Orlicz 空間的K凸性

王廷辅　陈述涛

摘　　要

本文讨论Orlicz 空间关于*Luxemburg*范数 k—致凸，k严格凸，局部k—致凸和弱局部k—致凸性，得到，k—致凸性与一致凸性等价；其他几种凸性都与严格凸性等价。

*F•Sullivan*在1979年〔1〕引进k严格凸、k—致凸等概念。这些概念与空间的自反性，超自反性和正规结构有密切联系，同时还已应用于讨论最佳逼近问题。

*Banach*空间X称为k—致凸是指对$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in S(X)$，$\|x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}\|>k+1-\delta$时有

$$Sup\left\{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{k+1}) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \cdots & f_k(x_{k+1}) \end{vmatrix} : f_1,f_2,\cdots,f_k\in U(X^*)\right\}<\varepsilon$$

这里$S(X)$和$U(X^*)$分别表示X中单位球面和X的共轭空间X^*中的闭单位球。

X称为k严格凸是指对线性无关的$x_i\in S(X)$，$i=1,2,\cdots,k+1$，恒有$\|x_1+x_2+\cdots x_{k+1}\|<k+1$。此外，可类似地定义局部$k$—致凸和弱局部$k$—致凸。由〔1〕以及熟知的事实，诸凸性的蕴涵关系如下表

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{\text{一致凸}} & \rightarrow & \boxed{\text{局部一致凸}} & \rightarrow & \boxed{\text{弱局部一致凸}} & \rightarrow & \boxed{\text{严格凸}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{k\text{一致凸}} & \rightarrow & \boxed{\text{局部}k\text{一致凸}} & \rightarrow & \boxed{\text{弱局部}k\text{一致凸}} & \rightarrow & \boxed{k\text{严格凸}} \end{array}$$

本文讨论*Orlicz*空间关于*Luxemburg*范数具有各种凸性的条件，发现k—致凸与一致凸等价，其余6种凸性一律等价。

文中所用符号悉与〔2〕同，只简记$(L_M^*,\|\cdot\|_{(M)})=L_M^*$。

定理1　下述说法等价

（1）$M(u)\in\Delta_2$且$M(u)$严格凸；

（2）L_M^*局部一致凸；

（3）L_M^* k严格凸。

证(1)⇒(2)，见〔3〕$Th\cdot 1$.(2)⇒(3)显然.今证(3)⇒(1).

若$M(u)\overline{\in}\Delta_2$，则有增列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，$M(u_1)>1$，满足

$$M[(1+\frac{1}{n})u_n]>2^n M(u_n)\quad(n=1,2,\cdots).$$

记$a=min\{1,mesG\}$。取G的一列两两不交子集$\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$mesG_n=\frac{a}{2^{n+1}M(u_n)}$；在$G\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$中取两两不交子集$\{D_i\}_{i=1}^{k+1}$，使$mesD_i=$

$\frac{a}{2(k+1)M(1)}(i=1,2\cdots,k+1)$.定义$k+1$个函数

$$x_i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\chi_{G_n}(t)+\chi_{D_i}(t)\quad(i=1,2\cdots,k+1).$$

则对每个$i=1,2,\cdots,k+1$，

$$\int_G M(x_i(t))dt=\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)mesG_n+M(1)mesD_i<a\leqslant 1;$$

对任何自然数m，

$$\int_G M[1+\frac{1}{m})x_i(t)]dt>\sum_{n=m}^{\infty}M[(1+\frac{1}{n})u_n]mesG_n>\sum_{n=m}^{\infty}2^n M(u_n)mesG_n=\infty$$

这表明$\|x_i\|_{(M)}=1(i=1,2\cdots,k+1)$. $\{x_i\}$的线性无关性是显而易见的.又

$$\int_G M[\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i(t)]dt\leqslant\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\int_G M(x_i(t)dt\leqslant 1;$$

对任何自然数m，

$$\int_G M[(1+\frac{1}{m})\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i(t)]dt>\sum_{n=1}^{\infty}M[(1+\frac{1}{m})u_n]mesG_n=\infty$$

这说明$\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i\|_{(M)}=1$.与$k$严格凸矛盾了。

若$M(u)$非严格凸，则其图象在某区间$[u,v]$上为直线段。取$G'\subset G$，$O<mesG'<mesG$，使$[M(u)+kM(v)]\frac{mesG'}{k+1}\leqslant 1$；再取$a\geqslant 0$使$M(a)mesG\setminus G'=1-[M(u)+kM(v)]\frac{mesG'}{k+1}$. 将$G'$按测度分成$k+1$个两两不交的相等子集$\{G_i\}_{i=1}^{k+1}$. 令

$$x_1(t)=u\chi_{G_1}(t)+v\chi_{G_2}(t)+\cdots+v\chi_{G_{k+1}}(t)+a\chi_{G\setminus G'}(t),$$
$$x_2(t)=v\chi_{G_1}(t)+u\chi_{G_2}(t)+\cdots+v\chi_{G_{k+1}}(t)+a\chi_{G\setminus G'}(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{k+1}(t)=v\chi_{G_1}(t)+v\chi_{G_2}(t)+\cdots+u\chi_{G_{k+1}}(t)+a\chi_{G\setminus G'}(t)$$

则

$$\int_G M[x_i(t)]dt = [M(u)+kM(v)]\frac{mesG'}{k+1}+M(a)mesG\setminus G'=1,$$

故$x_i\in S(L_M^*)$,$(i=1,2,\cdots,k+1)$且显然是线性独立组，但

$$\int_G M[\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i(t)]dt=(k+1)M(\frac{u+kv}{k+1})\ \frac{mesG'}{k+1}+M(a)mesG\setminus G'$$

$$=\frac{1}{k+1}[M(u)+kM(v)]mesG^1+M(a)mesG\setminus G'=1$$

故$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i\in S(L_M^*)$. 与$k$严格凸矛盾.

定义　我们称N函数$M(u)$是一致凸的，如果对任何$\varepsilon>0$和$u_0>0$，存在$\delta>0$使得$|u-v|\geqslant\varepsilon max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon u_0$时恒有

$$M(\frac{u+v}{2})\leqslant(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

定理 2　下述命题等价

（Ⅰ）$M(u)\in\Delta_2$且$M(u)$一致凸，

（Ⅱ）L_M^*一致凸，

（Ⅲ）L_M^*k一致凸.

证（Ⅰ）⇒（Ⅱ）见[4]第三段定理Ⅱ.（Ⅱ）⇒（Ⅲ）即[1]定理 1．今证（Ⅲ）⇒（Ⅰ）.由定理 1 知$M(u)\in\Delta_2$必要.若$M(u)$非一致凸，则存在$\varepsilon>0$，$u_0>0$和实数u_n,v_n满足

$$|u_n-v_n|\geqslant\varepsilon max(|u_n|,|v_n|)\geqslant\varepsilon u_0$$

使得

$$M(\frac{u_n+v_n}{2})>(1-\frac{1}{n})\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2}\tag{a}$$

$n=1,2,\cdots$.不妨假定$u_n\geqslant v_n\geqslant 0$对所有$n$成立.注意到（Ⅲ）蕴涵$L_M^*k$严格凸，故由定理 1 可知$M(u)$严格凸，从而知$\{u_n,v_n\}$必为无界集.于是我们不妨可设

$$[M(u_n)+kM(w_n)]\frac{1}{k+1}mes(G)\geqslant1$$

这里 $w_n=\frac{1}{2k}[(k-1)u_n+(k+1)v_n]$，$(n=1,2,\cdots)$. 今选$G^{(n)}\subset G$使

$$[M(u_n)+kM(w_n)]\frac{1}{k+1}mes(G^{(n)})=1\tag{b}$$

再将$G^{(n)}$依测度等分为$k+1$个两两不交可测子集$\{G_i^{(n)}\}_{i=1}^{k+1}$并简记$C_n=\frac{1}{k+1}mes(G^{(n)})(n=1,2,\cdots)$. 定义

$$x_1^{(n)}(t)=\sum_{m=1}^{k}w_n\chi_{G_m^{(n)}}(t)+u_n\chi_{G_{k+1}^{(n)}}(t)$$

$$x_i^{(n)}(t)=\sum_{m\neq i-1} w_n\chi_{G_m^{(n)}}(t)+u_n\chi_{G_{i-1}^{(n)}}(t)$$

$(n=1,2,\cdots,i=2,3,\cdots,k+1)$,则由$(b)$,

$$\int_G M(x_i^{(n)}(t))dt=[M(u_n)+kM(w_n)]C_n=1$$

因而$\|x_i^{(n)}\|_M=1(n=1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,k+1)$.又由$(a)$

$$\int_G M\Big(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i^{(n)}(t)\Big)dt=(k+1)M\Big(\frac{kw_n+u_n}{k+1}\Big)C_n$$

$$=(k+1)M\Big(\frac{u_n+v_n}{2}\Big)C_n\geqslant(k+1)\Big(1-\frac{1}{n}\Big)C_n\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2}\qquad(c)$$

联系(b)和Jensen不等式，有

$$1=\Big[M(u_n)+kM\Big(\frac{(k-1)u_n+(k+1)v_n}{2k}\Big)\Big]C_n$$

$$\leqslant\Big\{M(u_n)+\frac{k}{2k}[(k-1)M(u_n)+(k+1)M(v_n)]\Big\}C_n$$

$$=(k+1)C_n\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2}\qquad(d)$$

代入(c)式,得

$$\int_G M\Big(\frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{k+1}x_m^{(n)}(t)\Big)dt\geqslant1-\frac{1}{n}$$

于是由$\|\cdot\|_M$定义有

$$\Big\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i^{(n)}\Big\|_M\geqslant1-\frac{1}{n}\to1\quad(n\to\infty)$$

现取$\alpha_n>0$使得$\|\alpha_n\chi_{G_i^{(n)}}\|_N=1$(由特征函数的范数计算公式，

$\alpha_n=\dfrac{1}{C_nM^{-1}\big(\frac{1}{C_n}\big)}$，$n=1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,k$)．定义$L_M^*$上有界线性泛函

$$g_i^{(n)}:g_i^{(n)}(x)=\int_G x(t)\alpha_n\chi_{G_i^{(n)}}(t)dt\quad(x\in L_M^*)$$

则易见$g_i^{(n)}\in U((L_M^*)^*)(n=1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,k)$.今估算

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\ g_1^{(n)}(x_1^{(n)})&g_1^{(n)}(x_2^{(n)})&\cdots&g_1^{(n)}(x_{k+1}^{(n)})\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ g_k^{(n)}(x_1^{(n)})&g_k^{(n)}(x_2^{(n)})&\cdots&g_k^{(n)}(x_{k+1}^{(n)})\end{vmatrix}$$

将这行列式的每一列中减去最末一列再按第一行展开，得

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}(u_n-w_n)\alpha_nC_n,&0&0&\cdots&0\\ 0&,(u_n-w_n)\alpha_nC_n,&0&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&\cdots&(u_n-w_n)\alpha_nC_n\end{vmatrix}$$

$$=[(u_n-w_n)\alpha_n C_n]^k=[\frac{k+1}{2k}(u_n-v_n)\alpha_n C_n]^k$$

$$\geqslant[\frac{k+1}{2k}\varepsilon u_n\alpha_n C_n]^k$$

再由(d)式

$$1\leqslant(k+1)C_nM(u_n)\leqslant M(k+1)u_n)C_n$$

故$(k+1)u_n\geqslant M^{-1}(\frac{1}{C_n})$. 从而

$$\Delta_n\geqslant[\frac{\varepsilon}{2k}M^{-1}(\frac{1}{C_n})\alpha_n C_n]^k=[\frac{\varepsilon}{2k}]^k$$

$(n=1,2,\cdots)$. 这与 L_M^*的k一致凸性冲突了.

参考文献

〔1〕*F·Sullivan, Canad·J·Math·*, 31 (1979), 628—636.

〔2〕吴从炘，王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科技出版社，1983，哈尔滨.

〔3〕陈述涛、王玉文，数学杂志，5，No.1 (1985)，9—14.

〔4〕*A·Kaminska, Math.Proc.*, *A*85(1) (1982), 27—36.