蘇州大學

硕士学位论文

（2009届）

Orlicz-Lorentz空间中的端点

Extreme Points of Orlicz-Lorentz Spaces

研究生姓名 王晶晶

指导教师姓名 严亚强（教授）

专业名称 基础数学

研究方向 泛函分析

论文提交日期 2009年5月

苏州大学学位论文独创性声明及使用授权声明

学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果．除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得苏州大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料．对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明．本人承担本声明的法律责任．

研究生签名：王晶晶 日期：2009.4.

学位论文使用授权声明

苏州大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆、清华大学论文合作部、中国社科院文献信息情报中心有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文．本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致，除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容．论文的公布（包括刊登）授权苏州大学学位办办理．

研究生签名：王晶晶 日期：2009.4

导 师 签 名：严亚琼 日期：2009.5.13

摘 要

自从 A.Kamińska 1990 年提出了 Orlicz–Lorentz 空间的概念以来，涌现出大量关于赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的研究成果. 但 1999 年吴从炘和任丽伟对 Orlicz–Lorentz 空间赋以 Orlicz 范数以后，关于这种范数的 Orlicz–Lorentz 空间的研究成果却很少，并且缺乏系统性. 本文的主要工作： 1. 探讨 Orlicz–Lorentz 空间中的一些还未被验证的范数定理，收敛定理以及子空间定理. 2. 给出赋 Luxemburg 范数的 Orlicz-Lorentz 序列空间的端点的刻划. 3. 给出赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间的端点的刻划. 我们证明了：在 $w(t)>0$ 的条件下， $x \in S\left(\Lambda^0_{\varphi,w}\right)$ 是端点当且仅当对任意的 $k \in K(x)$, 要么 $k|x(t)| = g(t) \in S$, 要么 $k|x(t)| = \alpha\chi_A$, 其中 $\alpha \in S'$ 且 $m(\sigma(A) \cap L(w)) = 0$.

全文共分为三个章节，分别有所侧重地进行了某一方面的研究.

第一章是奠定基础的一章，主要是结合已有的 Orlicz 空间中的基本理论来讨论 Orlicz–Lorentz 序列空间上的一些相对应的基础定理.

第二章继续考虑序列空间的情况，在参考了有关函数空间里关于 Luxemburg 范数的端点理论已知结果的情况下，给出并证明了序列空间中关于 Luxemburg 范数的端点的刻划.

在最后一章，我们转向函数空间，该章也是最有难度的一章，我们重点研究了赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间中端点的等价刻划.

关键词：端点； Orlicz-Lorentz 空间； Luxemburg 范数； Orlicz 范数；严格凸空间

作　　者：王晶晶

指导老师：严亚强教授

Abstract

Since A.Kamińska gave the notion of Orlicz–Lorentz space in 1990, many conclusions about the Orlicz–Lorentz space with the Luxemburg norm have been obtained. Wu and Ren's giving the Orlicz norm of Orlicz–Lorentz space in 1999, the results about the Orlicz–Lorentz space with this norm was sporadic, and lack of system. The main work of this paper is: 1. Discussed norm theorems, convergence theories and subspacees theorems in Orlicz–Lorentz sequence space, which had not been checked. 2.Gave the the characterization of extreme points in Orlicz–Lorentz sequence space with the Luxemburg norm. 3.Gave the the characterization of extreme points in function space with the Orlicz norm.We verified that: If $w(t) > 0$,then $x \in S\left(\Lambda^0_{\varphi,w}\right)$ is an extreme point if and only if for every $k \in K(x)$, either $k|x(t)| = g(t) \in S$, or $k|x(t)| = \alpha\chi_A$,with $\alpha \in S'$ and $m(\sigma(A) \cap L(w)) = 0$.

This paper has three chapters, each of them investigated different aspect respectively.

The first chapter laid a fundation for this paper, it mainly discussed the corresponding fundamental theories in Orlicz–Lorentz sequence space which combined with the existing fundamental theories of Orlicz space, it also laid a fundation for the investigation of extreme points in the second and thrid chapters.

The second chapter kept on to consider the sequence space. Referenced to the theory of extreme points in function space with the Luxemburg norm , obtained the characterization of extreme points in sequence space with the Luxemburg norm.

In the last chapter, we turned to the function space. It is also the most difficult chapter. We mainly studied the characterization of extreme points in Orlicz–Lorentz space with the Orlicz norm.

Keywords: Extreme points; Orlicz-Lorentz spaces; Luxemburg norm; Orlicz norm; rotund space

Written by Wang Jingjing

Supervised by Prof. Yan Yaqiang

目 录

引言 1

第一章 Orlicz–Lorentz 序列空间的基本理论 4

第一节 范数性质 5

第二节 收敛定理 8

第三节 子空间 11

第二章 赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 序列空间的端点 14

第三章 赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的端点 19

参考文献 30

攻读硕士期间发表和待发表的论文 32

致谢 33

引 言

一 背景

在 A.Kamińska 1990 年的论文 (见 [1]) 中, 赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的端点被刻划了出来, 此后在其论文 (见 [2]) 中, 又给出并证明了在 $\gamma \leq \infty$ 的情况下该空间一致凸的等价性条件. 1995 年, A.Kamińska 又与 P.Lin 以及 H.Sun 一起, 在论文 (见 [3]) 中刻划出一致赋范结构的等价条件. 紧接着在 H.Hudzik, A.Kamińska 和 M.Mastylo 1996 年合著的论文 [4] 中, 得出了 $\gamma \leq \infty$ 的情况下 Orlicz–Lorentz 空间的一致非方性的等价条件以及一系列关于该空间性质的结论. 1997 年, 吴从炘和任丽伟 (见 [5]) 又给出了 Orlicz–Lorentz 空间局部一致凸的等价刻划. 2007 年在 A.Kamińska 与 C.Lennard, M.Mastylo 以及 S.Mikuska 合著的论文 [6] 中, 对 Orlicz–Lorentz 空间的弱一致 Kadec-Klee 性质, 弱 * 一致 Kadec-Klee 性质作了研究. 以上研究都是在赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 空间里进行的.

在 1999 年, 吴从炘和任丽伟 (见 [7]) 在 Orlicz–Lorentz 空间上定义了 Orlicz 范数

$$\|f\|^{o} = \sup_{\rho_{\psi}(g)\leq 1} \int_{0}^{\gamma} f^{*}(t)g^{*}(t)w(t)dt.$$

并给出了在这个范数下严格凸性的刻划. 重要的是 [7] 给出了研究赋 Orlicz 范数的空间几何性质的框架, 然而后继的工作很少. 本文试图就端点的刻划展开研究.

与函数空间相比, Orlicz–Lorentz 序列空间的研究相对较少, 姚正安等人在 [8] 中给出了 Orlicz–Lorentz 序列空间的构造, 得出并证明了该空间自反当且仅当 $\varphi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ 的重要结论, 并且讨论了序列空间的子空间的某些问题. 在 2008 年 P.Foralewski,H.Hudzik 和 L.Szymaszkiewicz 的论文 [9] 中, 对 Orlicz–Lorentz 序列空间的几何性质和拓扑性质都做了研究, 使得该空间的理论得到补充和完善. 但由于序列空间属于有原子无穷测度空间的问题, 很多在无原子有限测度空间中显然的命题需要系统地重新验证. 本文试图做好这一工作.

二 基本概念和命题

本文用 R 、 R_+ 、 N 分别表示实数集，非负实数集和自然数集.

一个函数 $\varphi: R_+ \to R_+$ 称为 Orlicz 函数，若它满足： (1)φ 为凸的，连续的；(2)$\varphi(0)=0$, $\varphi(u)>0(u>0)$; (3)$\frac{\varphi(u)}{u}\to\infty(u\to\infty)$, $\frac{\varphi(u)}{u}\to 0(u\to 0)$.

函数 φ 的 Young 对偶 ψ 为函数： $\psi(v)=\sup\limits_{u>0}\{|uv|-\varphi(u)\}$. 定义 $p(u)$ 为 φ 的右导数. 在本文中我们假定 φ 和 ψ 均为 Orlicz 函数，则 $p(u): R_+\to R_+$ 是非降的，右连续的，且满足： $\varphi(u)=\int_0^u p(t)dt$, 并且有 $p(u): 0\nearrow\infty(u: 0\nearrow\infty)$. 众所周之，对任意的 $u,v\geq 0$ 都有 $uv\leq\varphi(u)+\psi(v)$ 成立，并且该式等号成立当且仅当 $v=p(u)$.

Orlicz 函数 $\varphi(u)$ 满足以下性质： (见 [10])

(a) 对 $0<\alpha\leq 1$, 有 $\varphi(\alpha x)\leq\alpha\varphi(x)$; 对 $\alpha\geq 1$, 有 $\varphi(\alpha x)\geq\alpha\varphi(x)$.

(b) 对任意的函数 $f, g, \alpha\in[0,1]$, 都有 $\varphi(\alpha f+(1-\alpha)g)\leq\alpha\varphi(f)+(1-\alpha)\varphi(g)$.

我们称 φ 满足 Δ_2 条件 (无穷远点的 Δ_2 条件), 记为 $\varphi\in\Delta_2$. 若对任意的 $u\geq 0$, 都存在 $k>1$,(存在 $u_0\geq 0, k>1$, 对任意的 $u\geq u_0$,) 有 $\varphi(2u)\leq k\varphi(u)$. 称 φ 满足较小变量的 Δ_2 条件，若存在 $k>1$ 和 $u_0>0$, 使当 $u\leq u_0$ 时，有 $\varphi(2u)\leq k\varphi(u)$. 若 $\psi\in\Delta_2$, 则称 $\varphi\in\nabla_2$.

关于 Δ_2 条件，我们有以下几个有用的性质： (见 [10])

(a) 若 $\varphi\in\Delta_2, \psi\in\Delta_2$, 则 $\varphi\in\Delta_2\cap\nabla_2$.

(b)$\varphi\in\Delta_2\Leftrightarrow$ 存在 $l>1, x_0>0, K>1$, 对任意的 $x>x_0$, 都有 $\varphi(lx)\leq K\varphi(x)$.

下面我们给出 Orlicz–Lorentz 空间的一些基本概念.

令 L^0 为所有关于 Lebesgue 测度 m 可测的函数 $f: [0,\gamma)\to R$ 组成的函数族. 一个函数 $w(t): [0,\gamma)\to R_+$, 其中 $\gamma\leq\infty$, 被称作权函数，如果它是是非增并且局部可积的.

对于任意的 $f\in L^0$ 定义其分布函数为：

$$d_f(\theta)=m\{t\in[0,\gamma): |f(t)|>\theta\}.$$

其中 $\theta \geq 0$ 并且它的逆函数

$$f^*(t) = \inf\{\theta > 0 : d_f(\theta) \leq t\}$$

其中 $t \in [0,\gamma)$, 被称作 f 的非增等可测重排. 从而显然有 $\varphi(f^*(t)) = \varphi(f(t))^*$.

定义 φ 的模 $\rho_\varphi : L^0 \to [0,\infty]$ 如下:

$$\rho_\varphi(f) := \int_0^\gamma \varphi(f^*)w = \int_0^\gamma \varphi(f)^* w = \int_0^\gamma \varphi(f(t))^* w(t)dm(t).$$

则它是正交次可加凸的，亦即， $\rho_\varphi(f) = 0$ 当且仅当 $f = 0$, $\rho_\varphi(f) = \rho_\varphi(-f)$, 若 $\mathrm{supp} f \cap \mathrm{supp} g = \emptyset$, 则有 $\rho_\varphi(\alpha f + \beta g) \leq \alpha\rho_\varphi(f) + \beta\rho_\varphi(g)$, 其中 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ 并且 $\rho_\varphi(f+g) \leq \rho_\varphi(f) + \rho_\varphi(g)$.

Orlicz-Lorentz 空间 $\Lambda_{\varphi,w}$ 定义为可测函数 $f \in L^0$ 组成的集合，满足 $\rho_\varphi(\lambda f) < \infty$, 对某个 $\lambda > 0$ 成立. 赋上 Luxemburg 范数:

$$\|f\| = \inf\{\varepsilon > 0 : \rho_\varphi(f/\varepsilon) \leq 1\}.$$

仍记为 $\Lambda_{\varphi,\omega}$, 则 $\Lambda_{\varphi,w}$ 为一 Banach 空间.

$\Lambda_{\varphi,\omega}$ 上的 Orlicz 范数定义为:

$$\|f\|^o = \sup_{\rho_\psi(g) \leq 1} \int_0^\gamma f^*(t)g^*(t)w(t)dt.$$

赋 Orlicz 范数的 $\Lambda_{\varphi,\omega}$ 记为 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}$. 相对应的 Orlicz–Lorentz 序列空间记为 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 和 $\lambda^\circ_{\varphi,\omega}$.

一个函数 $\sigma : [0,\gamma) \to [0,\gamma)$ 被称作保测变换，若对于任意可测集 $E \subset [0,\gamma)$, $\sigma^{-1}(E)$ 是可测的，并且有 $mE = m(\sigma^{-1}(E))$.

S 为 φ 的所有严格凸点组成的集合， i.e.

$$S = \{0\} \cup \left\{ u \in R^+ : \forall\, 0 \leq v_1 < v_2\ , u = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \varphi(u) < \frac{\varphi(v_1) + \varphi(v_2)}{2} \right\}.$$

显然，若 $S = R^+$, 则 φ 是严格凸的，并且众所周之有 S'(S 的余集) 是 φ 的所有线性区间 (α_i, β_i) 的并组成的集合.

第一章　Orlicz−Lorentz 序列空间的基本理论

陈述涛在 [10] 中已经对 Orlicz 函数空间中的基本理论作了详细的研究，并形成了一个较为完整的理论体系．这些基本理论一般来说至多只适合推广到无原子有限测度的函数空间 $\Lambda_{\varphi,\omega}$, $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 中，而对于序列空间还需要验证．本章我们将在此基础上研究 Orlicz−Lorentz 序列空间中相应的理论，为第二章 Orlicz−Lorentz 序列空间中端点的研究做好准备工作，亦为新空间理论的完善奠定一个基础．

l^0 定义为所有 $x: N\to R$ 这样的序列构成的集合．对于每一个 $x=(x(i))_{i=1}^{\infty}\in l^0$, 定义 $\mathrm{supp}x=\{i\in N: x(i)\neq 0\}$, 且 $|x|(i)=|x(i)|$, 这里 $i\in N$.

对于任意的 $x\in l^0$, 定义其分布函数为 $\mu_x: R_+\to\{\infty\}\cup N$, 其中 $\mu_x(\lambda)=m\{i\in N: |x(i)|>\lambda\}$. 定义其非增重排序列 $x^*=(x^*(i))_{i=1}^{\infty}$, 其中 $x^*(i)=\inf\{\lambda:\mu_x(\lambda)<i\}$.

一个函数 $\omega: N\to R_+$ 在序列空间中被称为权序列，若它满足： $(1)\omega(1)\geq\omega(2)\geq\cdots\geq\omega(n)\geq\omega(n+1)\geq\cdots$； $(2)\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega(i)=+\infty, i\in N$.

对于 $x=(x(i))_{i=1}^{\infty}\in l^0$, 令 $\rho_\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(x^*(i))\omega(i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(x(i))^*\omega(i)$. $\lambda_{\varphi,\omega}$ 表示由模 ρ_φ 生成的 Orlicz-Lorentz 序列空间，即

$$\lambda_{\varphi,\omega}=\{x=(x(i)):\text{存在 }\lambda>0,\text{ 使得 }\rho_\varphi(\lambda x)<\infty\},$$

且 $\|x\|=\inf\{\lambda>0:\rho_\varphi(\frac{x}{\lambda})\leq 1\}$, 这里 “$\|\cdot\|$” 即之为序列空间中的 Luxemburg 范数.

与 Luxemburg 范数相对应的该空间中另一个重要范数定义如下：

对于 $x\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 令 $\|x\|^{\circ}=\sup\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i)$, 其中 $\rho_\psi(y)\leq 1$. 这里 “$\|\cdot\|^{\circ}$” 称之为 Orlicz 范数.

第一节　范数性质

本节先讨论模与两种范数之间的关系.

定理 1.1 (1) 若 $\|x\|^\circ \le 1$, 则 $\rho_\psi(p(|x|)) \le 1$; (2) 若 $\|x\|^\circ \le 1$, 则 $\rho_\varphi(x) \le \|x\|^\circ$.

证明: (1). 若 $\|x\|^\circ \le 1$, 有 $\rho_\psi(p(|x|)) > 1$, 取 x^* 的截断函数为:

$$x_n^*(i) = (x^*(1), x^*(2), \cdots, x^*(n), 0, 0, \cdots).$$

从而 $\rho_\psi(p(|x_n|)) < \infty$. 同时, $x_n^*(i) \nearrow x^*(i)$(见 [1]). 这样, 由 Levy 定理有:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi(p(x_n^*(i)))\omega(i) \to \sum_{i=1}^{\infty} \psi(p(x^*(i)))\omega(i).$$

取充分大的 N, 使

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi(p(x_N^*(i)))\omega(i) > 1,$$

由 Orlicz 函数的性质 (a) 可得:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi\left(\frac{p(x_N^*(i))}{\sum_{i=1}^{\infty} \psi(p(x_N^*(i)))\omega(i)}\right)\omega(i) \le \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \psi(p(x_N^*(i)))\omega(i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \psi(p(x_N^*(i)))\omega(i)} = 1,$$

从而由 $\|\cdot\|^\circ$ 的定义, 得:

$$\begin{aligned}
\|x\|^\circ &\ge \|x_N\|^\circ \\
&= \sup_{\rho_\psi(y)\le 1} \sum_{i=1}^{\infty} x_N^*(i) y^*(i)\omega(i) \\
&\ge \sum_{i=1}^{\infty} x_N^*(i) \frac{p(x_N^*(i))}{\sum_{i=1}^{\infty} \psi(p(x_N^*(i)))\omega(i)}\omega(i) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} [\varphi(x_N^*) + \psi(p(x_N^*))]\omega(i)}{\rho_\psi(p(|x_N|))} \\
&= \frac{\rho_\varphi(x_N) + \rho_\psi(p(|x_N|))}{\rho_\psi(p(|x_N|))} > 1.
\end{aligned}$$

这与 $\|x\|^\circ \le 1$ 矛盾.

(2). 由 (1) 可知： $\rho_\psi(p(|x|)) \leq 1$. 于是：

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(x^*(i))\omega(i)\\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(x^*(i))\omega(i) + \sum_{i=1}^{\infty}\psi(p(x^*(i)))\omega(i)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(x^*(i))\omega(i)\\
&\leq \sup_{\rho_\psi(y)\leq 1}\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i)\\
&= \|x\|^\circ.
\end{aligned}$$

定理 1.2 若存在 $k>0$, 使得 $\rho_\varphi(p(k|x|)) = 1$, 则有：

$$\|x\|^\circ = \sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(kx^*(i))\omega(i) = \frac{1}{k}[1+\rho_\varphi(kx)].$$

证明： 先证 $\|x\|^\circ = \sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(kx^*(i))\omega(i)$. 由 $\|x\|^\circ$ 的定义可知： $\|x\|^\circ \geq \sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(kx^*(i))\omega(i)$ 显然成立.

$$\begin{aligned}
\|x\|^\circ &= \sup\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i), \rho_\psi(y)\leq 1\Big\}\\
&= \frac{1}{k}\sup\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}kx^*(i)y^*(i)\omega(i), \rho_\psi(y)\leq 1\Big\}\\
&= \frac{1}{k}\sup\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}[\varphi(kx^*(i)) + \psi(y^*(i))]\omega(i), \rho_\psi(y)\leq 1\Big\}\\
&\leq \frac{1}{k}[\rho_\varphi(kx)+1]\\
&= \frac{1}{k}[\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(kx^*(i))\omega(i) + \sum_{i=1}^{\infty}\psi(p(kx^*(i)))\omega(i)]\\
&= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}kx^*(i)p(kx^*(i))\omega(i)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(kx^*(i))\omega(i)\\
&\leq \|x\|^\circ.
\end{aligned}$$

所以 $\|x\|^\circ = \sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(kx^*(i))\omega(i)$ 成立.

对于第二个等号，由上面的证明过程可知 $\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(kx^*(i))\omega(i) = \frac{1}{k}[1+\rho_\varphi(kx)]$ 成

立.

综上，我们有： $\|x\|^\circ=\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)p(kx^*(i))\omega(i)=\frac{1}{k}[1+\rho_\varphi(kx)]$.

与 [10] 中的定理 1.30, 定理 1.31 的证明相类似我们有下面相应的定理 1.3, 1.4:

定理 1.3 对任意的 $x\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 有

$$\|x\|^\circ=\inf_{k>0}\frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kx)).$$

定理 1.4 对任意的 $x\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 当且仅当 $k\in K(x)=[k^*,k^{**}]$ 时，有

$$\|x\|^\circ=\frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kx))=\inf_{h>0}\frac{1}{h}(1+\rho_\varphi(hx)),$$

这里 $k^*=\inf\{k>0:\rho_\psi(p(k|x|))\geq 1\},k^{**}=\sup\{k>0:\rho_\psi(p(k|x|))\leq 1\}$.

定理 1.5 设 $x\in\lambda_{\varphi,\omega},y\in\lambda_{\psi,\omega}$ ，则有

(1) $\|x\|\leq 1\Rightarrow\rho_\varphi(x)\leq\|x\|$；

(2) $\|x\|>1\Rightarrow\rho_\varphi(x)>\|x\|$；

(3) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i)\leq\|x\|^\circ\|y\|,i\in N$；

(4) $\|x\|\leq\|x\|^\circ\leq 2\|x\|$.

证明： (1),(2) 的证明与 [10] 中相应的定理证明类似，故我们只证 (3)(4).

(3) 因为 $\rho_\varphi(\frac{y^*}{\|y\|})\leq 1$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i)=\|y\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^*(i)\frac{y^*(i)}{\|y\|}\omega(i)\leq\|y\|\|x\|^\circ$.

(4) 对于 $x\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 有如下事实成立： $\|x\|^\circ\leq 1\Rightarrow\rho_\psi(p(|x|))\leq 1$(见 [3]). 令 $y(i)=p(\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ})$, 则 $y(i)$ 单调递减, 从而 $y^*=y$. 又因为 $\|\frac{x^*}{\|x\|^\circ}\|^\circ\leq 1$, 所以 $\rho_\psi(y)=\rho_\psi(p(\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ}))\leq 1$. 于是

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(\frac{x}{\|x\|^\circ}) &= \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ})\omega(i)\\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ})\omega(i)+\sum_{i=1}^{\infty}\psi(p(\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ}))\omega(i)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ}p(\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ})\omega(i)\\
&= \frac{1}{\|x\|^\circ}\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i)\\
&\leq \frac{1}{\|x\|^\circ}\|x\|^\circ=1.
\end{aligned}$$

所以 $\|x\| \le \|x\|^\circ$.

令 $\rho_\psi(y) \le 1$, 则有:

$$\begin{aligned}
\|\frac{x}{\|x\|}\|^\circ &= \sup\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ}y^*(i)\omega(i)\\
&\le \sup\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi(\frac{x^*(i)}{\|x\|^\circ})+\psi(y^*(i)))\omega(i)\\
&\le \rho_\varphi(\frac{x^*}{\|x\|^\circ})+\rho_\psi(y)\\
&\le 1+1=2.
\end{aligned}$$

即 $\|x\|^\circ \le 2\|x\|$.

综上: $\|x\| \le \|x\|^\circ \le 2\|x\|$.

所以我们说在 Orlicz–Lorentz 序列空间中 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数是等价的.

第二节　收敛定理

本节我们讨论模与范数在收敛性方面的一些结果.

定理 1.6 若 $\varphi \notin \Delta_2$, 则存在 $x_n \in \lambda_{\varphi,\omega}$, 使得 $\|x_n\| = 1$, 但是 $\rho_\varphi(x_n) < \frac{1}{n}$.

证明: 因为 $\varphi \notin \Delta_2$, 所以存在 $\alpha_j \searrow 0$, 使 $\varphi((1+\frac{1}{j})\alpha_j) > 2^j\varphi(\alpha_j)$ 成立. 对任意的 n , 令 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 取 $\{\alpha_j\}$ 的一列单调递减的子列, 仍记为 α_j. 又因为 $\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i) = \infty$, 所以可以取到一列 $\{k_j\}$, 满足 $k_0 = 1$, 且有下列一系列的不等式成立:

$$\frac{\varepsilon_n}{2^2} \le \varphi(\alpha_1)\sum_{i=1}^{k_1}\omega(i) < \frac{\varepsilon_n}{2},$$

$$\frac{\varepsilon_n}{2^3} \le \varphi(\alpha_2)\sum_{i=k_1+1}^{k_2}\omega(i) < \frac{\varepsilon_n}{2^2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\varepsilon_n}{2^{j+1}} \le \varphi(\alpha_j)\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j}\omega(i) < \frac{\varepsilon_n}{2^j},$$

$$\cdots\cdots$$

(对于第一个不等式, 只要先取 α_1, 使 $\varphi(\alpha_1)\omega(1) \le \frac{\varepsilon_n}{2^2}$; 类似地, 对于第二个不等式, 只要先取 α_2, 使 $\varphi(\alpha_2)\omega(k_1+1) \le \frac{\varepsilon_n}{2^3}$; $\cdots$, 依此方法一直下去即可.)

令

$$x_n = (\underbrace{\alpha_1, \cdots, \alpha_1}_{k_1}, \underbrace{\alpha_2, \cdots, \alpha_2}_{k_2}, \cdots\cdots),$$

则

$$\rho_\varphi(x_n) = \sum_{j=1}^{\infty}(\varphi(\alpha_j)\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j}\omega(i)) < \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^j} = \varepsilon_n = \frac{1}{n}.$$

对任意的 $l > 1$, 存在 j_0, 使 $1 + \frac{1}{j_0} < l$, 于是

$$\begin{aligned}\rho_\varphi(lx_n) &> \sum_{j=j_0}^{\infty}\varphi((1+\frac{1}{j})\alpha_j)\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j}\omega(i)\\ &> \sum_{j=j_0}^{\infty}2^j\varphi(\alpha_j)\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j}\omega(i)\\ &\geq \sum_{j=j_0}^{\infty}2^j\frac{\varepsilon_n}{2^{j+1}}\\ &= \sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2}\\ &= \infty.\end{aligned}$$

故 $\|x_n\| = 1$.

定理 1.7 模收敛与范数收敛等价当且仅当 $\varphi \in \Delta_2$.

证明: 先证 “ $\Rightarrow$ ”. 若 $\varphi \notin \Delta_2$, 由定理 1.6 可知, 存在 $x_n \in \lambda_{\varphi,\omega}$, 满足: $\rho_\varphi(x_n) \to 0, (n \to \infty)$ 且 $\rho_\varphi(2x_n) \to \infty$, 从而 $2\|x_n\| > 1$. 所以模收敛推不出范数收敛, 矛盾. 所以 $\varphi \in \Delta_2$.

再证 “ $\Leftarrow$ ”. 若 $\rho_\varphi(x_n) \to 0$, 而 $\|x\| \to 0$, 则存在实数 $a > 0$ 以及 x_n 的子列, 仍记为 $\{x_n\}$, 使 $\rho_\varphi(x_n) \to 0$, 而 $\|x\| \geq a$. 故 $\|\frac{x_n}{a}\| \geq 1$, 这导致 $\rho_\varphi(\frac{x_n}{a}) \geq 1$. 因为 $\varphi \in \Delta_2$, 所以存在 u_0 和 $K > 1$, 使得当 $u < u_0$ 时, $\varphi(\frac{u}{a}) \leq K\varphi(u)$. 由于 $\rho_\varphi(x_n) \to 0$, 故 $\varphi(x_n^*(1))\omega(1) \leq \rho_\varphi(x_n) \to 0$. 从而 $x_n^*(1) \to 0$. 所以存在 N, 当 $n > N$ 时, $x_n^*(1) \leq u_0$. 于是, 当 $n > N$ 时, 有

$$\rho_\varphi(\frac{x_n}{a}) = \sum_{i=1}^{n}\varphi(\frac{x_n^*(i)}{a})\omega(i) \leq K\rho_\varphi(x_n) \to 0.$$

矛盾.

定理 1.8 设 $\varphi \in \Delta_2$ 且 $x_n, x \in \lambda_{\varphi,\omega}$, 则

(1) $\rho_\varphi(x)=\infty\Rightarrow\|x\|=\infty$;

(2) $\|x\|=1\Rightarrow\rho_\varphi(x)=1$;

(3) 任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\|x\|\geq\varepsilon$ 时，有 $\rho_\varphi(x)\geq\delta$;

(4) 任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 当 $\rho_\varphi(x)\leq1-\varepsilon$ 时，有 $\|x\|\leq1-\delta$;

(5) 任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 当 $\rho_\varphi(x)>1+\varepsilon$ 时，有 $\|x\|\geq1+\delta$.

证明: (1) 假设存在 $L\in N$, 使得 $\|x\|\leq L$, 即 $\|\frac{x}{L}\|\leq1$, 则 $\rho_\varphi(\frac{x}{L})\leq1$. 从而 $\varphi(\frac{x^*(1)}{L})\omega(1)\leq\rho_\varphi(\frac{x}{L})\leq1$, 故对一切 $i\in N$, 有 $x^*(i)\leq x^*(1)\leq L\varphi^{-1}(\frac{1}{\omega(1)})$. 不妨设 $L>1$, 因为 $\varphi\in\Delta_2$, 所以存在 $u_0>0,K\geq1$, 当 $u\leq u_0$ 时，有 $\varphi(Lu)\leq K\varphi(u)$. 若 $u_0<L\varphi^{-1}(\frac{1}{\omega(1)})$, 则存在 $K=max\{K_1,\sup\{\frac{\varphi(Lu)}{\varphi(u)}:u_0\leq u\leq L\varphi^{-1}(\frac{1}{\omega(1)})\}\}$, 使 $\varphi(Lu)\leq K\varphi(u)$. 当 $u\leq L\varphi^{-1}(\frac{1}{\omega(1)})$ 成立. 故对一切 $i\in N$, 有 $\varphi(L\frac{x^*(i)}{L})\leq K\varphi(\frac{x^*(i)}{L})$. 于是

$$\rho_\varphi(x)=\rho_\varphi(L\frac{x}{L})\leq K\rho_\varphi(\frac{x}{L})\leq K<\infty.$$

这与 $\rho_\varphi(x)=\infty$ 矛盾，所以有：$\|x\|=\infty$.

(2) 因为 $\|x\|=1$, 所以可以取 λ_n 单调递减到 1, 使得 $\rho_\varphi(\frac{x}{\lambda_n})\leq1$, 则由 Levy 定理知 $\rho_\varphi(x)\leq1$. 另一方面，可以取 λ_n 单调递增到 1, 使得 $\rho_\varphi(\frac{x}{\lambda_n})>1$, 则由 Levy 定理知 $\rho_\varphi(x)\geq1$, 所以 $\rho_\varphi(x)=1$.

(3) 由 $\varphi\in\Delta_2$, 则模收敛与范数收敛等价可知结论成立.

(4) 若结论不成立，则存在 $\varepsilon>0$ 和 $x_n\in\lambda_{\varphi,\omega}$, 使得 $\rho_\varphi(x_n)<1-\varepsilon$, 且 $\frac{1}{2}\leq\|x_n\|\nearrow1$. 令 $a_n=\frac{1}{\|x_n\|}-1$, 则 $a_n\leq1$, 且当 $n\to\infty$ 时，有 $a_n\to0$. 令 $L=\sup_n\{\rho_\varphi(2x_n)\}<\infty$, (对任意的 n, $\varphi(x_n^*(1))\omega(1)\leq\rho_\varphi(x_n)<1-\varepsilon$, 故 $x_n^*(1)\leq\varphi^{-1}(\frac{1-\varepsilon}{\omega(1)})$, 从而 $x_n^*(i)\leq\varphi^{-1}(\frac{1-\varepsilon}{\omega(1)})$. 由于 $\varphi\in\Delta_2$, 所以存在 $K>1$, 当 $u<\varphi^{-1}(\frac{1-\varepsilon}{\omega(1)})$ 时，$\varphi(2u)\leq K\varphi(u)$. 从而 $\rho_\varphi(2x_n)<K\rho_\varphi(x_n)<K(1-\varepsilon)$). 由 (2) 知 $\rho_\varphi(\frac{x_n}{\|x_n\|})=1$, 且

$$\begin{aligned}\rho_\varphi(\frac{x_n}{\|x_n\|}) &= \rho_\varphi(2a_nx_n+(1-a_n)x_n)\\ &\leq a_n\rho_\varphi(2x_n)+(1-a_n)\rho_\varphi(x_n)\\ &\leq a_nL+(1-\varepsilon)\\ &\to 1-\varepsilon\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

得出矛盾，说明结论成立.

(5) 证明方法同 (4). 证毕.

与 [10] 中的引理 1.40 的证明相类似我们有下面相应的结果:

定理 1.9 设 $\varphi \in \Delta_2$, 则对任意 $L > 0, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\rho_\varphi(x) \le L, \rho_\varphi(y) \le \delta$ 时，有 $|\rho_\varphi(x+y) - \rho_\varphi(x)| < \varepsilon$.

第三节　子空间

在讨论过模与范数的性质及收敛定理以后，我们接下来讨论一下子空间的问题.

定理 1.10 设 φ 不满足 Δ_2 条件, 则存在支集互不相交的序列 $\{y_n\} \in \lambda_{\varphi,\omega}$, 满足 $\rho_\varphi(y_n) \le \frac{1}{2^n}, \|y_n\| = 1$, 且 $\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n\| = 1$.

证明　因为 φ 不满足 Δ_2 条件，所以存在 $u_k \searrow 0$, 满足 $\varphi(u_k)\omega(1) \le \frac{1}{2^{k+2}}, u_{k+1} < \frac{1}{8}u_k$, 且 $\varphi((1+\frac{1}{k})u_k) > 2^{k+2}\varphi(u_k)$. 令 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(i)$, 下面可以证明存在 $\{n_k\} \subseteq N$, 满足 $\frac{1}{2^{k+2}} \le \varphi(u_k)s_{n_k} \le \frac{1}{2^{k+1}}$. 因为 $\varphi(u_1)\omega(1) \le \frac{1}{8}$, 因此可以取到 $n_1 \in N$ 是满足 $\frac{1}{8} < \varphi(u_1)s_{n_1} \le \frac{1}{4}$ 最大的一个 (因为 $\varphi(u_2)\omega(1) \le \frac{1}{16}$, 因此可以取到 $n_2 \in N, n_2 > n_1$ 是满足 $\frac{1}{16} < \varphi(u_2)s_{n_2} \le \frac{1}{8}$ 最大的一个，继续下去就可以得到上面的结论).

令 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_k e_i) = x^*$, 则

$$\rho_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \varphi(u_k)\omega(i)) \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

设 $\lambda \in (0,1)$, 存在 $k_\lambda \in N$, 当 $k \geq k_\lambda$ 时, 有 $\frac{1}{\lambda} > 1 + \frac{1}{k}$, 因此

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(x) &\geq \sum_{k=k_\lambda}^{\infty}\Big(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}\varphi\big((1+\frac{1}{k})u_k\big)\omega(i)\Big)\\
&\geq \sum_{k=k_\lambda}^{\infty}\Big(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}2^{k+2}\varphi(u_k)\omega(i)\Big)\\
&= \sum_{k=k_\lambda}^{\infty}\big(2^{k+2}\varphi(u_k)(s_{n_k}-s_{n_{k-1}})\big)\\
&> \sum_{k=k_\lambda}^{\infty}\big(2^{k+2}\varphi(u_k)s_{n_k}-2^{k+2}\frac{1}{8}\varphi(u_{k-1})s_{n_{k-1}}\big)\\
&> \sum_{k=k_\lambda}^{\infty}\big(1-2^{k+2}\frac{1}{8}\frac{1}{2^k}\big)\\
&= \sum_{k=k_\lambda}^{\infty}\frac{1}{2}\\
&= \infty.
\end{aligned}$$

所以 $\|x\| = 1$. 令 $x_m = \sum\limits_{k=1}^{m}(\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_k e_i) \nearrow x$, 则 $\|x_m\| \nearrow \|x\|$, 因此存在 $m_1 \in N$, 满足 $\|x_{m_1}\| \geq \frac{1}{2}$, 且令 $x_1 = x_{m_1}$. 再令 $z_1 = x - x_1 = x_m = \sum\limits_{k=m_1+1}^{\infty}(\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_k e_i)$, 则 $\rho_\varphi(z_1) \leq \rho_\varphi(x) \leq 1$.

对于任意的 $\lambda \in (0,1)$, $\rho_\varphi(\frac{z_1}{\lambda}) \geq \sum\limits_{k=m_1+1}^{\infty}(\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}\varphi(\frac{u_k}{\lambda})\omega(i)) = \infty$, 所以 $\|z_1\| = 1$. 取 $m_2 \in N$, 令 $x_2 = \sum\limits_{k=m_1+1}^{m_2}(\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_k e_i)$, 其中 $\|x_2\| \geq 1 - \frac{1}{4}$ ……继续下去可得 $\{x_k\}$, 满足 $1 - \frac{1}{2^k} \leq \|x_k\| \leq 1$.

令 $y_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{2k-1}$, 则 $\|y_1\| \leq \|x\| \leq 1$, 又 $\|y_1\| \geq \|x_{2k-1}\| \geq 1$, 所以 $\|y_1\| = 1$. 同理取 $(x'_k) = (x_{2k})_{k=1}^{\infty}$, 可假设 $y_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x'_{2k-1}$, $\|y_2\| = 1$, 且

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(y_2) &\leq \rho_\varphi(x|_{i\geq n_2})\\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty}\varphi(u_k)s_{n_k}\\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

继续下去可以取得具有不交支集的序列 $\{y_n\}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = x, \|y_n\| = 1,\ \rho_\varphi(y_n) \leq \frac{1}{2^n}$, 且

$\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n\| = \|x\| = 1$.

定理 1.11 若 φ 不满足 Δ_2 条件，则 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 中有一子空间等距同构于 l^∞.

证明 若 φ 不满足 Δ_2 条件，则对任意 $t \in [0,a]$, 存在 $\alpha > 1, K > 1$, 满足 $\varphi(\alpha t) \le K\varphi(t)$, 且存在 $u_k \searrow 0$, 满足 $\varphi(u_k)\omega(k) \le 2^{-k-1}$ 及 $\varphi((1+\frac{1}{k})u_k) > 2^k\varphi(u_k)$.

下证对某个递增的整数序列 $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, 其中 $n_0 = 0$, 满足：$2^{-k-1} < \sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \varphi(u_k)\omega(i) \le 2^{-k}, (k \in N)$. 设 n_1 是使得 $\frac{1}{4} < \sum\limits_{i=1}^{n_1} \varphi(u_1)\omega(i) \le \frac{1}{2}$ 成立的最大的整数，因为 $\varphi(u_1) = 0$ 且 $\varphi(u_1)\omega(1) \le \frac{1}{4}$, 所以 n_1 存在. 又由 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega(i) = \infty$ 且 $\omega(i)$ 单调递减，因此可以取到 n_2 使得 $\frac{1}{8} < \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} \varphi(u_2)\omega(i) \le \frac{1}{4}$ 成立 ⋯⋯, 照此步骤继续下去即可得.

令 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_k e_i) = x^*$, 则有 $\rho_\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \varphi(u_k)\omega(i)) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, 且对任意的 $\lambda \in (0,1)$，存在 $k_\lambda \in N$, 当 $k \ge k_\lambda$ 时，有 $\frac{1}{\lambda} > 1 + \frac{1}{k}$, 所以 $\rho_\varphi(\frac{x}{\lambda}) \ge \sum\limits_{k=k_\lambda}^{\infty}(\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \varphi((1+\frac{1}{k})u_k)\omega(i)) \ge \sum\limits_{k=k_\lambda}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$, 所以 $\|x\| = 1$.

令 $x_{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{n} x(j)e_j$, 当 $n \to \infty$ 时，$x_{(n)} \nearrow x$, 因为 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 具有 Fatou-Levy 性，有 $\|x_{(n)}\| \nearrow \|x\| = 1$, 所以存在 $m_1 \in N$, 令 $x_1 = x_{(m_1)}$, 有 $\|x_1\| \ge \frac{1}{2}$. 再令 $y_1 = x - x_1 = \sum\limits_{j=m_1+1}^{\infty} x(j)e_j$, 同前可证得 $\rho_\varphi(y_1) \le 1$, 且对任意 $\lambda \in (0,1), \rho_\varphi(\frac{y}{\lambda}) = \infty$, 所以 $\|y_1\| = 1$. 类似地，取 $m_2 > m_1$, 满足 $x_2 = \sum\limits_{j=m_1+1}^{m_2} x(j)e_j$, 且 $\|x_2\| \ge 1 - \frac{1}{4}$ ⋯⋯ 因此可以构造具有不交支集的序列 $\{x_k\} \in \lambda_{\varphi,\omega}$, 使得 $1 - \frac{1}{2^k} \le \|x\| \le 1$. 定义 $y_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{2k-1}$, 则 $\|y_1\| \le \|x\| \le 1$，且 $\|y_1\| \ge \|x_{2k-1}\| \ge 1$, 所以 $\|y_1\| = 1$. 同理可取 $(x'_k) = (x_{2k})_{k=1}^{\infty}$, 定义 $y_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x'_{2k-1}$, 则 $\|y_2\| = 1$, 且 y_1 与 y_2 有不交的支集 ⋯⋯ 由此得到具有不交支集的序列 $\{y_k\} \subseteq S(\lambda\varphi,\omega)$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k = x$. 定义一个正的线性算子 $P : l^\infty \to \lambda\varphi,\omega$, 对于 $\xi = \xi(k) \in l^\infty$, 满足 $P(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi(k)y_k = \sup\limits_k \xi(k)y_k$, 且 P 是一个同构.

第二章　赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 序列空间的端点

本节我们将利用上一节中的结果来研究 Orlicz–Lorentz 序列空间关于 Luxemburg 范数的端点的等价性条件. 我们先来给出本节需要用到的一些基本定义以及两个相关引理.

一个 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的单位球面上的元素 x 被称作 X 的端点，如果满足 $x=(y+z)/2$ 且 $\|y\|=\|z\|=1$, 即可推出 $x=y=z$.

与 A.Kamińska [11] 中的引理 3.2 的结果相类似，我们得到下面引理:

引理 2.1 令 $x, y \in \lambda_{\varphi,\omega}$, 设 $|x(i)|<|y(i)|$ 对 $i \in A$ 成立，其中 $mA>0$. 并且 $|x(i)| \leq |y(i)|$ 对一切 i 都成立. 若对任意的 $\theta>0$ 都有 $\mu_x(\theta)<\infty$, 则存在 B 满足 $mB>0$, 使得对任意的 $i \in B$, 有 $x^*(i)<y^*(i)$.

证明:　不失一般性可设 $mA<\infty$. 否则取一个子集使其测度 $<\infty$, 仍记为 A 即可. 令

$$A_n=\{i \in A:|y(i)|-|x(i)|>\frac{1}{n}\}.$$

则存在 $n \in N$, 使得 $mA_n>0$. 令 $h=x+\frac{1}{n}|_{A_n}$. 由假设可得:　$h^*(i)>x^*(i)$ 在一个正测度集上成立.

下证对某个 $\theta>0$, 有 $\mu_h(\theta)>\mu_x(\theta)$.

若 $x(i)=0$ 在 $C \in A_n$ 上成立，其中 $mC>0$. 则对任意的 $\theta<\frac{1}{n}$, 我们有:

$$m\{i \in A_n:|x(i)|>\theta-\frac{1}{n}\}>m\{i \in A_n:|x(i)|>\theta\}.$$

从而有 $\mu_h(\theta)>\mu_x(\theta)$.

若 x 在 A 上几乎处处为正，假设对所有的 $\theta>0$, 都有

$$m\Big(\{i \in A_n:|x(i)|>\theta-\frac{1}{n}\} \backslash \{i \in A_n:|x(i)|>\theta\}\Big)=0.$$

则有

$$m\{i \in A_n:\theta-\frac{1}{n}<|x(i)| \leq \theta\}=0.$$

令 $\{\theta_n\}$ 为一列正数，使得 $\cup_k(\theta_k - \frac{1}{n}, \theta_k] = (0,\infty)$. 则

$$mA_n = m\{i \in A_n : x(i) \in (0,\infty)\} \le \sum_k m\{i \in A_n : \theta_k - \frac{1}{n} < |x(i)| \le \theta_k\} = 0.$$

这与 $mA > 0$ 矛盾. 所以由 $mA_n < \infty$ 和 $m\{i \in A_n : |x(i)| > \theta - \frac{1}{n}\} > m\{i \in A_n : |x(i)| > \theta\}$, 我们有 $\mu_h(\theta) > \mu_x(\theta)$. 再由重排序列的定义，我们有： $y^*(i) \ge h^*(i) \ge x^*(i)$ 对至少一个自然数 i 成立.

引理 2.2 令 $x, y \in \lambda_{\varphi,\omega}, \omega$ 为正的且严格单调递减的权序列. 若 $\rho_\varphi(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(\rho_\varphi(x) + \rho_\varphi(y)) < \infty$, 则对任意的 $i \in N$, 都有 $\varphi(\frac{(x(i)+y(i))^*}{2}) = \frac{1}{2}(\varphi(x^*(i)) + \varphi(y^*(i)))$.

证明: 定义 $\Delta\omega(i) = \omega(i) - \omega(i-1)$, 令 $S_x(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x^*(i))$, 则由 Abel 变换可得:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x^*(i))\omega(i) = S_x(n)\omega(n) - \sum_{i=1}^{n-1} S_x(i)\Delta\omega(i+1).$$

令 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} S_x(n)\omega(n) < \infty$, 所以 $\rho_\varphi(x) = \alpha - \sum\limits_{i=1}^{\infty} S_x(i)\Delta\omega(i+1)$. 再令 $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} S_y(n)\omega(n) < \infty$, $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\frac{x+y}{2}}(n)\omega(n) < \infty$. 则同理可得 $\rho_\varphi(y) = \beta - \sum\limits_{i=1}^{\infty} S_y(i)\Delta\omega(i+1)$. $\rho_\varphi(\frac{x+y}{2}) = \eta - \sum\limits_{i=1}^{\infty} S_{\frac{x+y}{2}}(i)\Delta\omega(i+1)$. 因为 $S_{\frac{x+y}{2}}(i) \le \frac{1}{2}(S_x(i) + S_y(i))$, 所以 $\eta \le \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. 但是

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(\rho_\varphi(x) + \rho_\varphi(y)) - \rho_\varphi(\frac{x+y}{2}) \\ &= (\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \eta) - \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{S_x(i)+S_y(i)}{2} - S_{\frac{x+y}{2}}(i)\Big)\Delta\omega(i+1), \end{aligned}$$

且 ω 是严格递减的，所以 $\frac{1}{2}(S_x(i) + S_y(i)) = S_{\frac{x+y}{2}}(i)$. 从而对任意的 $i \in N$, 都有 $\varphi(\frac{(x(i)+y(i))^*}{2}) = \frac{1}{2}(\varphi(x^*(i)) + \varphi(y^*(i)))$.

接下来我们将给出并证明本节中的一个重要定理:

定理 2.3 x 属于单位球体 $B(\lambda_{\varphi,\omega})$, ω 为正的且严格单调递减的权序列. 则 x 是 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 的端点的充要条件是:

(1) $\rho_\varphi(x) = 1$;

(2) 存在 $\alpha > 0$, 集合 A 和一个数列 y, 使得 $|x| = \alpha\chi_A + y$, 其中 $A \cap \mathrm{supp}y = \emptyset$, $\alpha \notin S$ 且 $y(i) \in S$. 其中 S 是 φ 的严格凸点.

证明: 必要性 (1) 设 $\rho_\varphi(x) < 1$, 因为 $\|x\| = 1$, 所以对任意 $r > 1$, 有 $\rho_\varphi(\lambda x) = +\infty$,

设 $a = 1-\rho_\varphi(x) > 0$, 则存在 $i_1 \in N$, 满足 $\varphi(x^*(i_1))\omega(1) < a$, 且因为 $\lim\limits_{i\to\infty} x^*(i) = 0$, 且 $\|x\| = 1$, 所以存在 $i_1 \in N$, 满足 $x^*(i_1) \neq 0$, 且对某个 $r_1 > 1$ 有 $\varphi(r_1 x^*(i_1))\omega(1) < a$, 取 $r_2 = 2 - r_1$, 令 $\sigma{:}N \to N$ 是满足下列条件的保测变换: $x\circ\sigma = x^*$. 则定义

$$x_1 = \begin{cases} x(i), & i \neq \sigma^{-1}(i_1) \\ r_1 x(i), & i = \sigma^{-1}(i_1), \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} x(i), & i \neq \sigma^{-1}(i_1) \\ r_2 x(i), & i = \sigma^{-1}(i_1). \end{cases}$$

则 $2x = x_1 + x_2$, $x_1 \neq x_2$, $\rho_\varphi(x_1) \le \rho_\varphi(x) + \rho_\varphi(r_1 x \chi_{\{i_1\}}) \le \rho_\varphi(x) + a = 1$, $\rho_\varphi(x_2) \le \rho_\varphi(x) < 1$. 所以 $\|x_1\| \le 1$, $\|x_2\| \le 1$, 因此 x 不是端点，与条件矛盾.

(2) 假设 x 有两个不同值 a, $b \in S'$,$(a < b)$, 设 $x^*(B_1) = a, x^*(B_2) = b$ 显然有 $\omega(B_1) < \infty, \omega(B_2) < \infty$. 下面证明存在 a_1, a_2, b_1, b_2, 满足 $a_1 < a < a_2 < b_1 < b < b_2$, $a_1, a_2 \in (\alpha_1, \alpha_2)$,$b_1, b_2 \in (\alpha_3, \alpha_4)$, 其中 (α_1, α_2) 和 (α_3, α_4) 为两个不相交的线性区间且这两个区间取得足够小，使得: $x^*\chi_{\{N\setminus(\{B_1\}\cup\{B_2\})\}}(i) \notin (\alpha_1, \alpha_2) \cup (\alpha_3, \alpha_4)$, 且

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad b = \frac{b_1 + b_2}{2}, \tag{1}$$

$$\varphi(b_2)\omega(B_2) + \varphi(a_1)\omega(B_1) = \varphi(b_1)\omega(B_2) + \varphi(a_2)\omega(B_1). \tag{2}$$

设 $c = \frac{\omega(B_1)}{\omega(B_2)}$, 则 (2) 式等价于 $\frac{\varphi(b_2)-\varphi(b_1)}{\varphi(a_2)-\varphi(a_1)} = c$. 因为 (α_1, α_2),(α_3, α_4) 为线性区间以及 (1) 式，有 $\varphi(b_2) = 2\varphi(b) - \varphi(b_1)$, $\varphi(a_2) = 2\varphi(a) - \varphi(a_1)$, 所以只要证明存在 $a_1 \in [\alpha_1, a)$,$b_1 \in [\alpha_3, b)$, 满足 $\frac{\varphi(b)-\varphi(b_1)}{\varphi(a)-\varphi(a_1)} = c$ 即可. 考虑函数 $f(x,y) = \frac{\varphi(b)-\varphi(x)}{\varphi(a)-\varphi(y)}$. 在区域 $D = \{(x,y) : \alpha_3 \le x < b, \alpha_1 \le y < a\}$ 上， $f(x,y)$ 连续，恒为正，且 $\lim\limits_{y\to a^-} f(x,y) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x,y) = 0$, 所以存在 $(b_1, a_1) \in D$, 满足 $f(b_1, a_1) = c$, 这样就得到 (2) 式成立.

下设

$$x_1 = \begin{cases} x^*(i), & i \in N\setminus\{B_1 \cup B_2\} \\ a_1, & i = B_1 \\ b_2, & i = B_2, \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} x^*(i), & i \in N\setminus\{B_1 \cup B_2\} \\ a_2, & i = B_1 \\ b_1, & i = B_2. \end{cases}$$

则 $x_1 \neq x_2$, 又因为 $x^*\chi_{\{N\setminus(\{B_1\}\cup\{B_2\})\}}(i) \notin (\alpha_1, \alpha_2) \cup (\alpha_3, \alpha_4)$, 且由 a_i, b_i 的取法知 x_1, x_2 都是递减的, 所以 $x_1^* = x_1$, $x_2^* = x_2$, 并且由 (1) 式得 $x^* = \frac{x_1+x_2}{2}$. 由 φ 在区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\alpha_3, \alpha_4]$

上的线性性得, $1=\rho_\varphi(x)=\frac{1}{2}(\rho_\varphi(x_1)+\rho_\varphi(x_2))$, 但由 (**) 式知 $\rho_\varphi(x_1)=\rho_\varphi(x_2)$, 所以 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$. 所以由 [1] 得, x 不是端点, 矛盾.

充分性设 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$,$\|x_1\|=\|x_2\|=1$, 因为

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{i=1}^{\infty}\varphi^*(\frac{x_1(i)+x_2(i)}{2})\omega(i)\\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{\varphi(x_1(i))+\varphi(x_2(i))}{2})^*\omega(i)\\ &\le \frac{1}{2}(\rho_\varphi(x_1)+\rho_\varphi(x_2))\\ &\le 1,\end{aligned}$$

所以由引理 2.2 得

$$\varphi(\frac{|x_1+x_2|}{2})^*=\frac{1}{2}(\varphi(|x_1|)+\varphi(|x_2|))^*.$$

再由引理 2.1 得

$$\varphi(\frac{|x_1+x_2|}{2})=\frac{1}{2}(\varphi(|x_1|)+\varphi(|x_2|)). \tag{3}$$

又因为

$$\begin{aligned}1 &= \rho_\varphi(\frac{|x_1+x_2|}{2})\\ &\le \rho_\varphi(\frac{|x_1|+|x_2|}{2})\\ &\le \frac{1}{2}(\rho_\varphi(x_1)+\rho_\varphi(x_2))\\ &\le 1,\end{aligned}$$

所以由引理 2.2 得

$$\varphi(|\frac{x_1+x_2}{2}|)^*=\varphi(\frac{|x_1|+|x_2|}{2})^*.$$

再由引理 2.1 得

$$\varphi(\frac{|x_1+x_2|}{2})=\varphi(\frac{|x_1|+|x_2|}{2}).$$

因此 $|x_1+x_2|=|x_1|+|x_2|$, 得到 $x_1\cdot x_2\geq 0$. 若 $|x|\in S$, 由 (3) 式得, 对任意的 $i\in A'$, 有 $x_1=x_2=x$.

若 $\alpha\in s$, 则显然有 $x_1=x_2$. 所以我们假设 $\alpha\notin S$. 由引理 2.2 得:

$$\varphi(x^*)=\varphi(\frac{|x_1+x_2|}{2})^*=\frac{1}{2}(\varphi(x_1^*)+\varphi(x_2^*)). \tag{4}$$

再由引理 2.1 得: $mA=m\,|x|^{-1}(\{\alpha\})=m\,x^{*-1}(\{\alpha\})$. 所以存在一个区间 $[a_1,a_2)$, 使得 $mA=a_2-a_1$, 且 $x^*(i)=\alpha$, 对任意 $i\in N\cap[a_1,a_2)$ 都成立. 但是 x_1^*, x_1^* 是非增的, 所以他们必为常数. 从而存在 $\beta_1,\beta_2\geq 0$, 使得 $x_1^*(i)=\beta_1$, $x_2^*(i)=\beta_2$. 对 $i\in N\cap[a_1,a_2)$ 都成立. 并且 $\alpha=\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$. 由 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 得, 对任意的 $i\in A$, 我们有 $\alpha=\frac{|x_1(i)|+|x_2(i)|}{2}$, 并且由 (3) 式可得: 对任意的 $i\in A$, 亦有

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{2}(\varphi(|x_1(i)|)+\varphi(|x_2(i)|)). \tag{5}$$

令 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 为满足下列条件的最大的区间, 使得: $\alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)$, 且对任意的 $u,v\in N\cap[\alpha_1,\alpha_2]$, 有: $\varphi(\frac{u+v}{2})=\frac{1}{2}(\varphi(u)+\varphi(v))$. 所以由 (5) 式得: 对任意的 $i\in A$, 有 $|x_1(i)|,|x_2(i)|\in[\alpha_1,\alpha_2]$. 之前已经证明了当 $i\notin A$ 时, 有 $x_1(i)=x_2(i)=x(i)$, 并且 $|x_1(i)|=|x_2(i)|=|x(i)|\notin(\alpha_1,\alpha_2)$. 所以当 $i\notin[a_1,a_2)$ 时, 有 $x_1^*(i)=x_2^*(i)=x^*(i)$. 令

$$x_1^*=\begin{cases}\beta_1, & i\in[a_1,a_2)\\ x^*, & i\notin[a_1,a_2),\end{cases}$$

$$x_1^*=\begin{cases}\beta_2, & i\in[a_1,a_2)\\ x^*, & i\notin[a_1,a_2).\end{cases}$$

则有 $\rho_\varphi(x_1)=\rho_\varphi(x_2)=1$. 所以

$$\sum_{i=n_1}^{n_2}\varphi(\beta_1)\omega(i)=\sum_{i=n_1}^{n_2}\varphi(\beta_2)\omega(i).$$

其中 $n_1=\min\{N\cap[a_1,a_2)\}$, $n_2=\max\{N\cap[a_1,a_2)\}$. 所以 $\beta_1=\beta_2$, 即 $\alpha=\beta_1=\beta_2$. 从而 $x=x_1=x_2$. 因此 x 是端点.

第三章　赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的端点

本节我们将重点研究 Orlicz–Lorentz 空间关于 Orlicz 范数的端点的等价性条件. 函数空间中的基本概念已经在引言中作了叙述，下面我们再补充一些有用的定义与性质，为本章的证明作好准备.

Kamińska(见 [1]) 已经证明了： $x \in \Lambda_{\varphi,w}$ 是单位球面 $S(\Lambda_{\varphi,w})$ 的一个端点当且仅当 (1) $\rho_\varphi(x) = 1$; (2) 对任意的 $t \in [0,\gamma)$, 存在 $\alpha > 0, A \in [0,\gamma)$ 和一个可测函数 g, 使得 $|x(t)| = \alpha\chi_A + g(t)$, 其中 $A \cap \mathrm{supp} g = \emptyset$, $\alpha \notin S$ 且 $g(t) \in S$.

令 $L(w)$ 表示 $t \in [0,\gamma)$ 的集合，满足右导数 $w'(t) = 0$. 对于一个固定的 $x \in \Lambda_{\varphi,w}$, σ 表示满足 $x^* \circ \sigma(t) = x(t)$ 的保测变换. 则上述结果可以改进为：

命题 3.1 令 w 为 $[0,\gamma)$ 上一个正的权函数 (不一定要严格凸). 则 $x \in \Lambda_{\varphi,w}$ 是 $S(\Lambda_{\varphi,w})$ 的端点当且仅当

- $\rho_\varphi(x) = 1$;
- 存在 $\alpha > 0, A \in [0,\gamma)$ 以及一个可测函数 g , 使得

$$|x(t)| = \alpha\chi_A + g(t), \tag{1}$$

  其中 $A \cap \mathrm{supp} g = \emptyset$, $\alpha \notin S$ 满足 $m(L(w) \cap \sigma(A)) = 0$, 并且对任意的 $t \in [0,\gamma)$, 都有 $g(t) \in S$.

事实上，很容易验证 [1] 中的引理 6 可以被改进为如下形式：

定理 3.2 令 w 为一个正的权函数. 若 $\rho_\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\rho_\varphi(f) + \beta\rho_\varphi(g) < \infty$, 其中 $\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0$, 则对于任意的 $u \notin L(w)$, 都有

$$\varphi(\alpha f(u) + \beta g(u))^* = \alpha\varphi(f^*(u)) + \beta\varphi(g^*(u)). \tag{2}$$

证明： 令 $F_f(u) = \int_0^u \varphi(f^*)$, 则对于任意的 $u < \gamma$, 都有： $F_f(u) < \infty$. 且 F_f 在 $[0,\gamma)$ 的

任意闭子区间内是绝对连续的. 从而用分部积分法可得:

$$\int_a^b \varphi(f^*)\omega = \int_a^b \omega dF_f(u) = F_f(b)\omega(b) - F_f(a)\omega(a) - \int_a^b F_f\omega',$$

其中, $[a,b] \subset (0,\gamma)$, 并且有 $\rho_\varphi(f) < \infty$. 令 $m = \lim\limits_{b\to\gamma} F_f(b)\omega(b)$, 则有 $m \le \rho_\varphi(f) < \infty$, 并且 $\lim\limits_{a\to 0} F_f(a) = 0$. 所以 $\rho_\varphi(f) = m - \int_0^\gamma F_f\omega'$. 取函数 f, g 满足引理中的条件, 令 $n = \lim\limits_{b\to\gamma} F_g(b)\omega(b)$. 同理可得 $\rho_\varphi(g) = n - \int_0^\gamma F_g\omega'$. 再令 $l = \lim\limits_{b\to\gamma} F_{\alpha f+\beta g}(b)\omega(b)$. 则 $\rho_\varphi(\alpha f+\beta g) = l - \int_0^\gamma F_{\alpha f+\beta g}\omega'$. 因为

$$F_{\alpha f+\beta g} = \int_0^u \varphi((\alpha f+\beta g)^*) \le \int_0^u \alpha\varphi(f^*) + \beta\varphi(g^*) = \alpha F_f + \beta F_g.$$

所以 $l \le \alpha m + \beta n$. 由已知:

$$0 = \alpha\rho_\varphi(f) + \beta\rho_\varphi(g) - \rho_\varphi(\alpha f+\beta g) = (\alpha m + \beta n - l) - \int_0^\gamma (\alpha F_f + \beta F_g - F_{\alpha f+\beta g})\omega'.$$

因为 ω 是严格单调递减的, 所以 $\omega' < 0$. 所以 $\alpha F_f + \beta F_g = F_{\alpha f+\beta g}$, a.e. $t \in [0,\gamma)$ 从而 $\alpha\int_0^\gamma \varphi(f^*) + \beta\int_0^\gamma \varphi(g^*) = \int_0^\gamma \varphi((\alpha f+\beta g)^*)$. 即

$$\varphi(\alpha f(u) + \beta g(u))^* = \alpha\varphi(f^*(u)) + \beta\varphi(g^*(u)).$$

另一个引理 ([1] 中的引理 5) 在上述性之中也扮演了一个重要的角色并且在我们的主要定理的证明中亦很有用处. 现叙述如下:

引理 3.3 假设对任意的 $t \in A, mA > 0$, 和 $|f| \le |g|$ 都有 $|f| < |g|$. 则存在一个正测度集合 B , 使得对任意的 $t \in B$, 都有 $f^*(t) < g^*(t)$ 成立.

现在我们转向 $\Lambda^o_{\varphi,w}$ 中通用的定理. 吴从和任丽伟在 [7] 中检验了

$$\int_0^\gamma \psi\left[p(kx^*(t))\right] w(t)dt = \int_0^\gamma \psi\left[p(kx(t))^*\right] w(t)dt = \int_0^\gamma \psi\left[p(kx(t))\right]^* w(t)dt.$$

并且证明了以下重要结论:

引理 3.4 令 $x \in \Lambda^o_{\varphi,w}$. 若存在一个 $k > 0$, 使得 $\rho_\psi(p(k|x|)) = 1$, 则有

$$\|x\|^o = \int_0^\gamma x^*(t)\cdot p(kx^*(t))w(t)dt = \frac{1}{k}\left(1 + \rho_\varphi(kx)\right). \tag{3}$$

引理 3.5 令 $x \in \Lambda^o_{\varphi,w}$. 则有

$$\|x\|^o = \frac{1}{k}\left(1+\rho_\varphi(kx)\right) = \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\rho_\varphi(kx)\right). \tag{4}$$

当且仅当 $k \in K(x) := [k^*, k^{**}]$, 其中 $k^* = \inf\{k>0 : \rho_\psi(p(k|x|)) \ge 1\}$, $k^{**} = \sup\{k>0 : \rho_\psi(p(k|x|)) \le 1\}$.

我们从一个关于 $x \in S\left(\Lambda^o_{\varphi,w}\right)$ 成为一个端点的必要性的引理开始. 该想法是从 Kamińska 的论文 [1] 中细化而来的.

引理 3.6 若对于任意的 $t \in [0,\gamma)$ 都有 $w(t) > 0$ 并且 $x \in S\left(\Lambda^o_{\varphi,w}\right)$ 是一个端点, 则对于任意的 $k \in K(x)$, $k|x(t)|$ 至多达到一个值 $\alpha \in S'$.

证明: 假设相反的情况, 存在一些 $k \in K(x)$, 使得 $k|x(t)|$ 在 S' 中达到两个不同的点. 则存在 $S_1, S_2 \subset S'$, 使得 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 并且满足 $m((kx)^{-1}(S_i)) > 0$ 对 $i = 1,2$ 成立. 我们用同样的方式, 从而总是可以找到这样的集合 S_i, 使得 $m\{(kx)^{*-1}(S_i)\} > 0$ 对 $i = 1,2$ 成立. 此外, 注意到集合 S' 是满足 φ 的图像在里面是一条直线的开区间的并. 再加上 $(kx)^*$ 是右连续的, 则上述条件导致以下两种情形:

情形 I. 存在一个区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 使得 $(\alpha_1, \alpha_2) \subset S'$, 并且存在一个区间 $[t_1, t_2]$ 使得 $(kx)^*$ 在 $[t_1, t_2]$ 上是连续且严格递减的, 并且有 $(kx)^*([t_1, t_2]) \subset [\alpha_1, \alpha_2]$.

情形 II. 存在区间 $[\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_3, \alpha_4]$ 使得 $\alpha_1 < \alpha_2 \le \alpha_3 < \alpha_4$ 并且 $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4) \subset S'$; 存在 $a \in (\alpha_1, \alpha_2), b \in (\alpha_3, \alpha_4)$ 使得 $(kx)^*\chi_{B_1} = a, (kx)^*\chi_{B_2} = b$, 其中 $B_1 = (kx)^{*-1}(a), B_2 = (kx)^{*-1}(b)$ 且 $0 < mB_i < \infty$ 对 $i = 1,2$ 都成立, 并且 $(kx)^*\chi_{(B_1\cup B_2)'}(t) \notin (\alpha_1, \alpha_2) \cup (\alpha_3, \alpha_4)$. 因为若 x 是一个端点, 则 x^* 也是 ([1] 中的性质 4), 从而我们只要研究 x^* 来代替 x 即可.

对于情形 I. $u \in [t_1, t_2]$ 为任意的. 令 $\beta_i = x^*(t_i)$ 其中 $i = 1,2$. 令 $s_i = x^{*-1}[(\beta_i + x^*(u))/2]$. 由 x^* 的严格单调性可得: $s_1 \in [t_1, u], s_2 \in [u, t_2]$. 考虑函数 $F : [t_1, t_2] \to R$ 定

义为:

$$F(u)=\int_{t_1}^{s_1}[\varphi(k\beta_1)-\varphi(2kx^*-k\beta_1)]\,w+\int_{s_1}^{u}[\varphi(2kx^*-kx^*(u))$$
$$-\varphi(kx^*(u)]\,w-\int_{u}^{s_2}[\varphi(kx^*(u))-\varphi(2kx^*-kx^*(u))]\,w$$
$$-\int_{s_2}^{t_2}[\varphi(2kx^*-k\beta_2)-\varphi(k\beta_2)]\,w.$$

函数 s_i 关于 u 连续，从而 F 也连续. 此外易验证 $F(t_1)<0$ 且 $F(t_2)>0$. 所以存在 $t_3\in(t_1,t_2)$ 使得 $F(t_3)=0$. 令 $\beta_3=x^*(t_3)$. 定义

$$x_1=x^*\chi_{[t_1,t_2]'}+\beta_1\chi_{[t_1,s_1]}+(2x^*-\beta_3)\chi_{[s_1,s_2]}+\beta_2\chi_{[s_2,t_2]},$$

$$x_2=x^*\chi_{[t_1,t_2]'}+(2x^*-\beta_1)\chi_{[t_1,s_1]}+\beta_3\chi_{[s_1,s_2]}+(2x^*-\beta_2)\chi_{[s_2,t_2]}.$$

容易看出对 $i=1,2$ 我们有 $x_i^*=x_i$, $kx_i([t_1,t_2])\subset[\alpha_1,\alpha_2]$, 且当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $x^*=(x_1+x_2)/2$. 由 φ 的线性性质，我们得到:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\rho_\varphi(kx_1)+\rho_\varphi(kx_2)]\\&=\int_{[t_1,t_2]'}\varphi(kx^*)w+\int_{[t_1,s_1]}\frac{\varphi(k\beta_1)+\varphi(2kx^*-k\beta_1)}{2}w\\&\quad+\int_{[s_1,s_2]}\frac{\varphi(k\beta_3)+\varphi(2kx^*-k\beta_3)}{2}w+\int_{[s_2,t_2]}\frac{\varphi(k\beta_2)+\varphi(2kx^*-k\beta_2)}{2}w\\&=\rho_\varphi(kx^*).\end{aligned}$$

此外，由等式 $F(t_3)=0$ 容易得出

$$\rho_\varphi(kx_1)=\rho_\varphi(kx_2)=\rho_\varphi(kx^*).$$

从而有

$$\|x_i\|^o\leq\frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kx_i))=\frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kx^*))=\|x\|^o=1.$$

因此 x 不是一个端点.

对于情形 II. 与 [1] 中 (7.2) 和 (7.3) 中的证明相似，我们可以证明存在数 $0<a_1<a_2<b_1<b_2$ 使得 $ka_i\in(\alpha_1,\alpha_2)$, $kb_i\in(\alpha_3,\alpha_4)$ 其中 $i=1,2$. 并且

$$a=\frac{a_1+a_2}{2},\quad b=\frac{b_1+b_2}{2},$$

$$\int_{B_2}\varphi(kb_2)w+\int_{B_1}\varphi(ka_1)w=\int_{B_2}\varphi(kb_1)w+\int_{B_1}\varphi(ka_2)w.$$

令

$$x_1=x^*\chi_{(B_1\cup B_2)'}+a_1\chi_{B_1}+b_2\chi_{B_2},$$

$$x_2=x^*\chi_{(B_1\cup B_2)'}+a_2\chi_{B_1}+b_1\chi_{B_2}.$$

由假设 $kx^*\chi_{(B_1\cup B_2)'}\notin(\alpha_1,\alpha_2)\cup(\alpha_3,\alpha_4)$ 和 a_i,b_i 的选取，以及函数 x_i 是非增的，可得 $x_i^*=x_i$. 并且有 $x^*=(x_1+x_2)/2$. 由 φ 在区间 $[\alpha_1,\alpha_2]$, $[\alpha_3,\alpha_4]$ 上的线性性质我们可得

$$\rho_\varphi(kx_1)=\rho_\varphi(kx_2)=\rho_\varphi(kx^*).$$

从而 $\|x_1\|^o\le 1$, $\|x_2\|^o\le 1$. 因此 x 不是一个端点.

引理 3.7 令 $w(t)>0, x\in\Lambda^o_{\varphi,w}$ 以及 $k_0\in K(x)$, $k_0|x(t)|=\alpha\chi_A+g(t)$, 其中 $\alpha\notin S, g(t)\in S$. $\varphi(u)$ 的包含 α 的最大的线性区间是 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 并且在 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 中可设 $\varphi(u)=au-b$. 令 $[a_1,a_2):=\sigma(A)$ ，其中 σ 是满足 $x^*\circ\sigma(t)=|x(t)|$ 的保测变换. 定义 $s=\int_{[a_1,a_2)}w$, $M=\int_{[a_1,a_2)'}\varphi(k_0x^*)w$ 以及 $N=1-bs+M$. 从而若满足 $mA'\neq 0$, 则有 $N>0$.

证明: 因为 $k_0\in K(x)$ 并且 $\varphi(u)$ 的右导数 $p(u)$ 是右连续的. 从而只可能有两种情况:

I. $\rho_\psi(p(k_0x))=1$.

II. $\rho_\psi(p(k_0x))<1$, 但是对任意的 $k>k_0$, 都有 $\rho_\psi(p(kx))\ge 1$.

最后，在任何情况下都有 $\rho_\psi(p(k_0x))\le 1$. 因为 $\psi(p(u))+\varphi(u)=p(u)u$ 并且当 $u\in[\alpha_1,\alpha_2]$ 时，有 $p(u)=a=p(\alpha)$, 从而 $\varphi(u)=au-\psi(p(\alpha))$, 所以， $b=\psi(p(\alpha))$. 因此有:

$$\begin{aligned}
N &= 1-bs+M\ge\rho_\psi(p(k_0x))-b\int_{[a_1,a_2)}w+\int_{[a_1,a_2)'}\varphi(k_0x^*)w\\
&= \left[\int_{[a_1,a_2)'}\psi[p(k_0x^*)]w+\int_{[a_1,a_2)'}\varphi(k_0x^*)w\right]\\
&\quad+\left[\int_{[a_1,a_2)}\psi[p(k_0x^*)]w-\int_{[a_1,a_2)}bw\right]\\
&= \int_{[a_1,a_2)'}(k_0x^*)[p(k_0x^*)]w+\int_{[a_1,a_2)}[\psi(p(\alpha))-b]w\\
&= \int_{[a_1,a_2)'}(k_0x^*)[p(k_0x^*)]w>0.
\end{aligned}$$

我们现在得到本节主要的定理.

定理 3.8 令 $w(t)>0$. $x\in S\left(\Lambda^0_{\varphi,w}\right)$ 是端点当且仅当对任意的 $k\in K(x)$, 要么 $k|x(t)|=g(t)\in S$, 要么 $k|x(t)|=\alpha\chi_A$ 其中 $\alpha\in S'$ 且 $m(\sigma(A)\cap L(w))=0$.

证明: 必要性. 由引理 3.6, 在 $k|x(t)|$ 中至多存在一个值 $\alpha\in S'$. 即对任意的 $k\in K(x)$, 都有 $k|x(t)|=\alpha\chi_A+g(t)$, 其中 $g(t)\in S$ 且 $A\cap \mathrm{supp} g=\emptyset$. 我们将证明要么 $mA=0$ 要么 $g(t)\equiv 0$.

假设其是错误的, 则由引理 3.7 , 对于一些 $k_0\in K(x)$, 我们有 $N>0$.

$$k|x(t)|=\alpha\chi_A+g(t)$$

取 $\beta_1<\beta_2$ 使得

$$\alpha=\frac{k_0\beta_1+k_0\beta_2}{2},$$
$$\frac{3\alpha+\alpha_1}{4}<k_0\beta_1<\alpha<k_0\beta_2<\frac{\alpha_2+3\alpha}{4},$$
$$\frac{sa}{2N}(k_0\beta_2-k_0\beta_1)<\min\left\{\frac{\alpha-\alpha_1}{2(\alpha+\alpha_1)},\frac{\alpha_2-\alpha}{2(\alpha+\alpha_2)}\right\}.$$

令 k_1,k_2 满足:

$$\frac{k_0}{k_1}=\frac{3\alpha+\alpha_1}{2(\alpha+\alpha_1)}=1+\frac{\alpha-\alpha_1}{2(\alpha+\alpha_1)},$$
$$\frac{k_0}{k_2}=\frac{3\alpha+\alpha_2}{2(\alpha+\alpha_2)}=1-\frac{\alpha_2-\alpha}{2(\alpha+\alpha_2)}.$$

则有

$$\frac{\alpha+\alpha_1}{2}<k_1\beta_1<k_2\beta_2<\frac{\alpha+\alpha_2}{2}. \tag{5}$$

定义 k',k' 为下列等式的两个根:

$$\frac{1}{k'}+\frac{1}{k''}=\frac{2}{k_0},\qquad \frac{1}{k'}-\frac{1}{k''}=\frac{sa}{N}(\beta_2-\beta_1). \tag{6}$$

从而,

$$k'=\frac{k_0}{1+\frac{sa}{2N}(k_0\beta_2-k_0\beta_1)}>\frac{k_0}{1+\frac{\alpha-\alpha_1}{2(\alpha+\alpha_1)}}=k_1,$$
$$k''=\frac{k_0}{1-\frac{sa}{2N}(k_0\beta_2-k_0\beta_1)}<\frac{k_0}{1-\frac{\alpha_2-\alpha}{2(\alpha+\alpha_2)}}=k_2,$$

并且有

$$\frac{\alpha_1+\alpha}{2}<k'\beta_1<k_0\alpha<k''\beta_2<\frac{\alpha+\alpha_2}{2}. \tag{7}$$

令

$$y(t)=\beta_1\mathrm{sgn}x(t)\chi_A+\frac{k_0}{k'}x(t)\chi_{A'},$$

$$z(t)=\beta_2\mathrm{sgn}x(t)\chi_A+\frac{k_0}{k''}x(t)\chi_{A'},$$

则 $2x(t)=y(t)+z(t)$, 且

当 $t\in A'$ 时，有 $k'|y(t)|=k''|z(t)|=k_0|x(t)|\notin(\alpha_1,\alpha_2)$；

当 $t\in A$ 时，有 $k'\beta_1=k''\beta_2\in(\frac{\alpha_1+\alpha}{2},\frac{\alpha_2+\alpha}{2})$.

若引理 3.7 中的情形 I 发生，则

$$\begin{aligned}\rho_\psi(p(k'y))&=\int_{[a_1,a_2)}\psi(p(k'\beta_1))w+\int_{[a_1,a_2)'}\psi(p(k'y)^*)w\\&=\int_{[a_1,a_2)}\psi(p(\alpha))w+\int_{[a_1,a_2)'}\psi(p(k_0x)^*)w\\&=\rho_\psi(p(k_0x))=1.\end{aligned}$$

类似地我们有 $\rho_\psi(p(k''z))=1$. 因此， $k'\in K(y)$ 且 $k''\in K(z)$.

若情形 II 发生，则 $\rho_\psi(p(k'y))=\rho_\psi(p(k''z))=\rho_\psi(p(k_0x))<1$. 当对于任意的 $k>k'$, 不失一般性，我们可以假设 k 非常接近于 k' 满足 $k\beta_1$ 和 $\frac{k}{k'}\alpha$ 都在 $(\frac{\alpha+\alpha_1}{2},\frac{\alpha+\alpha_2}{2})$ 中，且 $\frac{k}{k'}\alpha_1\le\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$. 因此，当 $k_0|x(t)|\le\alpha_1$ 时，有 $k|y(t)|=\frac{k}{k'}\cdot k_0|x(t)|\le\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$, 且当 $k_0|x(t)|\ge\alpha_2$ 时，有 $k|y(t)|>k_0|x(t)|\ge\alpha_2>\frac{\alpha+\alpha_2}{2}$. 从而有

$$\begin{aligned}\rho_\psi(p(ky))&=\int_{[a_1,a_2)}\psi(p(k\beta_1))w+\int_{[a_1,a_2)'}\psi(p(ky)^*)w\\&=\int_{[a_1,a_2)}\psi(p(\frac{k}{k'}\alpha))w+\int_{[a_1,a_2)'}\psi(p(\frac{k}{k'}k_0x)^*)w\\&=\rho_\psi(p(\frac{k}{k'}k_0x))\ge1.\end{aligned}$$

对于最大的 $k>k'$ 我们仍然有 $\rho_\psi(p(ky))\ge1$. 类似的我们可以证明对任意的 $k>k''$, 都有 $\rho_\psi(p(kz))\ge1$. 因此我们证明了 $k'\in K(y)$ 以及 $k''\in K(z)$.

现在由 k', k'' 的定义，我们可得

$$\begin{aligned}\|y\|^o &= \frac{1}{k'}\left[1+\int_{[a_1,a_2)}\left[a(k'\beta_1)-b\right]w+\int_{[a_1,a_2)'}\varphi(k_0x)^*w\right]\\ &= \frac{1}{k''}\left[1+\int_{[a_1,a_2)}\left[a(k''\beta_2)-b\right]w+\int_{[a_1,a_2)'}\varphi(k_0x)^*w\right]\\ &= \|z\|^o.\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\|y\|^o &= \frac{1}{k'}\left[1+\rho_\varphi(k'y)\right]+\frac{1}{k''}\left[1+\rho_\varphi(k''z)\right]\\ &= \frac{k'+k''}{k'k''}\left[1+\frac{k''}{k'+k''}\rho_\varphi(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}\rho_\varphi(k''z)\right]\\ &= \frac{2}{k_0}\left\{1+\int_{[a_1,a_2)}\left[\frac{k''}{k'+k''}\varphi(k'\beta_1)+\frac{k'}{k'+k''}\varphi(k''\beta_2)\right]\right.\\ &\quad\left.+\frac{k''}{k'+k''}\int_{[a_1,a_2)'}\varphi(k'y)^*w+\frac{k'}{k'+k''}\int_{[a_1,a_2)'}\varphi(k''z)^*w\right\}\\ &= \frac{2}{k_0}\left[1+\int_{[a_1,a_2)}\varphi\left(\frac{k_0\beta_1+k_0\beta_2}{2}\right)w+\int_{[a_1,a_2)'}\varphi(k_0y)^*w\right]\\ &= \frac{2}{k_0}\left[1+\int_{[0,\gamma)}\varphi(k_0x)^*w\right]=2.\end{aligned}$$

因此，$\|y\|^o=\|z\|^o=1$ 可推出 x 不是端点.

最后，我们将证明如果 x 是端点且对于一些 $k_0\in K(x)$, 有 $k_0|x(t)|=\alpha\chi_A$, 则 $m(\sigma(A)\cap L(w))=0$.

事实上，令 $A_0=\sigma(A)\cap L(w)$. 若 $mA_0\neq 0$, 我们将 A_0 分成两个子集等测度的 A_1, A_2. 选取充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\subset S'$. 定义

$$x_1=x\chi_{A_0'}+\frac{\alpha+\varepsilon}{k_0}\chi_{A_1}+\frac{\alpha-\varepsilon}{k_0}\chi_{A_2},$$

$$x_2=x\chi_{A_0'}+\frac{\alpha-\varepsilon}{k_0}\chi_{A_1}+\frac{\alpha+\varepsilon}{k_0}\chi_{A_2}.$$

显然有 $2x=x_1+x_2$ 以及 $\rho_\varphi(k_0x_1)=\rho_\varphi(k_0x_2)=\rho_\varphi(k_0x)$, 从而 $\|x_1\|^0\leq\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_\varphi(k_0x_1)\right)=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_\varphi(k_0x)\right)=1$. 类似的，$\|x_2\|^0\leq 1$. 矛盾.

充分性. 设 $x,y,z \in S(\Lambda^0_{\varphi,w}), y+z=2x$. 我们将证明 $y=z$. 对任意的 $k' \in K(y)$, $k'' \in K(z)$, 令 $k=\frac{2k'k''}{k'+k''}$. 我们有

$$
\begin{aligned}
2 &\geq \|y\|^o+\|z\|^o=\frac{1}{k'}\left[1+\rho_\varphi(k'y)\right]+\frac{1}{k''}\left[1+\rho_\varphi(k''z)\right] && (8)\\
&=\frac{k'+k''}{k'k''}\left[1+\frac{k''}{k'+k''}\rho_\varphi(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}\rho_\varphi(k''z)\right] && (9)\\
&=\frac{k'+k''}{k'k''}\left\{1+\int_{[0,\gamma)}\left[\frac{k''}{k'+k''}\varphi^*(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}\varphi^*(k''z)\right]w\right\} && (10)\\
&\geq\frac{k'+k''}{k'k''}\left\{1+\int_{[0,\gamma)}\left[\frac{k''}{k'+k''}\varphi(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}\varphi(k''z)\right]^*w\right\} && (11)\\
&\geq\frac{k'+k''}{k'k''}\left\{1+\int_{[0,\gamma)}\varphi\left[\frac{k''}{k'+k''}(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}(k''z)\right]^*w\right\} && (12)\\
&=\frac{2}{k}\left[1+\rho_\varphi(kx)\right] && (13)\\
&\geq 2\|x\|^o=2. && (14)
\end{aligned}
$$

因此，我们得到三个结论.

I. $\|x\|^o=\frac{1}{k}\left[1+\rho_\varphi(kx)\right]$, 所以 $k \in K(x)$.

II. 由引理 3.3 可得

$$
\frac{k''}{k'+k''}\varphi(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}\varphi(k''z)=\varphi(kx). \tag{15}
$$

再由 (11),(12) 式，得

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,\gamma)}\left[\frac{k''}{k'+k''}\varphi(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}\varphi(k''z)\right]^*w\\
=\ &\int_{[0,\gamma)}\varphi\left[\frac{k''}{k'+k''}(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}(k''z)\right]^*w.
\end{aligned}
$$

从而 (因为 $w>0$)

$$
\left[\frac{k''}{k'+k''}\varphi(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}\varphi(k''z)\right]^*=\varphi\left[\frac{k''}{k'+k''}(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}(k''z)\right]^*.
$$

因此，若满足 $k|x(t)|=g(t)\in S$, 我们总有 $kx=k'y=k''z\in S$. 从而, $k\|x\|^o=k'\|y\|^o=k''\|z\|^o$, 即 $k=k'=k''$ 以及 $x=y=z$.

III. 在 $w(t)$ 的严格递减点，我们有

$$\varphi\left[\frac{k''}{k'+k''}(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}(k''z)\right]^*=\varphi(kx)^* \tag{16}$$

$$=\varphi(kx^*)=\frac{k''}{k'+k''}\varphi(k'y^*)+\frac{k'}{k'+k''}\varphi(k''z^*),$$

再由定理 3.2 以及等式 (8)-(12), 得

$$\rho_\varphi\left[\frac{k''}{k'+k''}(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}(k''z)\right]=\rho_\varphi(kx)=\frac{k''}{k'+k''}\rho_\varphi(k'y)+\frac{k'}{k'+k''}\rho_\varphi(k''z).$$

所以若 $k|x(t)|=\alpha\chi_A$ 满足 $m(\sigma(A)\cap L(w))=0$, 则

$$\varphi(\alpha)=\frac{k''}{k'+k''}\varphi(k'y^*)+\frac{k'}{k'+k''}\varphi(k''z^*)$$

在 $\sigma(A)$ 上成立. 但是 y^* 和 z^* 是递减的，所以它们在 $\sigma(A)$ 上只能为常数，分别称为 β_1 和 β_2. 进一步的，由结论 II, 当 $t\in A'$ 时，有 $y(t)=z(t)=0$. 从而对 $t\in A$, 有 $|y(t)|=\beta_1,|z(t)|=\beta_2$. 因为 $\|y\|^o=\beta_1\|\chi_A\|^o=1=\beta_2\|\chi_A\|^o=\|z\|^o$, 我们有 $\beta_1=\beta_2=\frac{\alpha}{k}$ 从而对 $t\in A$, 有 $|y(t)|=|z(t)|$. 但是 $y(t)=-z(t)$ 是不可能的，因为如果其成立，就有 $\alpha=k|x(t)|=k\frac{|y(t)+z(t)|}{2}=0$. 从而我们证明了 $x=y=z$. 证毕.

推论 3.9 令 $w(t)>0$ 对所有的 $t\in[0,\gamma)$ 成立，则 $\Lambda^o_{\varphi,w}$ 为严格凸的当且仅当 φ 为严格凸.

证明: 若 φ 严格凸且 $w(t)>0$, 则 $mS'=0$. 所以所有的 $x\in S(\Lambda^o_{\varphi,w})$ 都是端点.

反之，若 φ 不是严格凸，则存在一个线性区间 (α_1,α_2) 使得 $p(u)=a$ 在里面是常数. 选取 r_1 使得 t $\psi(a)\int_0^{r_1}w<1$, 再选取 $b>\alpha_2$ 使得 $\psi(p(b))\int_0^{r_1}w>1$. 令

$$F(t)=\psi(p(b))\int_0^t w+\psi(a)\int_t^{t_1}w.$$

容易看出存在一个 $r_0\in(0,r_1)$, 使得 $F(r_0)=1$. 令 $\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)/2$. 定义 $k=bp(b)\int_0^{r_0}+\alpha a\int_{r_0}^{r_1}$ 以及

$$x=\frac{1}{k}\left(b\chi_{[0,r_0)}+\alpha\chi_{[r_0,r_1]}\right). \tag{17}$$

我们有 $x = x^*$, 以及 $\rho_\psi(p(kx)) = 1$ 从而推出 $k \in K(x)$. 因此，由引理 3.4,

$$\|x\|^o = \frac{1}{k}\int_0^{r_1} (kx)^* \cdot p((kx)^*)w = \frac{1}{k}\left[\int_0^{r_0} b\psi(b)w + \int_{r_0}^{r_1} \alpha \cdot aw\right] = 1.$$

通过观察式子 $k|x(t)| = \alpha\chi_{[r_0,r_1]} + b\chi_{[0,r_0)}$, 我们能从定理中立刻得出 x 不是端点的结论.

参 考 文 献

[1] A.Kamińska, *Extreme points in Orlicz-Lorentz spaces*, Arch. Math., **55**(1990), 173-180.

[2] A.Kamińska, *Uniform convexity of generalized Lorentz spaces*, Arch. Math., **56**(1991), 181-188.

[3] A.Kamińska, P.Lin, and H.Sun, *Uniformly normal structure of Orlicz-Lorentz spaces*, Lect. Notes in Pure and App. Math. **175**,229-238 (1995).

[4] H.Hudzik, A.Kamińska and M.Mastylo, *Geometric properties of some Calderón-Lozanovskiĭ spaces and Orlicz-Lorentz spaces*, Houston J. Math. **22**, No.3, (1996), 639-663.

[5] 吴从炘，任丽伟， *Orlicz–Lorentz* 空间的局部一致凸，数学研究. (1997), 146-150.

[6] A.Kamińska,C.Lennard, M.Mastylo and S.Mikuska, *The uniform Kadec-Klee property for Orlicz-Lorentz spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soci., **143**(2007), 349-374.

[7] 吴从炘，任丽伟， 赋 *Orlicz* 范数的 *Orlicz–Lorentz* 空间的严格凸性，数学杂志. **19**(1999), 235-240.

[8] 姚正安，程庆平，宋述刚， *Orlicz–Lorentz* 序列空间，数学年刊， 13A (增刊). (1992), 80-91.

[9] P.Foralewski,H.Hudzik and L.Szymaszkiewicz, *On some geometric and topological properties of generalized Orlicz-Lorentz sequence spaces*, Math. Nachr. **281**,No.2,181-198(2008).

[10] S.T.Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertations Mathematicae 356, Warzawa, (1996).

[11] A.Kamińska, *Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces*, Math. Nechr., **147**(1990), 173-180.

[12] P.K.Lin and H.Y.Sun, *Some geometric properties of Lorentz-Orlicz spaces*, Arch. Math., **64**(1995), 500-511..

[13] M.M.Rao and Z.D.Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker, NewYork,(1991).

[14] M.M.Rao and Z.D.Ren, *Applications of Orlicz spaces*, Marcel Dekker, NewYork,(2002).

[15] A.Kamińska and L.Maligranda, *On Lorentz spaces* $\Gamma_{p,\omega}$, Israel J. Math., **140**(2004), 285-318.

[16] J.Cerda, H.Hudzik, A.Kamińska and M.Mastylo, *Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz-Lorentz spaces*, Positivity, **2**(1998), 311-337.

[17] H.Hudzik,A.Kamińska and M.Mastylo, *On the dual of Orlicz-Lorentz Space*, Proc. Amer. Math. Soci.,**130**(6), 1645-1654 (2002).

[18] Montgomery-Smith, S.J., *Comparison of Orlicz-Lorentz Spaces*,StudiaMath. **103**,161-189 (1992).

[19] 吴从炘，王廷辅，陈述涛，王玉文， *Orlicz* 空间几何理论, 哈尔滨，哈尔滨工业大学出版社， (1986).

[20] A.Kamińska and L.Maligranda, *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,\omega}$, $0 < p < \infty$, Studia Math.**160**(3) (2004), 267-286.

[21] P.K.Lin, *K-uniform rotundity of Lorentz-Orlicz spaces*,J.Math.Anal.Appli. **204**,(1996), 29-45.

[22] R.Kumar and R.Kumar, *Composition Operators on Orlicz-Lorentz Spaces*, Integr.equ. oper.theory **60**, (2008), 79-88.

[23] P.Kolwicz, *Rotundity Properties in Calderón-Lozanovskiĭ Spaces*, Houston Journal of Mathematicsc **31**, No.3, (2005).

攻读硕士期间发表和待发表的论文

1. 王晶晶，严亚强，关于 Orlicz 空间中依测度收敛点列的一点注，已被苏州大学学报 (自然科学版) 录用.

致 谢

本学位论文是在导师严亚强教授的悉心指导下完成的. 三年来，他给我热情的关怀和鼓励. 他严谨的治学态度和勤奋的敬业精神使我深受感染. 他宽厚的为人和高尚的品德更加令我感动. 从论文的选题到成文，严老师都倾注了大量的心血. 在此衷心感谢导师三年来对我的指导和教诲，没有他的关心，支持和鼓励，就不会有我的这篇论文.

感谢王金才老师给予我的莫大的帮助. 他所教授的基础知识为我完成论文奠定了良好的基础，并且在平时的学习生活中给我解答了很多学术上的问题，使我受益良多. 王老师的聪明才智和乐观的生活态度亦给我留下了深刻的印象.

感谢苏州大学数学科学学院所有老师和同学的帮助和支持，让我顺利完成研究生阶段的学业.

感谢陈怡同学在平时的学习及论文的完成过程中给予我的帮助和支持.

蘇州大學

硕士学位论文摘要

（2009 届）

Orlicz-Lorentz 空间中的端点

Extreme Points of Orlicz-Lorentz Spaces

研究生姓名　王晶晶

指导教师姓名　严亚强（教授）

专业名称　基础数学

研究方向　泛函分析

论文提交日期　2009 年 5 月

Orlicz–Lorentz 空间中的端点

详细摘要

自从 A.Kamińska 1990 年提出了 Orlicz–Lorentz 空间的概念以来，涌现出大量关于赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的研究成果．例如：端点的等价刻划，一致凸和一致赋范结构的等价条件，一致非方性，弱一致 Kadec-Klee 性质，弱 * 一致 Kadec-Klee 性质等一系列的成果．在 1999 年吴从炘和任丽伟对 Orlicz–Lorentz 空间赋以 Orlicz 范数并给出了在这个范数下严格凸性的刻划，并给出了研究赋 Orlicz 范数的空间几何性质的框架，但是关于这种范数的 Orlicz–Lorentz 空间的研究成果却很少，并且缺乏系统性．本文试图就端点的刻划展开研究．本文的主要工作： 1. 探讨 Orlicz–Lorentz 空间中的一些还未被验证的范数定理，收敛定理以及子空间定理． 2. 给出赋 Luxemburg 范数的 Orlicz-Lorentz 序列空间的端点的刻划． 3. 给出赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间的端点的刻划．

全文共分为三个章节，分别有所侧重地进行了某一方面的研究．

第一章是奠定基础的一章，主要是结合已有的 Orlicz 空间中的基本理论来讨论 Orlicz–Lorentz 序列空间上的一些相对应的基础定理．由于序列空间属于有原子无穷测度空间的问题，很多在无原子有限测度空间中显然的命题需要系统地重新验证，本节试图做好这一工作．我们验证了 Orlicz–Lorentz 序列空间中包括以下两个定理在内的的五个范数性质，六个收敛定理以及两个子空间定理．

定理 1.8 设 $\varphi \in \Delta_2$ 且 $x_n, x \in \lambda_{\varphi,\omega}$，则

(1) $\rho_\varphi(x) \to \infty \Rightarrow \|x\| \to \infty$;

(2) $\|x\| = 1 \Rightarrow \rho_\varphi(x) = 1$;

(3) 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|x\| \geq \varepsilon$ 时，有 $\rho_\varphi(x) \geq \delta$;

(4) 任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\rho_\varphi(x) \leq 1-\varepsilon$ 时，有 $\|x\| \leq 1-\delta$;

(5) 任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\rho_\varphi(x) > 1+\varepsilon$ 时，有 $\|x\| \geq 1+\delta$.

定理 1.13 若 φ 不满足 Δ_2 条件，则 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 中有一子空间等距同构于 l^∞.

第二章继续考虑序列空间的情况，在参考了有关函数空间里关于 Luxemburg 范数的端点理论已知结果的情况下，给出并证明了序列空间中关于 Luxemburg 范数的端点的刻划：

定理 2.3 x 属于单位球体 $B(\lambda_{\varphi,\omega})$, ω 为正的且严格单调递减的权函数. 则 x 是 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 的端点的充要条件是：

(1) $\rho_\varphi(x) = 1$:

(2) 存在 $\alpha > 0$, 集合 A 和一个可测数列 y, 使得 $|x| = \alpha\chi_A + y$, 其中 $A \cap \mathrm{supp} y = \emptyset$, $\alpha \notin S$ 且 $y(t) \in S$.

在最后一章，我们转向函数空间，该章也是最有难度的一章，我们重点研究了赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间中端点的等价刻划. 我们证明了：

定理 3.8 令 $w(t) > 0$. $x \in S\left(\Lambda^0_{\varphi,w}\right)$ 是端点当且仅当对任意的 $k \in K(x)$, 要么 $k|x(t)| = g(t) \in S$, 要么 $k|x(t)| = \alpha\chi_A$ 其中 $\alpha \in S'$ 且 $m(\sigma(A) \cap L(w)) = 0$.

关键词：端点； Orlicz-Lorentz 空间； Luxemburg 范数； Orlicz 范数；严格凸空间

作　　者：王晶晶

指导老师：严亚强教授