle\geqslant N_k^2\gamma(t_k)>k\frac{\|u-v\|}{4}\to\infty$$

при $k\to\infty$. Противоречие доказывает утверждение.

Иногда при изучении сходимости численных методов решения вариационных неравенств рассматривается класс равномерно монотонных операторов с $\gamma(t)=ct^p$, $c=\mathrm{const}$, $p>1$. Утверждение 2 показывает, что при $1<p<2$ этот класс пуст. Заметим, что в условиях утверждения 2 вместо выпуклости $\mathscr{D}(G)$ достаточно требовать существование отрезка, целиком принадлежащего $\mathscr{D}(G)$.

§ 4. Достаточные условия равномерной выпуклости функционалов.

Лемма 2. Пусть $J(u)$ — выпуклая функция, определенная на отрезке $[a,\ b]\in R^1$, и пусть для любых точек $x,\ y\in(a,\ b)$, $x<y$, таких, что существуют $J'(x)$ и $J'(y)$, выполнено неравенство

$$J'(y)-J'(x)\geqslant\varkappa(y-x),$$

где $\varkappa(t)$ — неотрицательная, измеримая на $[0,\ b-a]$ функция. Тогда:

1) $\varkappa(t)$ суммируема на $[0,\ b-a]$;

2) для любого $\alpha\in[0,\ 1]$ выполнено неравенство

$$\alpha J(a)+(1-\alpha)J(b)-J(\alpha a+(1-\alpha)b)\geqslant\alpha(1-\alpha)\int_0^{b-a}\varkappa(t)\,dt. \tag{7}$$

Доказательство. Зафиксируем $\alpha\in(0,\ 1)$ и введем точку $c=\alpha a+(1-\alpha)b$; выберем некоторое ξ: $0<\xi<1$. Из выпуклости функции $J(u)$ следует, что она удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[c+\xi(a-c),\ c+\xi(b-c)]\subset(a,\ b)$, а значит, и абсолютно непрерывна на нем ([10]). Поэтому справедливы равенства

$$J(c+\xi(a-c))-J(c)=\int_c^{c+\xi(a-c)}J'(x)\,dx, \tag{8}$$

$$J(c+\xi(b-c))-J(c)=\int_c^{c+\xi(b-c)}J'(x)\,dx. \tag{9}$$

Введем параметр t, $0\leqslant t\leqslant\xi(b-a)$, и положим $x(t)=c-(1-\alpha)t$, $y(t)=c+\alpha t$. Умножая теперь (8) и (9) соответственно на α и $1-\alpha$ и складывая, получим

$$\alpha J(c+\xi(a-c))+(1-\alpha)J(c+\xi(b-c))-$$

$$-J(c)=\alpha(1-\alpha)\int_0^{\xi(b-a)}[J_y'(y(t))-J_x'(x(t))]\,dt\geqslant\alpha(1-\alpha)\int_0^{\xi(b-a)}\varkappa(t)\,dt. \tag{10}$$

Из выпуклости функции $J(u)$ следует ее полунепрерывность сверху в точках a и b. Переходя в (10) к пределу при $\xi\to 1-0$, получаем (7).

Теорема 2. Пусть функционал $J(u)$ определен на выпуклом множестве $U\subseteq E$ и $\partial J(u)\neq\varnothing$ для всех $u\in U$. Тогда, если для любых $u,\ v\in U$ найдутся $l(u)\in\partial J(u)$, $l(v)\in\partial J(v)$, такие, что

$$\langle l(u)-l(v),\ u-v\rangle\geqslant\xi(\|u-v\|), \tag{11}$$

где $\xi(t)$ — неотрицательная измеримая функция, отличная от нуля на множестве положительной меры, то функционал $J(u)$ является равномерно выпуклым на U с модулем выпуклости $\delta(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{\xi(\tau)}{\tau}\,d\tau$.

Доказательство. Выберем произвольные $u,\ v\in U$, $u\neq v$, и $\alpha\in(0,\ 1)$. Введем параметр x, $0\leqslant x\leqslant\|u-v\|$ и положим

$$S(x)=v+x\frac{u-v}{\|u-v\|}.$$

Обозначим $J(S(x))=J\left(v+x\dfrac{u-v}{\|u-v\|}\right)$ через $\bar J(x)$. При этом $\bar J(x)$ — выпуклая функция на $[0,\ \|u-v\|]$, и если $l(S(x))\in\partial J(S(x))$, то

$$\bar J'(x)=\frac{\langle l(S(x)),\ u-v\rangle}{\|u-v\|} \tag{12}$$

в тех точках x, где производная существует.

Пусть функция $\bar J(x)$ дифференцируема в точках x_1, x_2, $0<x_1<x_2<$ $<\|u-v\|$ и $l(S(x_i))\in\partial J(x_i)$, $i=1,\ 2$. Учитывая (11) и (12), получаем

$$J'(x_2) - J'(x_1) = \frac{\langle l(S(x_2)) - l(S(x_1)),\ S(x_2) - S(x_1)\rangle}{\| S(x_1) - S(x_2)\|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\xi(\| S(x_2) - S(x_1)\|)}{\| S(x_2) - S(x_1)\|} = \frac{\xi(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Теперь из леммы 2 следует, что

$$\alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) - J(\alpha u + (1-\alpha) v) =$$

$$= \alpha \bar{J}(\|u - v\|) + (1-\alpha)\bar{J}(0) - \bar{J}(\alpha\|u - v\|) \geqslant \alpha(1-\alpha)\int\limits_0^{\|u-v\|}\frac{\xi(t)}{t}\,dt.$$

Теорема доказана.

§ 5. *Примеры равномерно выпуклых функционалов.* Пользуясь теоремой 2, можно строить различные классы равномерно выпуклых функционалов.

Теорема 3. Пусть функция $\xi(t)$ определена при $t \geqslant 0$, суммируема на любом конечном отрезке, $\xi(0) = 0$ и $\xi(ct) \geqslant c\xi(t)$ для всех $c \geqslant 1$, $t \geqslant 0$. Тогда функционал $J(u) = \int\limits_0^{\|u\|_H} \xi(t)\,dt$ является равномерно выпуклым на всем гильбертовом пространстве H с модулем выпуклости $\delta(t) = \int\limits_0^t \xi\left(\frac{x}{2}\right)dx$. Если, кроме того, $\frac{\xi(x)}{x}$ выпукла на $(0, \infty)$, то можно взять $\delta(t) = 2\int\limits_0^t \xi\left(\frac{x}{2}\right)dx$, а если вогнута на $(0, \infty)$, то $\delta(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \xi(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $u, v \in H$ и пусть $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u \neq v$. Тогда $l(u) = \xi(\|u\|)\frac{u}{\|u\|} \in \partial J(u)$. Действительно, из неубывания и неотрицательности $\xi(t)$ следует, что

$$J(v) \geqslant \int\limits_0^{\|u\|} \xi(x)\,dx + \xi(\|u\|)(\|v\| - \|u\|) \geqslant J(u) + \left\langle \xi(\|u\|)\frac{u}{\|u\|},\ v - u\right\rangle$$

при всех $v \in H$. Проверим теперь выполнение условий теоремы 2.

Поскольку $\frac{\xi(t)}{t}$ монотонно возрастает, то

$$\langle l(u) - l(v),\ u - v\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi(\|u\|)}{\|u\|} - \frac{\xi(\|v\|)}{\|v\|}\right)(\|u\|^2 - \|v\|^2) +\right.$$

$$\left. + \|u - v\|^2\left(\frac{\xi(\|u\|)}{\|u\|} + \frac{\xi(\|v\|)}{\|v\|}\right)\right] \geqslant \frac{\|u - v\|^2}{2}\left(\frac{\xi(\|u\|)}{\|u\|} + \frac{\xi(\|v\|)}{\|v\|}\right) \quad (13)$$

и

$$\langle l(u) - l(v),\ u - v\rangle \geqslant \frac{\|u - v\|^2}{2}\cdot 2\,\frac{\xi\left(\frac{1}{2}(\|u\| + \|v\|)\right)}{\|u\| + \|v\|} \geqslant$$

$$\geqslant \|u - v\|\,\xi\left(\frac{\|u - v\|}{2}\right). \quad (14)$$

Если $\frac{\xi(t)}{t}$ выпукла при $t > 0$, то, воспользовавшись тем, что

$$\frac{\xi(\|u\|)}{\|u\|} + \frac{\xi(\|v\|)}{\|v\|} \geqslant 4\,\frac{\xi\left(\frac{1}{2}\|u\| + \frac{1}{2}\|v\|\right)}{\|u\| + \|v\|},$$

из (13) получим более точное, чем (14), неравенство

$$\langle l(u) - l(v),\ u - v\rangle \geqslant 2\|u - v\|^2\,\frac{\xi\left(\frac{1}{2}(\|u\| + \|v\|)\right)}{\|u\| + \|v\|} \geqslant$$

$$\geqslant 2\|u - v\|\,\xi\left(\frac{\|u - v\|}{2}\right). \quad (15)$$

Наконец, пусть $\frac{\xi(t)}{t}$ вогнута $t > 0$. Тогда $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\xi(t)}{t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ вогнута на $[0, \infty)$, а значит,

$$\frac{\|u\|}{\|u\| + \|v\|}\varphi(\|u\| + \|v\|) \leqslant \varphi(\|u\|);\quad \frac{\|v\|}{\|u\| + \|v\|}\varphi(\|u\| + \|v\|) \leqslant \varphi(\|v\|).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{\xi(\|u\|)}{\|u\|} + \frac{\xi(\|v\|)}{\|v\|} \geqslant \frac{\xi(\|u\| + \|v\|)}{\|u\| + \|v\|}.$$

Отсюда и из (13) имеем

$$\langle l(u) - l(v),\ u - v\rangle \geqslant \frac{\|u - v\|^2}{2}\cdot\frac{\xi(\|u\| + \|v\|)}{\|u\| + \|v\|} \geqslant \frac{\|u - v\|}{2}\,\xi(\|u - v\|). \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что неравенства (14), (15) или (16) выполняются и тогда, когда $u = 0$ (или $v = 0$), ибо в этом случае можем взять $l(0) = 0 \in \partial J(0)$. Для завершения доказательства осталось применить теорему 2.

Пример. Пусть $J(u) = \|u\|_H^p$, $u \in H$, $p \geqslant 2$. Тогда $\xi(t) = pt^{p-1}$. Поэтому $\delta(t) = t^2$ при $p = 2$, $\delta(t) = \frac{1}{2}t^p$ при $2 < p < 3$ и $\delta(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} t^p$ при $p \geqslant 3$. Более детальные исследования показывают, что точный модуль выпуклости $J(u)$ на H есть $\mu(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} t^p$ при всех $p \geqslant 2$.

Функционал $J(u) = \|u\|_E^\gamma$, $u \in E$, $\gamma \geqslant 2$ будет равномерно выпуклым на E и для некоторых пространств, не являющихся гильбертовыми. Мы докажем равномерную выпуклость этого функционала для пространств l_p и L_p при $\gamma \geqslant p \geqslant 2$. Для доказательства нам потребуется следующая

Лемма 3. Если выпуклый функционал $J(u)$, определенный на выпуклом множестве U, удовлетворяет неравенству

$$J\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) \leqslant \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v) - \varkappa(\|u - v\|) \quad (17)$$

при всех $u, v \in U$, где $\varkappa(t) \geqslant 0$, $\varkappa(t_0) > 0$ для некоторого $t_0 > 0$, то функционал $J(u)$ является равномерно выпуклым на U с модулем выпуклости $\delta(t) = 2\varkappa(t)$.

Доказательство. Выберем произвольные $u, v\in U$ и $\alpha\in(0, 1/2]$. Из выпуклости $J(u)$ и из (17) получаем

$$J(\alpha u+(1-\alpha)v) = J\left(2\alpha\frac{u+v}{2}+(1-2\alpha)v\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\alpha J\left(\frac{u+v}{2}\right)+(1-2\alpha)J(v)\leqslant \alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-$$

$$-\alpha(1-\alpha)2\varkappa(\|u-v\|),$$

откуда следует, что $\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-J(\alpha u+(1-\alpha)v)\geqslant 2\alpha(1-\alpha)\times\varkappa(\|u-v\|)$. Аналогично проверяется справедливость этого неравенства и при $\alpha\in[1/2, 1)$. Заметим, что условие (17) в общем случае неравносильно равномерной выпуклости $J(u)$ в смысле определения 1. В самом деле, пусть функция $f(t)$, $-\infty<t<\infty$ удовлетворяет неравенству $f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2} f(t_1)+\frac{1}{2} f(t_2)$ при всех t_1, t_2 и разрывна ([11], с. 119). Тогда функция $g(t)=t^2+f(t)$ удовлетворяет условию (17) с $\varkappa(t)=\frac{1}{4} t^2$, но не будет равномерно выпуклой.

Теорема 4. Функционал $J(u)=\|u\|^\gamma$, определенный на l_p или L_p, является равномерно выпуклым на всем пространстве при $\gamma\geqslant p\geqslant 2$ с модулем выпуклости $\delta(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}t^\gamma$.

Доказательство. Покажем, что если неравенство

$$2\|u\|^\gamma+2\|v\|^\gamma\leqslant\|u+v\|^\gamma+\|u-v\|^\gamma \qquad (18)$$

верно при $\gamma=\gamma_0>0$, то оно верно при всех $\gamma>\gamma_0$. Возьмем $\gamma>\gamma_0$ и пусть $\|v\|\geqslant\|u\|>0$ (если $u=0$, то доказательство очевидно). Тогда

$$2\|u\|^\gamma+2\|v\|^\gamma\leqslant\|v\|^\gamma\left(2\left\|\frac{u}{\|v\|}\right\|^{\gamma_0}+2\right).$$

Воспользуемся неравенством (18) при $\gamma=\gamma_0$. Получим

$$2\|u\|^\gamma+2\|v\|^\gamma\leqslant\|v\|^\gamma\left(\left\|\frac{u}{\|v\|}+\frac{v}{\|v\|}\right\|^{\gamma_0}+\left\|\frac{u}{\|v\|}-\frac{v}{\|v\|}\right\|^{\gamma_0}\right).$$

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha)=\left\|\frac{u}{\|v\|}+\frac{v}{\|v\|}\right\|^\alpha+\left\|\frac{u}{\|v\|}-\frac{v}{\|v\|}\right\|^\alpha.$$

Заметим, что $f(\alpha)$ выпукла при $\alpha\geqslant 0$ и, кроме того, $f(0)=2$.

$$f(\gamma_0)=\left\|\frac{u}{\|v\|}+\frac{v}{\|v\|}\right\|^{\gamma_0}+\left\|\frac{u}{\|v\|}-\frac{v}{\|v\|}\right\|^{\gamma_0}\geqslant 2\left\|\frac{u}{\|v\|}\right\|^{\gamma_0}+2>2.$$

Поэтому $f(\alpha)$ возрастает при $\alpha\geqslant\gamma_0$. Следовательно,

$$2\|u\|^\gamma+2\|v\|^\gamma\leqslant\|v\|^\gamma f(\gamma_0)\leqslant\|v\|^\gamma f(\gamma)=\|u+v\|^\gamma+\|u-v\|^\gamma,$$

т. е. неравенство (18) доказано. Однако при $\gamma=p\geqslant 2$ неравенство (18) верно в l_p (или L_p) — это известное неравенство Кларксона ([12]). Следовательно,

$$2\|u\|^\gamma+2\|v\|^\gamma\leqslant\|u+v\|^\gamma+\|u-v\|^\gamma \qquad (19)$$

для всех $u, v\in l_p$ (или L_p) и всех $\gamma\geqslant p\geqslant 2$. Возьмем в (19) $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$. Тогда получим

$$2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^\gamma+2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^\gamma\leqslant\|x\|^\gamma+\|y\|^\gamma,$$

т. е.

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^\gamma\leqslant\frac{1}{2}\|x\|^\gamma+\frac{1}{2}\|y\|^\gamma-\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\|x-y\|^\gamma.$$

Поэтому в силу леммы 3 имеем

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|^\gamma\leqslant\alpha\|x\|^\gamma+(1-\alpha)\|y\|^\gamma-\alpha(1-\alpha)\delta(\|x-y\|),$$

где $\delta(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}t^\gamma$, $\gamma\geqslant p\geqslant 2$. Теорема 4 доказана.

Заметим, что функционалы $J(u)=\|u\|^\gamma_E$, $u\in E$, являются равномерно выпуклыми не при всех $\gamma>1$. Верна следующая

Теорема 5. Функционал $J(u)=\|u\|^\gamma_E$, $u\in E$, не является равномерно выпуклым на всем пространстве ни при каких $\gamma\in(1, 2)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что функция $J(x)=x^\gamma$, $1<\gamma<2$, не является равномерно выпуклой на $[0, \infty)$. Действительно, пусть $J(x)$ — равномерно выпуклая функция на $[0, \infty)$ с модулем $\delta(t)$. Зафиксируем $t\geqslant 0$. Тогда в силу (2) $0\leqslant\delta(t)\leqslant J(x+t)-J(x)-J'(x)t=(J'(x+\theta t)-J'(x))t=\theta t^2 J''(x+\theta_1 t)\leqslant t^2\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}\to 0$ при $x\to\infty$. Значит, $\delta(t)\equiv 0$.

Тем не менее для равномерно выпуклых пространств E удается доказать равномерную выпуклость функционала $J(u)=\|u\|^\gamma$, $\gamma>1$, на любом ограниченном множестве из E. Напомним, что нормированное пространство E называется равномерно выпуклым, если существует неубывающая на $[0, 2]$ функция $\delta(t)$, $\delta(0)=0$, $\delta(t)>0$ при $t>0$, такая, что из $u, v\in E$, $\|u\|\leqslant 1$, $\|v\|\leqslant 1$, $\|u-v\|=t$, следует $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\leqslant 1-\delta(t)$ при любом $t\in[0, 2]$ (ср. с [12]).

Теорема 6. Пусть U — выпуклое ограниченное множество равномерно выпуклого пространства E. Тогда функционал $J(u)=\|u\|^\gamma_E$ будет строго равномерно выпуклым на U при любом $\gamma>1$.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $U=\{u\in E \mid \|u\|\leqslant R\}$, $R>0$. Пусть $\|u\|\leqslant\|v\|\leqslant R$ и $\|u-v\|=t$, $0<t\leqslant 2R$. Тогда $\frac{t}{2}\leqslant\|v\|\leqslant R$. Рассмотрим два возможных случая:

1) если $\|v\|-\|u\|\leqslant\frac{t}{2}\delta\left(\frac{t}{R}\right)$, то с учетом равномерной выпуклости пространства E получаем

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|=\|v\|\left\|\frac{u+v}{2\|v\|}\right\|\leqslant\|v\|-\frac{t}{2}\delta\left(\frac{t}{R}\right)\leqslant\frac{\|u\|+\|v\|}{2}-\frac{t}{4}\delta\left(\frac{t}{R}\right).$$

Отсюда и из выпуклости функции t^γ при $t\geqslant 0$ следует

$$\frac{\|u\|^\gamma+\|v\|^\gamma}{2}\geqslant\left(\frac{\|u\|+\|v\|}{2}\right)^\gamma\geqslant\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|+\frac{t}{4}\delta\left(\frac{t}{R}\right)\right)^\gamma\geqslant$$

$$\geqslant\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^\gamma+\left(\frac{t}{4}\delta\left(\frac{t}{R}\right)\right)^\gamma;$$

2) если $\|v\|-\|u\|>\frac{t}{2}\delta\left(\frac{t}{R}\right)$, то $\|u\|=\beta\|v\|$, где

$$0\leqslant\beta<1-\frac{t}{2R}\delta\left(\frac{t}{R}\right).$$

Пользуясь выпуклостью $\|u\|$, имеем

$$\frac{\|u\|^\gamma+\|v\|^\gamma}{2}-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^\gamma\geqslant\frac{\|u\|^\gamma+\|v\|^\gamma}{2}-\left(\frac{\|u\|+\|v\|}{2}\right)^\gamma=$$

$$=\|v\|^\gamma\left(\frac{1+\beta^\gamma}{2}-\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^\gamma\right)\overset{\Delta}{=}\varphi_\gamma(\beta)\|v\|^\gamma.$$

Так как функция $\varphi_\gamma(\beta)$ убывает при $0\leqslant\beta\leqslant1$, то

$$\varphi_\gamma(\beta)\geqslant\varphi_\gamma\left(1-\frac{t}{2R}\delta\left(\frac{t}{R}\right)\right)>\varphi_\gamma(1)=0.$$

Следовательно,

$$\frac{\|u\|^\gamma+\|v\|^\gamma}{2}-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^\gamma\geqslant\|v\|^\gamma\varphi_\gamma(\beta)\geqslant\left(\frac{t}{2}\right)^\gamma\varphi_\gamma\left(1-\frac{t}{2R}\delta\left(\frac{t}{R}\right)\right).$$

Объединяя оба рассмотренных случая, получим

$$\frac{\|u\|^\gamma+\|v\|^\gamma}{2}-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^\gamma\geqslant$$

$$\geqslant\min\left\{\left(\frac{t}{4}\delta\left(\frac{t}{R}\right)\right)^\gamma,\ \left(\frac{t}{2}\right)^\gamma\left(\frac{1+\left(1-\frac{t}{2R}\delta\left(\frac{t}{R}\right)\right)^\gamma}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(1-\frac{t}{4R}\delta\left(\frac{t}{R}\right)\right)^\gamma\right)\right\}\overset{\Delta}{=}\varkappa(t).$$

Отсюда и из леммы 3 следует строгая равномерная выпуклость функционала $\|u\|_E^\gamma$ с модулем $2\varkappa(t)$. Теорема 6 доказана.

Как известно ([12]), пространства l_p и L_p при $p>1$ равномерно выпуклы (в [12] приводится определение равномерно выпуклого пространства, эквивалентное нашему). Из теоремы 6 тогда следует равномерная выпуклость функционалов $\|u\|_{l_p}^\gamma$, $\|u\|_{L_p}^\gamma$ на любом выпуклом ограниченном множестве из l_p и соответственно L_p при $p>1$, $\gamma>1$.

Может показаться, что равномерно выпуклые функционалы существуют только на равномерно выпуклых пространствах. Однако это не так. В самом деле, в двумерном пространстве с нормой $\max\{|x_1|, |x_2|\}$ функционал $|x_1|^2+|x_2|^2$ является равномерно выпуклым.

§ 6. Об условиях существования равномерно выпуклых функционалов.

Теорема 7. Если в банаховом пространстве B существует определенный на всем пространстве равномерно выпуклый функционал $J(u)$, ограниченный на каждом ограниченном множестве, то пространство B рефлексивно.

Доказательство. При каждом $k=1, 2, \ldots$ мы можем выбрать $c_k>0$ так, чтобы на шаре радиуса k с центром в точке 0 функционал $c_kJ(ku)$ был ограничен сверху величиной 2^{-k}. Тогда, как нетрудно видеть, функционал $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_kJ(ku)$ будет строго равномерно выпуклым и

ограниченным на каждом ограниченном множестве. Это дает нам возможность считать $J(u)$ строго равномерно выпуклым. Из выпуклости и ограниченности на ограниченных множествах функционала $J(u)$ следует, что он удовлетворяет условию Липшица на каждом ограниченном множестве, а значит, и непрерывен. Поэтому каждое множество $M(v)=\{u\in B\,|\,J(u)\leqslant J(v)\}$ выпукло и замкнуто. Его ограниченность можно доказать почти так же, как в теореме 1, используя ограниченность снизу $J(u)$ в некоторой окрестности точки v. Убедимся в том, что $J(u)$ достигает минимума на любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве U. Действительно, пусть $J^*=\inf\limits_U J(u)$ и $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность. Для любых n, m справедливы неравенства

$$J^*\leqslant J\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right)\leqslant\frac{J(u_n)+J(u_m)}{2}-\frac{1}{4}\mu(\|u_n-u_m\|).$$

Из строгой равномерной выпуклости $J(u)$ следует, что $\{u_n\}$ — последовательность Коши, а следовательно, сходится к точке $u^*\in U$. Функционал $J(u)$ непрерывен, поэтому $J(u^*)=J^*$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 из [2], откуда следует рефлексивность B.

Авторы благодарны Ф. П. Васильеву и В. Г. Карманову за постановку задач и научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитин Е. С., Поляк Б. Г. О сходимости минимизирующих последовательностей в задаче на условный экстремум. — ДАН СССР, 1966, **168**, № 5, 997—1000.
2. Поляк Б. Т. Теоремы существования и сходимости минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений. — ДАН СССР, 1966, **166**, № 2, 287—290.
3. Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений. — ЖВМ и МФ, 1966, **6**, № 5, 787—823.
4. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л., 1968.
5. Любич Ю. И., Майстровский Г. Д. Общая теория релаксационных процессов для выпуклых функционалов. — «Успехи мат. наук», 1970, **25**, вып. 1, 57—112.
6. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972.
7. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М., 1974.
8. Карманов В. Г. Математическое программирование. М., 1975.
9. Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Е. Г. Вариационные методы оптимального управления объектов. М., 1976.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., 1973.
11. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.
12. Hanner O. On the uniform convexity of L^p and l^p. — «Arkiv för matematik», 1955, Bd 3, N 19, 239—244.

Поступила в редакцию
28.6 1977 г.
Кафедра
исследования операций