т. е. в квадратичную форму задачи:

$$-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\, u|_{\Gamma} = 0.$$

К решению последней в метрике (7) сходятся при $\varepsilon \to 0$ решения исходной задачи.

Число примеров легко можно было бы увеличить. Аналогичным образом исследуются задачи с неоднородными граничными условиями. Заметим, что последний пример не может быть разобран на основании результатов замечания 2, но требует применения общей теоремы. Замечание 3 позволяет ввести в рассмотренные дифференциальные операторы несамосопряженные младшие члены.

Summary

It is proved for self-adjoint positive-definite operators in Hilbert space that the convergence of quadratic forms implies the convergence of the suitable inverse operators. This result is applied to linear elliptic boundary value problems with small parameter by the highest derivatives.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Ладыженская. Об уравнениях с малым параметром при старших производных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными. Вестн. ЛГУ, 1957, № 7, вып. 2.
2. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, дополнение, Гостехиздат, 1948.
3. С. Г. Михлин. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1950.
4. М. Г. Крейн. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и её приложения. I. Матем. сб., т. 20, вып. 3, 1947.
5. С. Л. Соболев. Некоторые приложения функционального анализа к математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.
6. М. Ш. Бирман. О минимальных функционалах для эллиптических дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. XCII, № 2, 1953.
7. М. Ш. Бирман. Вариационные методы решения краевых задач, аналогичные методу Треффтца. Вестник ЛГУ, 1956, № 13, вып. 3.
8. K. Friedrichs. Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 61, № 6, 1955.
9. K. Friedrichs. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Math. Ann., Bd. 109, № 4—5, 1934.
10. T. Kato. Perturbation theory of semi – bounded operators. Math. Ann., Bd. 125, № 5, 1953.

Статья поступила в редакцию 15 II 1957 г.

Б. З. Вулих

ЧАСТИЧНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ КОЛЕЦ ОГРАНИЧЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ*

§ 1

В множестве ограниченных самосопряженных операторов (в дальнейшем вместо „ограниченный самосопряженный оператор" пишем сокращенно — о. с. о.) в гильбертовом пространстве H естественным образом вводится частичное упорядочение, если считать, что оператор $A > 0$ тогда и только тогда, когда $(Ah, h) \geqslant 0$ для любого $h \in H$ и при этом $A \neq 0$. Однако при таком упорядочении множество всех о. с. о. не является даже структурой. Р. Кадисон доказал, что оно оказывается антиструктурой, т. е. $A \vee B$ существует тогда и только тогда, когда A и B сравнимы между собой ($A \leqslant B$ или $A \geqslant B$) [3]. В то же время, как показал ряд недавних исследований, теория структур и, особенно, теория линейных полуупорядоченных пространств (K-пространств) могут быть успешно применены к исследованию самосопряженных операторов. Следует отметить, что идеи теории частично упорядоченных множеств уже давно использовались в работах, посвященных самосопряженным операторам. Весьма широко такой подход к изучению самосопряженных операторов проводится, например, в известной книге Ф. Рисса и Б. С.-Надя [8]. Однако в настоящей статье мы имеем в виду не только использование идей, но и применение конкретных фактов теории полуупорядоченных пространств, что в ряде случаев дает возможность получать теоремы о самосопряженных операторах, как простые следствия из общих фактов теории K-пространств. С этой целью прежде всего в множестве всех о. с. о. нужно выделить такие подмножества, которые являются K-пространствами. В этом направлении различными авторами был получен ряд результатов ([6], [9], [12]), которые содержатся в приводимой ниже теореме 1.

В множестве всех о. с. о. вводим сильную топологию. В этой топологии окрестность произвольного оператора A_0 определяется по любому конечному набору элементов $h_1, \ldots, h_n \in H$ и любому числу $\varepsilon > 0$ как совокупность всех о. с. о. A, для которых

$$\|Ah_k - A_0 h_k\| < \varepsilon \text{ при } k = 1, 2, \ldots, n^{**}.$$

Подмножество A о. с. о. называется сильно замкнутым, если оно замкнуто в сильной топологии.

Теорема 1. *Всякое сильно замкнутое кольцо* **A** *о. с. о. — K-пространство.*

* Основные результаты этой работы были доложены автором на Всесоюзном Совещании по функциональному анализу в январе 1956 г.

** Сходимость направленного множества A_α к A в сильной топологии означает, что $A_\alpha h \to Ah$ для любого $h \in H$.

Доказательство. Если $A \in \mathbf{A}$, то и $A^2 \in \mathbf{A}$. Из доказательства по методу последовательных приближений теоремы о существовании квадратного корня из положительного о. с. о. следует, что $\sqrt{A^2}$ представим как предел сильно сходящейся последовательности операторов из $\mathbf{A}$.* Поэтому $\sqrt{A^2} \in \mathbf{A}$. Кроме того, всякое кольцо о. с. о. — обязательно коммутативно. А тогда, по доказанному в книге [8], § 108,

$$\sqrt{A^2} = A \vee (-A), \quad \frac{1}{2}(\sqrt{A^2} + A) = A \vee 0,$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{A^2} - A) = (-A) \vee 0,$$

т. е. в $\mathbf{A}$ существуют A_+, A_- и $|A|$. Но если для каждого $A \in \mathbf{A}$ существует A_+, то для любых $A, B \in \mathbf{A}$ в этом кольце существует $A \vee B = A + (B - A)_+$ и, следовательно, $\mathbf{A}$ — K-линеал. Остается проверить, что в $\mathbf{A}$ выполнена аксиома о существовании верхней грани для любого ограниченного сверху множества.

Пусть $\mathbf{A}' = \{A_\xi\}$ — произвольное подмножество из $\mathbf{A}$ и пусть все $A_\xi \leqslant B$, где $B \in \mathbf{A}$. Присоединяя к $\mathbf{A}'$ supremum'ы всех его конечных подмножеств, что не изменит его верхней границы B, можно уже само $\mathbf{A}'$ считать направленным по возрастанию (в широком смысле). Но для направленного по возрастанию, ограниченного сверху множества о. с. о. совершенно так же, как для обычной монотонной последовательности, доказывается существование сильного предела, т. е. $A_\xi h \to Ah$ при любом $h \in H$, где A — о. с. о.** Иными словами, $A_\xi \to A$ в сильной топологии, а так как $\mathbf{A}$ сильно замкнуто, то $A \in \mathbf{A}$. Кроме того, из неравенства $(A_\xi h, h) \leqslant (Bh, h)$, справедливого при любом $h \in H$, вытекает, что $(Ah, h) \leqslant (Bh, h)$, т. е. $A \leqslant B$. Таким образом, $A = \sup \mathbf{A}'$. Теорема доказана.

Заметим, что если кольцо $\mathbf{A}$ в теореме 1 предположить только сильно (σ)-замкнутым (т. е. если оно должно содержать пределы всех обычных сильно сходящихся последовательностей своих элементов), то совершенно аналогично можно доказать, что $\mathbf{A}$ — K^--пространство, т. е. аксиома о существовании граней выполнена в нем лишь для счетных ограниченных множеств.

Для дальнейших приложений важно иметь еще некоторые сведения о структуре K-пространства $\mathbf{A}$, рассмотренного в предыдущей теореме.

---

* [7, стр. 260]. В этом доказательстве метод последовательных приближений применяется к уравнению $B = B + \frac{1}{2}(A - B^2)$, равносильному уравнению $B^2 = A$.

** Если использовать перестановочность операторов из $\mathbf{A}$ между собой, то доказательство можно провести по такой схеме (ср. [7], стр. 259). Положим $C_\xi = B - A_\xi$. Множество $\{C_\xi\} \subset \mathbf{A}$ состоит из положительных операторов и направлено по убыванию. При $C_{\xi'} \leqslant C_\xi$ операторы $(C_\xi - C_{\xi'}) C_\xi$ и $C_{\xi'}(C_\xi - C_{\xi'})$ положительны и

$$0 \leqslant (C_{\xi'}^2 h, h) \leqslant (C_{\xi'} C_\xi h, h) \leqslant (C_\xi^2 h, h)$$

при любом $h \in H$. Отсюда следует, что

$$\lim (C_\xi^2 h, h) = \lim (C_{\xi'} C_\xi h, h).$$

Используя это равенство; легко получить, что

$$\lim \| C_\xi h - C_{\xi'} h \|^2 = 0,$$

т. е. существует $\lim C_\xi h$, а, следовательно, и $\lim A_\xi h$.

Возьмем любой $A \in \mathbf{A}$ и пусть M — подпространство нулей оператора A_-. Тогда для $g \in M$ $Ag = A_+ g$. Обозначим через N ортогональное дополнение к M. Тогда множество Δ значений оператора A_- плотно в N. Если $g \in \Delta$, т. е. $g = A_- h$, то $Ag = AA_- h$. Но так как $A_+ A_- = 0$, то

$$AA_- = (A_+ - A_-) A_- = -A_-^2,$$

а потому $Ag = -A_-^2 h = -A_- g$, следовательно, $A_+ g = 0$. По непрерывности A_+ отсюда вытекает, что $A_+ h = 0$ для всех $h \in N$. Таким образом, H раскладывается на два ортогональных подпространства так, что на одном из них $A = A_+$ и $A_- = 0$, а на другом $A = -A_-$ и $A_+ = 0$.*

Кроме того, легко видеть, что подпространства нулей операторов A и $|A|$ совпадают.

Лемма. *Пусть A и B — произвольные операторы из $\mathbf{A}$. Для того чтобы они были дизъюнктны, необходимо и достаточно, чтобы пространство H раскладывалось на два ортогональных подпространства H_1 и H_2 так, что $A = 0$ на H_1 и $B = 0$ на H_2.*

Доказательство. Благодаря предыдущему замечанию достаточно рассмотреть случай, когда $A, B \geqslant 0$.

а) Пусть $A \wedge B = 0$, т. е. $A - (B - A)_- = 0$. Отсюда $A = (B - A)_-$. Но мы уже знаем, что по оператору $B - A$ можно найти такие ортогональные подпространства H_1 и H_2, что $H = H_1 \oplus H_2$ и $(B - A)_- = 0$ на H_1, а $B - A = -(B - A)_-$ на H_2. Тогда $A = 0$ на H_1, а на H_2 имеем $B - A = -A$, т. е. $B = 0$.

б) Пусть условие леммы выполнено. Положим $C = A \wedge B$. Тогда $C \geqslant 0$ и

$$\text{при } h \in H_1 \quad 0 \leqslant (Ch, h) \leqslant (Ah, h) = 0,$$

$$\text{при } h \in H_2 \quad 0 \leqslant (Ch, h) \leqslant (Bh, h) = 0,$$

откуда $(Ch, h) = 0$ при всех $h \in H$, т. е. $C = 0$.

Теорема 2. *Если сильно замкнутое кольцо $\mathbf{A}$ содержит тождественный оператор I, то он может быть принят в $\mathbf{A}$ за единицу K-пространства. В этом случае база K-пространства $\mathbf{A}$ будет состоять из всех проекторов, входящих в $\mathbf{A}$, а само $\mathbf{A}$ будет K-пространством ограниченных элементов.*

Доказательство. Проверим, сначала, что I обладает свойством единицы в $\mathbf{A}$. Пусть $A \in \mathbf{A}$, $A \geqslant 0$ и $A \wedge I = 0$. По лемме $H = H_1 \oplus H_2$, причем $A = 0$ на H_1, а $I = 0$ на H_2. Последнее означает, что H_2 состоит из нулевого элемента, а тогда $H_1 = H$ и $A = 0$ на всем H.

Если A — произвольный оператор из $\mathbf{A}$ и m, M — его грани, то из неравенства

$$(mIh, h) = m(h, h) \leqslant (Ah, h) \leqslant M(h, h) = (MIh, h)$$

следует, что $mI \leqslant A \leqslant MI$, т. е. A — ограниченный элемент.

Пусть проектор $P \in \mathbf{A}$ и $PH = M$. Тогда оператор $I - P$ проектирует H на $H \ominus M$. По лемме отсюда сразу следует, что $P \wedge (I - P) = 0$, т. е. P — единичный элемент из $\mathbf{A}$.

Обратно, пусть A — произвольный единичный элемент из $\mathbf{A}$, N — подпространство его нулей, M — ортогональное дополнение к N. Так как $A \wedge (I - A) = 0$, то из леммы сразу следует, что $I - A = 0$ на M, т. е. $A = I$ на M. Вместе с тем, что $A = 0$ на N, это и означает, что A — оператор проектирования H на M. Теорема доказана.

---

* Для краткости мы говорим, что $A = B$ на подпространстве H', если $Ah = Bh$ для всех $h \in H'$.

K — пространство ограниченных элементов может быть превращено в полуупорядоченное кольцо с единицей умножения, совпадающей с единицей пространства [1]. Так как умножение операторов в $\mathbf{A}$, очевидно, удовлетворяет всем условиям, входящим в определение полуупорядоченного кольца с единицей умножения I, то из единственности умножения следует, что операторное умножение совпадает с умножением элементов в $\mathbf{A}$, как в полуупорядоченном кольце. Отсюда тоже легко вывести, что база K-пространства $\mathbf{A}$ состоит из всех проекторов, входящих в $\mathbf{A}$. Действительно, проекторы и единичные элементы характеризуются одним и тем же условием $P^2 = P$.

Откажемся теперь от требования, чтобы $I \in \mathbf{A}$. Для каждого $A \in \mathbf{A}$ обозначим через M_A ортогональное дополнение к подпространству его нулей, а через M обозначим линейную замкнутую оболочку совокупности всех M_A. Пусть E — оператор проектирования H на M. Известно, что, вследствие сильной замкнутости кольца $\mathbf{A}$, $E \in \mathbf{A}$ и называется главной единицей кольца $\mathbf{A}$.* Подпространство M инвариантно для всех $A \in \mathbf{A}$, поэтому можно ограничиться рассмотрением всех операторов $A \in \mathbf{A}$ только на M, а тогда E станет тождественным оператором. Если теперь воспользоваться теоремой 2, то мы придем к следующему более общему результату.

Теорема 3. *Главная единица E кольца $\mathbf{A}$ может быть принята в $\mathbf{A}$ за единицу K-пространства. В этом случае $\mathbf{A}$ будет K-пространством ограниченных элементов, а его база, как и в теореме 2, будет состоять из всех проекторов, входящих в $\mathbf{A}$.*

Остается в силе и замечание к теореме 2 о совпадении двух умножений в $\mathbf{A}$.

Заметим еще, что если кольцо $\mathbf{A}$ сильно (σ)-замкнуто и, следовательно, является K^--пространством, то теорема 2 остается в силе. Однако в этом случае, если пространство H не сепарабельно, то уже нельзя доказать существование главной единицы в $\mathbf{A}$.

Приведем один пример. Рассмотрим гильбертово пространство l_2^c, состоящее из всех комплексных функций $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ таких, что каждая из них может быть отлична от нуля не более, чем на счетном множестве точек, а

$$\sum_{t \in [0, 1]} |x(t)|^2 < +\infty.$$

Скалярное произведение в l_2^c определяется равенством

$$(x, y) = \sum_{t \in [0, 1]} x(t)\, \overline{y(t)}.$$

Пусть $\mathbf{A}$ состоит из всех о. с. о. A, реализуемых в виде оператора умножения на ограниченную борелеву вещественную функцию $\alpha(t)$:

$$Ax \longleftrightarrow \alpha(t)\, x(t).$$

Легко проверить, что сильная сходимость последовательности $\{A_n\}$ из $\mathbf{A}$ означает, что соответствующая последовательность функций $\{\alpha_n(t)\}$ ограничена и при каждом t сходится. Отсюда сразу следует, что $\mathbf{A}$ сильно (σ)-замкнуто. Соотношение $A \geqslant 0$ для операторов из $\mathbf{A}$ равносильно $\alpha(t) \geqslant 0$.

* Это доказано, например, в работе М. Стоуна [11]. Элементарное доказательство существования главной единицы мы приводим в дополнении к настоящей статье.

Согласно сказанному выше, $\mathbf{A}$ — K^--пространство. Чтобы убедиться, что $\mathbf{A}$ не K-пространство, возьмем какое-нибудь не борелево множество $T \subset [0, 1]$. Каждому $\tau \in T$ сопоставим проектор $P_\tau \in \mathbf{A}$, определяемый функцией

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = \tau, \\ 0, & \text{если } t \neq \tau. \end{cases}$$

Однако $\sup\limits_{\tau \in T} P_\tau$ в $\mathbf{A}$ не существует, так как ясно, что не существует наименьшей борелевой функции, которая превосходит все $p_\tau(t)$.

В этом кольце $\mathbf{A}$ содержится тождественный оператор I (он соответствует функции $\alpha(t) \equiv 1$). Но нетрудно изменить кольцо $\mathbf{A}$ так, чтобы в нем не было главной единицы. Для этого достаточно в $\mathbf{A}$ включить только операторы умножения на ограниченные борелевы функции $\alpha(t)$, равные нулю вне некоторого заданного не борелева множества $T \subset [0, 1]$.

§ 2

Чтобы иметь возможность при исследовании самосопряженных операторов использовать теорию K-пространств, приходится обычно заключать рассматриваемые операторы в такие множества, которые являются K-пространствами. Например, если задан о. с. о. A, то его можно заключить в сильно замкнутое кольцо $(A)''$, состоящее из всех о. с. о., перестановочных с любым о. с. о., который в свою очередь коммутирует с A. Используя в $(A)''$ теорему 2 о структуре базы, мы сразу увидим, что теорема о спектральном разложении оператора A является частным случаем общей теоремы об интегральном представлении элементов K-пространства. В. Д. Любовин показал, что таким же путем, используя понятие соединения K-пространств, легко получить спектральное разложение и для неограниченных самосопряженных операторов [5]. Из других примеров применения теории K-пространств к исследованию о. с. о. мы остановимся здесь на доказательстве известной теоремы Неймана (для о. с. о.). Для этого придется использовать понятие измеримой функции от элемента K-пространства, введенное В. И. Соболевым [10].

Пусть X — K-пространство с единицей, E — его база, являющаяся, как известно, полной булевой алгеброй. Возьмем элемент $\xi \in X$ и пусть e_λ — его непрерывная слева характеристика. Для полузамкнутых промежутков вида $\Delta = [\lambda_0, \lambda_1)$, называемых основными, на вещественной прямой R, к которой присоединена точка $-\infty$, определяем меру по формуле

$$\mu(\Delta) = e_{\lambda_1} - e_{\lambda_0} \quad (-\infty \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < +\infty).$$

Дальнейшая конструкция класса измеримых множеств на прямой R может быть проведена так же, как в теории Лебега*. Сначала по аддитивности определяется мера любой конечной или счетной системы неналегающих основных промежутков, затем для произвольного множества A на прямой определяется внешняя мера

$$\mu^* A = \inf_{A \subset \Gamma} \mu \Gamma,$$

где Γ — произвольная система основных промежутков, покрывающая A. Внутренняя мера может быть определена формулой

$$\mu_* A = 1 - \mu^*(R \setminus A).$$

* Подробное изложение см., например, в моей работе [2].

Наконец, если $\mu^*A = \mu_*A$, то множество A называется измеримым, а общее значение μ^*A и μ_*A — просто мерой и обозначается μA.

Определенная таким образом мера со значениями в базе E обладает почти всеми обычными свойствами меры Лебега и лишь для доказательства счетной аддитивности меры μ приходится подчинить K-пространство X или его базу E некоторому дополнительному условию. Например, достаточно предположить, что, каков бы ни был $e_0 \in E$, $e_0 > 0$, на базе E существует функция $\varphi(e)$ с вещественными числовыми значениями:

а) не отрицательная,

б) аддитивная для дизъюнктных слагаемых,

в) удовлетворяющая условию вполне непрерывности — для любой вполне упорядоченной убывающей (в широком смысле) последовательности элементов $e_\alpha \in E$ из $\inf e_\alpha = 0$ следует, что $\inf \varphi(e_\alpha) = 0$,

г) такая, что $\varphi(e_0) > 0$.

Далее обычным образом вводится понятие вещественной измеримой функции $F(\lambda)\,(-\infty < \lambda < +\infty)$ и строится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, d\mu(e)$. Если функция $F(\lambda)$ ограничена почти всюду (т. е. за исключением множества, мера которого $\mu = 0$), то интеграл непременно существует и представляет ограниченный элемент K-пространства X. Этот элемент обозначаем $F(\xi)$ и называем его функцией от элемента ξ.

В частности, если за X взять кольцо A, рассмотренное в § 1, а за ξ какой-нибудь оператор $A \in A$, то построенные функции превращаются в те функции от оператора A, которые рассматриваются в теории операторов в гильбертовом пространстве.

Пусть теперь H — *сепарабельное* гильбертово пространство; A — сильно замкнутое кольцо о. с. о. на H. По теореме 1 A — K-пространство, а структура его базы описывается теоремой 2 (или 3)*. В [2] доказано, что база в A удовлетворяет тому дополнительному условию, которое обеспечивает счетную аддитивность меры со значениями в этой базе.** По одной теореме Неймана [8, стр. 386] A сепарабельно относительно сильной сходимости. Но В. Д. Любовиным доказано, что в A сильная сходимость совпадает с (t)-сходимостью [6]; поэтому A сепарабельно относительно (t)-сходимости, а следовательно, и относительно (o)-сходимости. Далее, K-пространство A элементарно, т. е. на его базе существует (o)-непрерывная, аддитивная для дизъюнктных слагаемых, существенно положительная числовая функция. Чтобы построить такую функцию, возьмем полную ортонормальную систему элементов $h_n \in H$ и положим для любого проектора $P \in A$

$$\varphi(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \| P h_n \|^2.$$

Аддитивность и существенная положительность этой функции φ очевидны, а ее (o)-непрерывность вытекает из (o)-непрерывности каждого члена ряда (если $P_k \xrightarrow{(o)} P$, то $P_k h_n \to P h_n$ при любом n) и равномерной сходимости ряда относительно $P \in A$.

* Мы считаем, что единица в A выбрана так, как указано в этих теоремах.

** Проведенное в [2] рассуждение справедливо для любого сильно замкнутого кольца, если H сепарабельно.

Известно, что элементарное сепарабельное K-пространство X ограниченных элементов изоморфно или K-пространству M почти всюду ограниченных измеримых функций на отрезке [0, 1], или дискретному K-пространству ограниченных числовых последовательностей с не более чем счетным множеством ортов (т. е. или пространству m или n-мерному пространству R_n), или их соединению [4, гл. XIII, § 4]. Выбирая в первом случае функцию $x(t) = t$, во втором — элемент, все координаты которого различны и лежат вне [0, 1], а в третьем — их соединение, а затем переходя к соответствующему элементу ξ из X, мы сразу увидим, что все элементы $x \in X$ представимы как функции от ξ*. Возвращаясь к кольцу A, мы получаем, что в этом кольце имеется такой оператор $A \in A$, что все операторы $B \in A$ суть функции от A.

Теперь уже сразу можно получить следующую важную теорему Неймана: в сепарабельном гильбертовом пространстве H для произвольного множества B попарно перестановочных о. с. о существует такой о. с. о A (может быть и не входящий в B), что все операторы из B суть функции от A. Действительно, множество B можно заключить в некоторое сильно замкнутое кольцо A и воспользоваться предыдущими результатами.

В частности, если взять $A = B''$, то оператор A окажется перестановочным с любым о. с. о, который коммутирует с каждым оператором из B.

§ 3

Дополнение. Приведем доказательство существования главной единицы в сильно замкнутом кольце A.

Сначала докажем, что если $A \in A$, $A \geqslant 0$, N — подпространство нулей оператора A, M — его ортогональное дополнение и P — оператор проектирования H на M, то $P \in A$.

Не уменьшая общности, можно считать, что $\|A\| \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant A \leqslant I$. Положим $B_0 = A$ и при $n = 1, 2, \ldots$ $B_n = \sqrt{B_{n-1}}$. Тогда при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|B_n\| = (\|A\|)^{1/2^n} \leqslant 1,$$

откуда $0 \leqslant B_n \leqslant I$. Кроме того,

$$B_{n+1} - B_n = B_{n+1}(I - B_{n+1}) \geqslant 0,$$

а тогда последовательность $\{B_n\}$ имеет сильный предел $P_0 \geqslant A$. Из соображений, упомянутых при доказательстве теоремы 1, следует, что все $B_n \in A$, а тогда и $P_0 \in A$. Далее, из равенства $B_n = B_{n+1}^2$ после перехода к пределу получаем $P_0 = P_0^2$, т. е. P_0 — проектор.

Из определения квадратного корня сразу следует, что $B_n h = 0$ при $h \in N$, каково бы ни было n**, откуда и $P_0 h = 0$. С другой стороны, если $h \in M$ и $h \neq 0$, то $(Ah, h) > 0$ и потому, тем более, $(P_0 h, h) >$ и $P_0 h \neq 0$. Таким образом, проектор P_0 проектирует H на M, т. е. $P_0 = P$.

Теперь покажем, что среди проекторов $P \in A$ имеется максимальный. Рассмотрим множество всех проекторов $\{P_\xi\}$, входящих в A.

* Этот результат можно установить и не опираясь на теорему о реализации элементарного сепарабельного K-пространства.

** Например, при $n = 1$

$$(B_1 h, B_1 h) = (B_1^2 h, h) = (Ah, h) = 0.$$

Проверим, что оно направлено по возрастанию (в широком смысле). Пусть P', P'' — проекторы из A. Тогда в A входит

$$P' \vee P'' = \frac{P' + P'' + |P'' - P'|}{2}.$$

Но

$$|P'' - P'| = \sqrt{(P'' - P')^2} = \sqrt{P' + P'' - 2P'P''}.$$

Легко проверить, что под корнем стоит проектор, а так как корень из проектора равен ему самому, то $|P'' - P'| = P' + P'' - 2P'P''$. Таким образом,

$$P' \vee P'' = P' + P'' - P'P''.$$

Возводя в квадрат, убеждаемся, что $(P' \vee P'')^2 = P' \vee P''$, т. е. $P' \vee P''$ — проектор.

Так как все $P_\xi \leqslant I$, а множество $\{P_\xi\}$ направлено по возрастанию, то существует сильный предел $P = \lim P_\xi$, причем $P \in A$, вследствие сильной замкнутости последнего. Кроме того, из равенства $P_\xi^2 = P_\xi$ вытекает, что $P^2 = P$, т. е. P — проектор. А из неравенства $P_\xi \leqslant P$ вытекает, что подпространства $P_\xi H \subset PH$. Следовательно, проектор P и есть главная единица кольца A.

Summary

We consider the set of all bounded self-adjoint operators in a Hilbert space as partially ordered with the usual definition of positive operators. It is known that this set is even not a lattice.

In § 1 we prove quite shortly that every strongly closed ring A of bounded self-adjoint operators is a K-space. Furthermore, the principal unit E of the ring A can be taken in A as a unit of the K-space. In this case A will be a K-space of bounded elements and its base will consist of all projectors belonging to A.

In § 2 we obtain the important Neumann's theorem about functions of self-adjoint operators in a Hilbert space as a simple consequence of a general theorem about functions of elements in a K-space.

In § 3 we give an elementary proof of the existence of the principal unit in every strongly closed ring of bounded self-adjoint operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Вулих. Обобщенные полуупорядоченные кольца. Математ. сб., **33**, 1953, 343—358.
2. Б. З. Вулих. О булевой мере. Уч. Зап. Лен. Гос. Педагогич. Института им. Герцена, 125, 1956, 95—114.
3. R. V. Kadison. Ordler properties of bounded self-adjoint operators. Proc. A. M. S. **2**, 1951, 505—510.
4. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, 1950.
5. В. Д. Любовин. К спектральному разложению самосопряженных операторов. УМН XI, 1956, вып. 4, 139—142.
6. В. Д. Любовин. О K-пространстве ограниченных самосопряженных операторов. Уч. Зап. Лен. Гос. Педагог. Института им. Герцена, 125, 1956, 119—155.
7. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, 1951.
8. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. ИЛ, 1954.

9. В. И. Соболев. Об одном свойстве самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. УМН VII, 1952, вып. 4, 169—172.
10. В. И. Соболев. О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах. ДАН СССР, **91**, 1953, № 1, 23—26.
11. M. H. Stone. On unbounded operators in Hilbert space. J. Indl. M. S., 15, 1951, 155—192.
12. J. M. G. Fell and J. L. Kelley. An algebra of unbounded operators. Proc. Nat. Ac USA 38, 1952, 592—598.

Статья поступила в редакцию 16 VI 1956 г.