Orlicz序列空间l_M中单位球的端点

王　作　强

关于*Banach*空间中的端点，由于其明显的几何意义及其在空间凸性研究中所起的作用，早已引起数学界的关注。1966年，*Lindenstrauss*就着眼于具体*Banach*空间l_1中端点问题，得到了任何可分对偶空间中的有界闭凸集上至少存在一个端点[1]。本文讨论了*Orlicz*序列空间l_M中关于*Orlicz*范数与*Luxemburg*范数的单位球的端点问题，进而得出了*Orlicz*序列空间l_M严格凸的充要条件。

本文中所给函数M(x)均为M—函数。

（一）

定义1[2] 我们称M(x)为M—函数，假如有表达式：

$$M(x)=\int_0^{|x|}p(t)dt$$

其中$p(t)$为定义在$[0,\infty)$上的非减右连续函数，$p(t)\geqslant 0$，且有

$i)\ p(0)=0$;

$ii)$ 当$t>0$时，$p(t)>0$。

定义2[2] 一个M—函数称为对较小x满足Δ_2—条件，假如对任意$Q>0$，存在$K>0$，$x_0>0$使当$0\leqslant x\leqslant x_0$时

$$M(Qx)\leqslant KM(x)$$

定义3[3] 设X是一线性空间，E是X—子集，点$x\in E$称为E的端点，是指不存在点y，$z\in E$使$\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=x$。

（二）

引理1[4] 设(X，$\|\cdot\|$)是一线性赋范空间，X严格凸的充要条件是X关于$\|\cdot\|$的单位球面上的点均为单位球的端点。

引理2[2] 在*Orlicz*序列空间(l_M，$\|\cdot\|_M$)中，对所有点$x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_M$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i\leqslant\|x\|_M,\qquad 如果\sum_{i=1}^{\infty}N(y_i)\leqslant 1\ ;\quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leqslant \|x\|_M \cdot \sum_{i=1}^{\infty} N(y_i)\text{，如果}\sum_{i=1}^{\infty} N(y_i)>1 \quad (**)$$

这里$N(y)$为$M(x)$的余函数。

引理3 在 *Orlicz* 序列空间l_M中，点$x\in l_M$的模$\rho(x;M)$与*Orlicz* 范数$\|x\|_M$有如下的关系：

当$\|x\|_M\leqslant 1$ 时，$\rho(x;M)\leqslant\|x\|_M$ 。

证 设$x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_M$，$\|x\|_M\leqslant 1$。先证必有$y=\{p(x_i)\}_{i=1}^{\infty}\in l_N$，$p(t)$为$M(x)$的右导数，$N(y)$为$M(x)$的余函数。若$\rho(y;N)>1$，则由*Young*不等式[5]有

$$N[p(x_i)]<M(x_i)+N[p(x_i)]=x_i p(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} N[p(x_i)]<\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

由引理2的(**)式有

$$\sum_{i=1}^{\infty} N[p(x_i)]<\|x\|_M\cdot\sum_{i=1}^{\infty} N[p(x_i)]$$

即

$$\|x\|_M>1$$

矛盾。所以，$\rho(x;N)\leqslant 1$，即$y\in l_N$。再由*Young*不等式

$$M(x_i)\leqslant M(x_i)+N[p(x_i)]=x_i p(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)\leqslant\|x\|_M$$

即$\rho(x;M)\leqslant\|x\|_M$ 。

定理1 在*Orlicz* 序列空间$(l_M,\|\cdot\|_M)$中，对任意一点$x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\|x\|_M=1$。若i) $\sum_{i=1}^{\infty} M(x_i)=1$；ii)集合$\{i:|x_i|\in G\}$至多为单元素集（其中$G=\bigcup(\alpha,\beta)$，$\alpha>0$，$M(x)$在$[\alpha,\beta]$上的图形为直线段），则$x$必为单位球的端点。

证 设$x\in l_M$，$\|x\|_M=1$，在单位球中任取两点$y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$，$z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$，即$\|y\|_M\leqslant 1$，$\|z\|_M\leqslant 1$。由引理3有

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(y_i)\leqslant 1,\qquad \sum_{i=1}^{\infty} M(z_i)\leqslant 1。$$

设$\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=x$，则由

$$1=\sum_{i=1}^{\infty} M(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty} M\left(\frac{y_i+z_i}{2}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{M(y_i)+M(z_i)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}M(y_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}M(z_i)\leqslant 1$$

知

$$\sum_{i=1}^{\infty}M(y_i)=\sum_{i=1}^{\infty}M(z_i)=1 \qquad (***)$$

若 $y\neq z$，则至少有一 $i_0\geqslant 1$ 使 $y_{i_0}\neq z_{i_0}$

1^0如果 $|x_{i_0}|\overline{\in}G$，则

$$M(x_{i_0})=M\left(\frac{y_{i_0}+z_{i_0}}{2}\right)<\frac{1}{2}M(y_{i_0})+\frac{1}{2}M(z_{i_0})$$

于是

$$1=\sum_{i=1}^{\infty}M(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{y_i+z_i}{2}\right)<\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{\infty}M(y_i)+\sum_{i=1}^{\infty}M(z_i)\right]=1$$

矛盾。

2^0如果 $|x_{i_0}|\in G$，则 $x_{i_0}\neq 0$，再由 $\frac{y_{i_0}+z_{i_0}}{2}=x_{i_0}$知$y_{i_0}\neq -z_{i_0}$，由$M(x)$严格单调且对称知$M(y_{i_0})\neq M(z_{i_0})$。根据（$***$）式知 $\sum\limits_{i\neq i_0}M(y_i)\neq\sum\limits_{i\neq i_0}M(z_i)$，这说明至少有一$j_0\neq i_0$使$M(y_{j_0})\neq M(z_{j_0})$。由条件 $ii)$显然有$|x_{j_0}|\overline{\in}G$，于是

$$M(x_{j_0})=M\left[\frac{y_{j_0}+z_{j_0}}{2}\right]<\frac{1}{2}M(y_{j_0})+\frac{1}{2}M(z_{j_0})$$

从而

$$1=\sum_{i=1}^{\infty}M(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{y_i+z_i}{2}\right)<\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{\infty}M(y_i)+\sum_{i=1}^{\infty}M(z_i)\right]=1$$

矛盾。综上所述，必有$y=z$。

（三）

引理 4 [6] $(l_M,\|\cdot\|_{(M)})$中关于$\|\cdot\|_{(M)}$的单位球与关于模的单位球相等。

引理 5 设 $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_M$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}M\left[\frac{x_i}{\|x\|_{(M)}}\right]=1$的充要条件是对较小$x$，$M(x)$满足 Δ_2 一条件。

证 取一列数$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{x_i}{r_n}\right)\leqslant 1$，且使得 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\|x\|_{(M)}$。于是，对任意$N$有

$$\sum_{i=1}^{N}M\left[\frac{x_i}{r_n}\right]\leqslant 1 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

令$n\to\infty$得

$$\sum_{i=1}^{N}M\left[\frac{x_i}{\|x\|_{(M)}}\right]\leqslant 1$$

再令$N\to\infty$得

$$\sum_{i=1}^{\infty}M\left[\frac{x_i}{\|x\|_{(M)}}\right]\leqslant 1$$

下面证必要性：

假定$M(x)$不对较小x满足Δ_2一条件，则可造正数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$x_1>x_2>\cdots>0$，$x_n\to 0(n\to\infty)$使

$$M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n\right]>2^nM(x_n)$$

由上式及$x_n\to 0(n\to\infty)$可知，存在n_1使当$n\geqslant n_1$时有$\left[\frac{1}{2^nM(x_n)a}\right]>0$，其中$a>1$为固定数，〔$x$〕为$x$的整数部分。作自然数集$N$的互不相交子集$A_n$，使$A_n$中自然数个数为

$$\left[\frac{1}{2^nM(x_n)a}\right]。$$

定义

$$y_i=\begin{cases}x_n\ ,\ i\in A_n\\ 0\ ,\ i\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\end{cases}\qquad(i=1,2,\cdots)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}M(y_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in A_n}M(y_i)=\sum_{n=1}^{\infty}M(x_n)\left[\frac{1}{2^nM(x_n)a}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}M(x_n)\cdot\frac{1}{2^nM(x_n)a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^na}=\frac{1}{a}<1<\infty$$

所以点$y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_M$。

若$r\geqslant 1$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{y_i}{r}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}M(y_i)<1$$

若$r<1$，则存在自然数n_2，使当$n\geqslant n_2$时，$\frac{1}{r}>1+\frac{1}{n_2}$。于是取$n_0=max\{n_1,n_2\}$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{y_i}{r}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in A_n}M\left(\frac{y_i}{r}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}M\left(\frac{x_n}{r}\right)\left[\frac{1}{2^nM(x_n)a}\right]\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}M\left(\frac{v_n}{r}\right)\frac{1}{2^{n+1}M(x_n)a}\geqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n\right]\frac{1}{2^{n+1}M(x_n)a}\geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} M(x_n)2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}M(x_n)a} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2a} = \infty。$$

由 *Luxemburg* 范数定义可知$\| y \|_{(M)}=1$，但

$$\sum_{i=1}^{\infty} M\left(\frac{y_i}{\| y \|_{(M)}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(y_i) < 1$$

矛盾。

充分性 设$M(x)$对较小x满足Δ_2一条件，即对任意$r>0$，存在$K>0, x_0>0$，当$0<x_i<x_0$ $(i=1,2,\cdots)$ $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_M$时

$$M\left(\frac{x_i}{r}\right) \leqslant KM(x_i) \quad (i=1,2,\cdots)$$

由此推知

$$\sum_{i=1}^{\infty} M\left(\frac{x_i}{r}\right) < \infty$$

取一列递减趋于0的正数列$\varepsilon_n (n=1, 2, \cdots)$ $\|x\|_{(M)}>\varepsilon_n$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} M\left[\frac{x_i}{\| x \|_{(M)}-\varepsilon_1}\right] \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} M\left[\frac{x_i}{\| x \|_{(M)}-\varepsilon_n}\right] > 1$$

于是存在充分大的N，使

$$\sum_{i=1}^{N} M\left[\frac{x_i}{\| x \|_{(M)}-\varepsilon_n}\right] \geqslant 1$$

令$n\to\infty$有

$$\sum_{i=1}^{N} M\left[\frac{x_i}{\| x \|_{(M)}}\right] \geqslant 1$$

令$N\to\infty$得

$$\sum_{i=1}^{\infty} M\left[\frac{x_i}{\| x \|_{(M)}}\right] \geqslant 1$$

由前面所证

$$\sum_{i=1}^{\infty} M\left[\frac{x_i}{\| x \|_{(M)}}\right] \leqslant 1 \quad 得 \sum_{i=1}^{\infty} M\left[\frac{x_i}{\| x \|_{(M)}}\right] = 1。$$

定理2 在*Orlicz*序列空间$(l_M, \| \cdot \|_{(M)})$中，点$x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \|x\|_{(M)}=1$为单位球的端点的充要条件是i) $\sum_{i=1}^{\infty} M(x_i)=1$；ii)集$\{i: |x_i|\in G\}$至多为单元素集。其中$G=\bigcup(\alpha,\beta)$，$\alpha>0$，$M(x)$在$[\alpha,\beta]$上的图形为直线段。

证 对点x，$\| x \|_{(M)}=1$，任取单位球中两点$y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}, z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使$\frac{y+z}{2}=x$。

由引理 4 得 $\sum_{i=1}^{\infty} M(y_i)\leqslant 1$， $\sum_{i=1}^{\infty} M(z_i)\leqslant 1$。再根据定理 1 的证明，充分性即得证。

必要性 i）设 $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_M$，$\|x\|_{(M)}=1$ 为单位球的端点，假定 $\sum_{i=1}^{\infty} M(x_i)<1$

若 $x_1\geqslant 0$，则由

$$M(x_1)<1-\sum_{i=2}^{\infty} M(x_i)$$

以及 $M(x)$ 的连续性，可选取 $\varepsilon>0$，使

$$M(x_1+\varepsilon)\leqslant 1-\sum_{i=2}^{\infty} M(x_i)$$

定义

$$y_i=\begin{cases} x_1+\varepsilon, & i=1 \\ x_i, & i\neq 1 \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$z_i=\begin{cases} x_1-\varepsilon, & i=1; \\ x_i, & i\neq 1。 \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

若 $x_1<0$，同样可选取 $\varepsilon>0$ 使

$$M(x_1-\varepsilon)\leqslant 1-\sum_{i=2}^{\infty} M(x_i)$$

此时定义

$$y_i=\begin{cases} x_1-\varepsilon, & i=1; \\ x_i, & i\neq 1。 \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$z_i=\begin{cases} x_1+\varepsilon, & i=1; \\ x_i, & i\neq 1。 \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

上面两种情形均有

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(y_i)\leqslant 1; \qquad \sum_{i=1}^{\infty} M(z_i)\leqslant 1。$$

即 $y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 及 $z=\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $(l_M,\|\cdot\|_{(M)})$ 中单位球的点，且 $x=\dfrac{y+z}{2}$，但 $y\neq z$。这与 x 为单位球的端点矛盾。

ii）假定存在 $i\neq j$ 使 $x_i\in(\alpha,\beta)$，$x_j\in(a,b)$，这里的 (α,β)，$(a,b)\subset G$。设 $M(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$，$[a,b]$ 上的直线段斜率为 k_1 和 k_2。于是对任意 $x\in[\alpha,\beta]$，$y\in[a,b]$ 有

$$M(x)=k_1(x-x_i)+M(x_i)$$

$$M(y)=k_2(y-x_j)+M(x_j)$$

选取正数 ε_1，ε_2 使 $k_1\varepsilon_1=k_2\varepsilon_2$，且 $x_i\pm\varepsilon_1\in[\alpha,\beta]$，$x_j\pm\varepsilon_2\in[a,b]$。易见，这样的 ε_1，ε_2，是存在的。定义

$$y_n=\begin{cases}x_i+\varepsilon_1, & n=i;\\ x_j-\varepsilon_2, & n=j;\\ x_n, & n\neq i,j。\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$z_n=\begin{cases}x_i-\varepsilon_1, & n=i\\ x_j+\varepsilon_2, & n=j\\ x_n, & n\neq i,j\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}M(y_n)&=\sum_{i\neq i,j}M(y_n)+M(y_i)+M(y_j)\\&=\sum_{n\neq i,j}M(y_n)+M(x_i+\varepsilon_1)+M(x_j-\varepsilon_2)\\&=\sum_{n\neq i,j}M(x_n)+k_1(x_i+\varepsilon_1-x_i)+M(x_i)+k_2(x_j-\varepsilon_2-x_j)+M(x_j)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}M(x_n)+k_1\varepsilon_1-k_2\varepsilon_2\\&=\sum_{n=1}^{\infty}M(x_n)\\&=1\end{aligned}$$

同样有

$$\sum_{n=1}^{\infty}M(z_n)=1$$

由引理 4 知$\|y\|_{(M)}\leqslant1$，$\|z\|_{(M)}\leqslant1$。又$\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=x$，但$y\neq z$。这与 x 为单位球的端点矛盾。

定理 3 在$Orlicz$序列空间$(l_M,\|\cdot\|_{(M)})$中，单位球面上的点均为单位球的端点的充要条件是 i)$M(x)$对较小 x 满足Δ_2一条件；

ii)$M(x)$ 在$\left[0,M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$上的图形无直线段。

证 必要性 i)设$M(x)$不对较小x满足Δ_2一条件，则可找到数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，x_n 单调趋于 0，使

$$M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n\right]>2^nM(x_n)$$

作自然数集N的互不相交子集$A_n(n=1,2,\cdots)$使A_n中自然数个数为$\left[\frac{1}{2^nM(x_n)a}\right](a>$

1）$[x]$表示x的整数部分。

定义

$$y_i=\begin{cases}x_n, & i\in A_n;\\ 0, & i\overline{\in}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n。\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots)$$

由引理5的必要性证明可知$\|y\|_{(M)}=1$，但$\sum\limits_{i=1}^{\infty}M(y_i)<1$。根据定理2的i)，$y$不是单位球的端点，矛盾。

ii)设$M(x)$在$[\alpha,\beta]$上有直线段，$M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant\beta>\alpha>0$。作自然数集$N$的互不相交子集$G_1$，$G_2$，$G_3$使$G_1$中自然数个数$=G_2$中自然数个数$=1$，$G_3$中自然数个数$=m$

定义

$$x_i^{(1)}=\begin{cases}\alpha, & i\in G_1\\ \beta, & i\in G_2\\ b, & i\in G_3\\ 0, & i\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{3}G_i\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots)$$

$$x_i^{(2)}=\begin{cases}\beta, & i\in G_1\\ \alpha, & i\in G_2\\ b, & i\in G_3\\ 0, & i\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{3}G_i\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots)$$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty}M(x_i^{(1)})=\sum_{i\in G_1}M(\alpha)+\sum_{i\in G_2}M(\beta)+\sum_{i\in G_3}M(b)$$

$$=[M(\alpha)+M(\beta)]+M(b)m$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}M(x_i^{(2)})=\sum_{i\in G_1}M(\beta)+\sum_{i\in G_2}M(\alpha)+\sum_{i\in G_3}M(b)$$

$$=[M(\beta)+M(\alpha)]+M(b)m$$

由$M(x)$在$[\alpha,\beta]$上为直线段可推出

$$\sum_{i=1}^{\infty}M\left[\frac{x_i^{(1)}+x_i^{(2)}}{2}\right]=2M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M(b)m$$

$$=[M(\alpha)+M(\beta)]+M(b)m=1$$

如取定 m，则只 要取 $b=M^{-1}\left[\frac{1-M(\alpha)-M(\beta)}{m}\right]$即可。由 Luxemburg 范数定义，对 $x^{(1)}=\{x_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$，$x^{(2)}=\{x_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$有

$$\|x^{(1)}\|_{(M)}=\|x^{(2)}\|_{(M)}=1,\quad \|x^{(1)}+x^{(2)}\|_{(M)}=2$$

令$x=\frac{x^{(1)}+x^{(2)}}{2}$，则$\|x\|_{(M)}=1$。由定理条件，$x$为单位球的端点，从而$x^{(1)}=x^{(2)}$，但从$x^{(1)}$与$x^{(2)}$的定义可见$x^{(1)}\neq x^{(2)}$。矛盾。

根据引理 1 即得定理 3 的推论：

推论 l_M关于$\|\cdot\|_{(M)}$严格凸的充要条件是

i) $M(x)$对较小 x 满足Δ_2一条件；

ii) $M(x)$ 在$\left[O,M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$上的图形无直线段。

如称从某项之后全为 0 的点$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N,\ 0,\ 0,\ \cdots)$为有限维点，则有

定理 4 设对M—函数$M(x)$存在点$x_0>0$，使$M(x)$在$[0,\ x_0]$上图形无直线段，则在$(l_M,\ \|\cdot\|_{(M)})$中的单位球面上必存在非有限维端点。

证 由$x_0>0$知，$M(x_0)>0$。对于x_0，总可以找到一个自然数n_0，使当$n\geq n_0$时，$\frac{1}{2n}<M(x_0)$任取正整数$N_1\geq n_0$，则

$$\frac{1}{2N_1}<M(x_0)$$

由$M(x)$的单调增加性及$M(x)$的连续性，存在点x_1，$0<x_1<x_0$，使

$$M(x_1)=\frac{1}{2N_1}<M(x_0)$$

同理，对任意自然数$N_2\geq n_0$，存在点x_2，$0<x_2<x_0$，使

$$M(x_2)=\frac{1}{2^2N_2},\qquad \frac{1}{2^2M(x_2)}=N_2$$

如此下去，由归纳法可得到一点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$0<x_n<x_0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$且使得

$$\frac{1}{2^nM(x_n)}=N_n$$

为正整数。

作自然数集N的互不相交子集$A_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$使 A_n 中自然数个数为

$$N_n=\frac{1}{2^nM(x_n)}$$

定义

$$y_i=\begin{cases}x_i, & i\in A_n;\\ 0, & i\overline{\in}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n。\end{cases}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(y_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in A_n} M(y_i) = \sum_{n=1}^{\infty} M(x_n) \cdot \frac{1}{2^n M(x_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

从而有$\|y\|_{(M)} = 1$。因$M(x)$在$[0, x_0]$上的图形无直线段，且对所有x_i，$0<x_i<x_0$，所以$\{i : y_i \in G\} = \phi$，由定理2，$y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$为单位球的端点。

参 考 文 献

[1] J.Lindenstrauss On extreme pointsin l_1, Israel J. of Math 4, No, 1(1966) 59—61

[2] *K*. Lindberg, On subspaces Of Orlicz Sequence Spaces, Studia Mathematica, T.XLV (1973)

[3] 关肇直、张恭庆、冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社 1979

[4] L.Namioka, Neighborhoods of points, Israel, J. Math 5, 145—152, 1967

[5] M.A. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ ИЯ.Б. РУТИЦКИЙ凸函数和奥尔里奇空间 吴从炘译 科学出版社 1962

[6] 任重道，关于 Orlicz 序列空间的模与范数，湘潭大学学报1(1980)