Orlicz空间内最佳逼近算子*

王玉文 陈述涛

（哈尔滨科技大学） （哈尔滨师范大学）

设X为*Banach*空间，M为X的子集，$x\in X$，如果有$y\in M$，满足

$$\|x-y\|=\inf_{m\in M}\|x-m\|$$

则称y为x在M中的最佳逼近元，记为$y=P(x|M)$。一般将集值映射$P_M: x\mapsto\{y: y=P(x|M)\}$称为度量投影，特别将单值的度量投影称为最佳逼近算子，记为$P(\cdot|M)$。

最佳逼近的基本问题是最佳逼近算子的存在性、连续性以及最佳逼近元的判据。

1970年，I.Singer[1]，1974年，A.L.Brown[2]，1976年，J.Blatter[3]曾证得：对X中任何闭凸集C，$P(\cdot|C)$均存在的充分必要条件是X自反、严格凸，但此条件并不蕴涵$P(\cdot|M)$的连续性。

本文在Orlicz空间讨论上述问题，给出算子$P(\cdot|C)$，对于Orlicz空间中任何闭凸集C，均连续的充要条件，得到最佳逼近元的判据。

设X为*Banach*空间，X称为具有H性质，乃指$x_n\xrightarrow{w}x_0$，$\|x_n\|\to\|x_0\|$ $(n\to\infty)$蕴涵$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$；具有H性质的严格凸空间称为H严格凸空间；X的子集C称为局部弱列紧集，是指C中任何有界叙列均有弱收敛子列；如果X为光滑空间，$r(x)$为$x\in X$ $(x\neq 0)$的支撑泛函，则对任意$y\in X$，有

$$\rho'(x,\ y)=\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}=\langle x,\ r(x)\rangle$$

这里$\rho'(x,\ y)$为范数$\|\cdot\|$在x处沿方向y的*Gateaux*导数[4]。

$M(u)$，$N(v)$表示互余的N函数；$p(u)$，$q(v)$分别为其右导数；$\|\cdot\|_M$，$\|\cdot\|_{(M)}$分别表示Orlicz空间L_M^*上的Orlicz范数与*Luxemburg*范数；“$M(u)\in\Delta_2$”表示$M(u)$对较大的u满足Δ_2条件；$M(u)$严格凸是指$p(u)$严格增。其他未说明的记号与术语与[5]相同。

I 最佳逼近元的判据

定理1.1 设$M(u)\in\Delta_2$，$p(u)$连续，C为L_M^*中凸集，$u_0\in C$，$u\in L_M^*\setminus C$，则关于Orlicz范数$\|\cdot\|_M$ $u_0=P(u|C)$的充分必要条件是：对任意$w\in C$，

$$\int_G[u_0(t)-w(t)]p(k|u(t)-u_0(t)|)\,sgn(u(t)-u_0(t))dt\geqslant 0 \qquad (1)$$

*. 84.4.29 收到来稿。

这里 k 满足 $\int_G N[p(k|u(t)-u_0(t)|)]dt=1$。

证明 必要性

首先证明：$[L_M^*, \|\cdot\|_M]$ 为光滑空间，而且对 $x\in L_M^*(x\neq 0)$，其支撑泛函为

$$r(x)(t)=p(k|x(t)|)\,\mathrm{sgn}\,x(t) \qquad a.e.$$

这里 $k>0$，满足 $\int_G N[p(k|x(t)|)]dt=1$。

对 $x\in L_M^*$，$x\neq 0$，由[5]（P_{74} Th.23)存在 $k>0$，使得

$$\|x\|_M=\frac{1}{k}\left\{1+\int_G M[kx(t)]dt\right\} \tag{2}$$

对任意 $y\in[L_M^*,\|\cdot\|_M]^*=[L_N^*,\|\cdot\|_{(N)}]$，$\|y\|_{(N)}=1$，使得

$$\|x\|_M=\int_G x(t)y(t)dt \tag{3}$$

由Young不等式，有

$$1+\int_G M[kx(t)]dt=k\|x\|_M=\int_G kx(t)y(t)dt$$

$$\leqslant\int_G M[kx(t)]dt+\int_G N[y(t)]dt\leqslant\int_G M[kx(t)]dt+1$$

于是

$$\int_G N[y(t)]dt=1$$

而且

$$\int_G\{M[kx(t)]+N[y(t)]-kx(t)y(t)\}dt=0$$

由Young不等式总有

$$M[kx(t)]+N[y(t)]-kx(t)y(t)\geqslant 0$$

便知于G上几乎处处成立

$$M[kx(t)]+N[y(t)]=kx(t)y(t)$$

从而由Young不等式成为等式的条件[5]（P4），几乎处处有

$y(t)=p(k|x(t)|)sgnx(t)$ 或 $x(t)=\frac{1}{k}q(|y(t)|)sgny(t)$，顾及到 $p(u)$的连续性，上面两式合同，故有

$$y(t)=p(k|x(t)|)sgnx(t) \qquad a.e.$$

再由$y(t)$的任意性，便知$[L_M^*, \|\cdot\|_M]$为光滑空间，而且

$$r(x)(t)=y(t)=p(k|x(t)|)sgnx(t) \qquad a.e. \tag{4}$$

今设$u_0=P(u|C)$（关于Orlicz范数$\|\cdot\|_M$）。对任何$w\in C$，令

$$h(\tau)=(1-\tau)u_0+\tau w \qquad \tau\in[0,1]$$

由C的凸性，$h(\tau)\in C \quad \tau\in[0,1]$。再令

$$\psi(\tau)=\|h(\tau)-u\|_M=\|(u_0-u)+\tau(w-u_0)\|_M \qquad \tau\in[0,1]$$

则$\psi(\tau)\geqslant\psi(0) \quad \tau\in[0,1]$。

由于$[L_M^*, \|\cdot\|_M]$光滑，从而$\|\cdot\|_M$ Gateaux可微[4]，故

$$0 \leqslant \lim_{\tau \to 0} \frac{\psi(\tau) - \psi(0)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\|(u_0 - u) + \tau(w - u_0)\|_M - \|u_0 - u\|_M}{\tau}$$

$$= \rho'(u_0 - u,\ w - u_0) = \langle w - u_0,\ r(u_0 - u)\rangle \tag{5}$$

这里$r(u_0 - u)$为$u_0 - u$处的支撑泛函，由（4），有

$$r(u_0 - u) = p(k|u_0 - u|)sgn(u_0 - u) \tag{6}$$

而且

$$\int_G N[p(k|u(t) - u_0(t)|)]dt = 1$$

于是由（5）、（6）式得到

$$\int_G [u_0(t) - w(t)]p(k|u(t) - u_0(t)|)sgn(u(t) - u_0(t))dt \geqslant 0$$

充分性

因为$u - u_0 \neq 0$，而且

$$\int_G N[p(k|u(t) - u_0(t)|)]dt = 1$$

由[6]（P69Th2·1），我们有

$$\|u - u_0\|_M = \int_G |u(t) - u_0(t)|\, p(k|u(t) - u_0(t)|)dt$$

于是对任意的$w \in C$，由广义Hölder不等式，并顾及到已知条件（1），便有

$$\|u - u_0\|_M = \int_G [u(t) - u_0(t)]p(k|u(t) - u_0(t)|)sgn(u(t - u_0(t))dt$$

$$\leqslant \int_G [u(t) - w(t)]p(k|u(t) - u_0(t)|)sgn(u(t) - u_0(t))dt$$

$$\leqslant \|u - w\|_M \|p(k|u - u_0|)\|_{(N)} = \|u - w\|_M$$

从而关于Orlicz范数$\|\cdot\|_M$，$u_0 = P(u|C)$。

定理1.2 设$M(u) \in \Delta_2$，$p(u)$连续，C为L_M^*中凸集，$u_0 \in C$，$u \in L_M^* \setminus C$，则关于Luxemburg范数$\|\cdot\|_{(M)}$ $u_0 = P(u|C)$充分必要条件是：对任意$w \in C$

$$\int_G [u_0(t) - w(t)]p\left(\frac{|u(t) - u_0(t)|}{\|u - u_0\|_{(M)}}\right)sgn(u(t) - u_0(t))dt \geqslant 0 \tag{7}$$

证明 必要性.

因为$p(u)$连续，由[5]（P165C.1），便知空间$[L_N^*, \|\cdot\|_N]$严格凸。但$M(u) \in \Delta_2$，从而$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]^* = [L_N^*, \|\cdot\|_N]$，于是由对偶性[4]$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]$为光滑空间。

如果$u_0 = P(u|C)$，则$u - u_0 \neq 0$，注意到$M(u) \in \Delta_2$，由[6]（P300，L.4.3），便知

$$p\left(\frac{|u - u_0|}{\|u - u_0\|_{(M)}}\right) \in L_N^*$$

取$\lambda > 0$，使得

$$\left\|\lambda p\left(\frac{|u-u_0|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\right\|_N = 1 \tag{8}$$

由$M(u)\in\Delta_2$，推知

$$\int_G M\left[\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right]dt = 1$$

于是由广义 Hölder不等式以及Young不等式成为等式的条件，我们有

$$\int_G [u(t)-u_0(t)]\lambda p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)sgn(u(t)-u_0(t))dt$$

$$\leqslant \|u-u_0\|_{(M)}\left\|\lambda p\left(\frac{|u-u_0|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\right\|_N$$

$$\leqslant \|u-u_0\|_{(M)}\lambda\left\{1+\int_G N\left[p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\right]dt\right\}$$

$$=\|u-u_0\|_{(M)}\lambda\left\{\int_G M\left[\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right]dt+\int_G N\left[p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\right]dt\right\}$$

$$=\|u-u_0\|_{(M)}\lambda\int_G\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\,p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)dt$$

$$=\int_G [u(t)-u_0(t)]\lambda p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)sgn(u(t)-u_0(t))dt \tag{9}$$

由（8）、（9）得知

$$\|u-u_0\|_M=\int_G [u(t)-u_0(t)]\lambda p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)sgn(u(t)-u_0(t))dt \tag{10}$$

对任意的$w\in C$，与（5）同理可证

$$\int_G [w(t)-u_0(t)]\lambda p\left(\frac{|u_0(t)-u(t)|}{\|u_0-u\|_{(M)}}\right)sgn(u_0(t)-u(t))dt$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{\|(u_0-u)+\tau(w-u_0)\|_{(M)}-\|u_0-u\|_{(M)}}{\tau}\geqslant 0$$

再由$\lambda>0$，便知（7）成立。

充分性

因为$M(u)\in\Delta_2$，$\dfrac{u-u_0}{\|u-u_0\|_{(M)}}\in L_M^*$，再次由[5]（P300，L.4.3），便有

$$0<\lambda=\left\|p\left(\frac{|u-u_0|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\right\|_N^{-1}<\infty$$

再由（10）的同样推理，得到

$$\|u-u_0\|_{(M)}=\int_G[u(t)-u_0(t)]\lambda p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)sgn(u(t)-u_0(t))dt$$

对任意$w\in C$，由广义Hölder不等式，并顾及到（7），我们有

$$\|u-u_0\|_{(M)}=\int_G[u(t)-u_0(t))]\lambda p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)sgn(u(t)-u_0(t))dt$$

$$\leqslant\int_G[u(t)-w(t)]\lambda p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)sgn(u(t)-u_0(u))dt$$

$$\leqslant\|u-w\|_{(M)}\left\|\lambda p\left(\frac{|u-u_0|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\right\|_N=\|u-w\|_{(M)}$$

即$u_0=P(u|C)$

推论1.3 如果$M(u)\in\Delta_2$，$p(u)$连续，L为L_M^*的线性子空间，$u_0\in L$，$u\in L_M^*\setminus L$，则关于Orlicz范数$\|\cdot\|_M$，$u_0=p(u|L)$的充分必要条件是：对任意$w\in L$

$$\int_G w(t)p(k|u(t)-u_0(t)|)sgn(u(t)-u_0(t))dt=0$$

这里k满足

$$\int_G N[p(k|u(t)-u_0(t)|)]dt=1$$

证明 必要性

因为L为线性集，从而为凸集，由定理1.1，对任意$w\in L$，我们有

$$\int_G[u_0(t)-w(t)]p(k|u(t)-u_0(t)|)sgn(u(t)-u_0(t))dt\geqslant 0 \tag{11}$$

这里k满足

$$\int_G N[p(k|u(t)-u_0(t)|)]dt=1 \tag{12}$$

由L的线性，$u_0\in L$蕴涵$0=u_0-u_0\in L$，$2u_0\in L$，从而在（11)中，将w分别换为0与$2u_0$，不等号不变，从而

$$\int_G u_0(t)p(k|u(t)-u_0(t)|)sgn(u(t)-u_0(t))dt=0$$

于是由（11），有

$$\int_G w(t)p(k|u(t)-u_0(t)|)sgn(u(t)-u_0(t))dt\leqslant 0 \tag{13}$$

又因$-w\in L$，在（13）中将w换为$-w$，不等号不变，于是

$$\int_G w(t)p(k|(u(t)-u_0(t)|)sgn(u(t)-u_0(t))dt=0$$

顾及到（12），便知必要性得证。

充分性

由已知条件与定理1.1立得。

推论1.4 设$M(u)\in\Delta_2$，$p(u)$连续，L为L_M^*的线性子空间，$u_0\in L$，$u\in L_M^*\setminus L$，则关于Luxemburg范数$\|\cdot\|_{(M)}$$u_0=P(u|L)$的充分必要条件是：对任意元$w\in L$

$$\int_G w(t)p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)sgn(u(t)-u_0(t))dt = 0$$

证明 由定理1.2，类似推论1.3立得。

推论1.5[8] 若C为$L^p[a, b]$（$1<p<\infty$）中凸集，则$\varphi_0\in C$为$f\in L^p$在C中最佳逼近元的充分必要条件是：对任意$\varphi\in C$

$$\int_a^b[\varphi_0(t)-\varphi(t)]\,|f(t)-\varphi_0(t)|^{p-1}sgn(f(t)-\varphi_0(t))dt\geqslant 0$$

证明 由定理1.2，并注意到$M(u)=|u|^p/p$（$1<p<\infty$），立得。

Ⅱ 最佳逼近算子的连续性

引理2.1 设X为H严格凸的Banach空间，C为X中局部弱列紧闭凸集，则最佳逼近算子$P(\cdot|C)$存在且连续。

证明 因为C为局部弱列紧闭凸集，范数$\|\cdot\|$严格凸，由熟知的结论[1]，算子$P(\cdot|C)$处处存在。

下面证其连续性。

设x、$x_n\in X$（$n=1, 2, \cdots$），$\|x_n-x\|\to 0$（$n\to\infty$），假定

$$\|P(x_n|C)-P(x|C)\|\text{不收敛于 }0 \qquad (n\longrightarrow\infty)$$

无碍于一般性，设

$$\|P(x_n|C)-P(x|C)\|\geqslant\varepsilon_0>0 \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{14}$$

由于

$$\begin{aligned}&\big|\|P(x_n|C)-x_n\|-\|P(x|C)-x\|\big|\\ \leqslant&\begin{cases}\big|\|P(x|C)-x_n'\|-\|P(x|C)-x\|\big|, & \text{当}\|P(x_n|C)-x_n\|\geqslant\|P(x|C)-x\|)\\ \big|\|P(x_n|C)-x_n\|-\|P(x_n|C)-x\|\big|, & \text{当}\|P(x_n|C)-x_n\|<\|P(x|C)-x\|\end{cases}\\ \leqslant&\|x_n-x\|\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned} \tag{15}$$

从而$\{P(x_n|C)\}$为C中的有界序列，由C的局部弱列紧性，有子列$\{P(x_{n_k}|C)\}$，使得

$$P(x_{n_k}|C)\xrightarrow{W} y\in X \qquad (k\to\infty)$$

再由C为闭凸集，从而弱闭，便知$y\in C$。

由（15），以及

$$P(x_{n_k}|C)-x_{n_k}\xrightarrow{W} y-x \qquad (k\to\infty) \tag{16}$$

注意到范数$\|\cdot\|$的弱下半连续性，便有

$$\|y-x\|\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\|P(x_{n_k}|C)-x_{n_k}\|=\lim_{n\to\infty}\|P(x_n|C)-x_n\|=\|P(x|C)-x\|$$

从而由$P(x|C)$的唯一性，推知

$$y=P(x|C) \tag{17}$$

由（17）、（16）、（15），应用H性质，便有

$$P(x_{n_k}|C)-x_{n_k}\longrightarrow P(x|C)-x \qquad (k\to\infty)$$

从而由$x_{n_k}\to x$ （$k\to\infty$）推知

$$P(x_{n_k}|C)\longrightarrow P(x|C) \qquad (k\to\infty)$$

与（14）矛盾。

定理2.2 设$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]$严格凸，C为$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]$中局部弱列紧闭凸集，则最佳逼近算子$P(\cdot|C)$存在且连续。

证明 因为$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]$严格凸，由[5]（P165，Th.7.2），$M(u)\in\Delta_2$且严格凸。再由[6]，知$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]$局部一致凸，从而H严格凸，于是由引理2.1，知定理结论成立。

定理2.3 下述命题等价

(i) $P(\cdot|C)$，对于任何闭凸集$C\subset L_M^*$，关于Orlicz范数存在且连续。

(ii) $P(\cdot|C)$，对于任何闭凸集$C\subset L_M^*$，关于*Luxemburg*范数存在且连续。

(iii) $M(u)$、$N(v)\in\Delta_2$，$M(u)$严格凸。

证明 注意到（iii）等价于$[L_M^*、\|\cdot\|_M]$（$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]$）自反、严格凸[6]，从而（i）⇒（iii）、（ii）⇒（iii）自明。

（iii）⇒（ii）

因为$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]$自反，故L_M^*中任何闭凸集C均为局部弱列紧集，再由$[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)}]$的严格凸性与定理2.2，便知（ii）不谬。

（iii）⇒（i）

由于$[L_M^*, \|\cdot\|_M]$自反，严格凸，由（[7]，Th.1），$[L_M^*, \|\cdot\|_M]$局部一致凸，从而H严格凸。再由$[L_M^*, \|\cdot\|_M]$的自反性，知$[L_M^*, \|\cdot\|_M]$中任何闭凸集C均为局部弱列紧集，于是由引理2.1，立得（i）。

参考文献

[1] I.Singer, Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces, Springer-Verlag, New York, 1970.

[2] A.L.Brown, J.Func.Anal. (1974)

[3] J.Blatter, Appr. Theory Ⅱ Texas, 1976. 299—302.

[4] J.Diestel, Geometry of Banach Spaces—Selected Topics, Lect.Not. Math. V.485, Springer—Verlag, Berlin, 1975.

[5] 吴从炘、王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科技出版社，1983。

[6] 陈述涛、王玉文，Orlicz空间局部一致凸的条件，数学杂志，Vol. 5，No. 1 (1985)，9—14.

[7] 陈述涛，Orlicz空间的局部一致凸性，哈尔滨师范大学学报，No. 2，(1983) 48—56.

[8] Н.П.Корнейчук，逼近论的极値问题，（中译本），上海科学技术出版社，1982.

Best Approximation Operators in Orlicz Spaces

Wang Yuwen and Chen Shuta

Abstract

In this paper, there is given a sufficient and necessary condition of continuity of all best approximation operators from an Orlicz space to its closed convex sets. Moreover, for any element u and any convex set C in a smooth Orlicz space, there are also given criteria of the best approximation element of u in C with respect to Orlicz norm and Luxemburg norm respectively.

注：王廷辅先生曾对本文提过有益的指导意见，笔者在此表示谢意