1998,**18**(2):217－220

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

关于 Orlicz 空间的 H 性质的注记*

王廷辅　崔云安
(哈尔滨理工大学　哈尔滨 150080)

摘要　该文给出了 Orlicz 函数空间具有 H 性质的充分必要条件.

关键词　Orlicz 空间,Köthe 空间,H 性质.
MR(1991)主题分类　46B,46E

本文以 X 表示一个 Banach 空间,$S(X)$表示 X 的单位球面,X^*表示 X 的对偶空间. 以 L^0 表示定义在无原子的有限测度空间(G,Σ,μ)上的可测函数全体.

定义 1　称 Banach 空间 X 为 Köthe 空间是指 $X\subset L^0$ 且具有如下性质:若$|x(t)|\leqslant|y(t)|$($t\in G$ a. e.)且 $y\in X$,则 $x\in X$ 且 $\|x\|\leqslant\|y\|$[6].

定义 2　$x\in X$ 称为具有绝对连续范数是指$\lim\limits_{n\to\infty}\|x\chi_{G_n}\|=0$,其中 $G_n=\{t\in G:|x(t)|\geqslant n\}$.

记 $X_0=\{x\in X:x$ 具有绝对连续范数$\}$.

定义 3　Banach 空间 X 称为具有 H 性质(又称 Kadec-Klee 性质)是指对于任意的 $x,x_n\in X$,$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|=1$ 和 $x_n\xrightarrow{w}x$ 蕴涵 $\|x_n-x\|\to 0$.

H 性质是 Banach 空间几何学中至关重要的概念,它在逼近论、控制论、概率论和优化理论中有众多应用[2-4].

定义 4　称 Köthe 空间 X 具有 Fatou 性质是指 $x_n,x_0\in X$ 和$|x_n(t)|\uparrow|x_0(t)|$($t\in G$ a. e.)蕴涵$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_0\|$.

定义 5　映射 $\Phi:R\to[0,\infty)$称为 N－函数是指

(1) $\Phi(u)\geqslant 0$, $\Phi(u)=0$ 当且仅当 $u=0$.

(2) $\Phi(-u)=\Phi(u)$,$\Phi(\lambda u+(1-\lambda)v)\leqslant\lambda\Phi(u)+(1-\lambda)\Phi(v)$当 $\lambda\in[0,1]$时.

(3) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi(u)}{u}=0$ 和 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\Phi(u)}{u}=\infty$.

以 $p(t)$表示 Φ 的右导数,以 $\Psi(v)$表示 $\Phi(v)$表示 $\Phi(u)$的余 N 函数,即

$$\Psi(v)=\sup\{u|v|-\Phi(u):u\geqslant 0\}.$$

Orlicz 函数空间是指集合

$$L_\Phi(G)=\left\{x\in L^0:\exists\, c>0,I_\Phi(cx)=\int_G\Phi(cx(t))d\mu<\infty\right\}$$

或其子集合

---

* 国家和黑龙江省自然科学基金、国家教委优秀年轻教师基金资助项目

1996-09-20 日收到原稿,1996-12-04 日收到修改稿

$$E_\Phi(G)=\left\{x\in L^0:\ \forall\ c>0,I_\Phi(cx)=\int_G\Phi\ (cx(t))d\mu<\infty\right\}.$$

赋予 Luxemburg 范数

$$\|x\|_\Phi=\inf\left\{k>0:I_\Phi(\frac{x}{k})\leqslant 1\right\}$$

或 Orlicz 范数

$$\|x\|_\Phi^0=\inf_{k>0}\left\{\frac{1}{k}(1+I_\Phi(kx)\right\}$$

所成的 Banach 空间.

为简单起见，记 $L_\Phi(G)=(L_\Phi(G),\|\ \|_\Phi)$, $L_\Phi^0(G)=(L_\Phi(G),\ \|\ \|_\Phi^0)$.

定义 4 称 N 函数 Φ 满足 Δ_2—条件(简记为 $\Phi\in\Delta_2$). 如果存在常数 $k>2$ 和 $u_0>0$ 满足

$$\Phi\ (2u)\leqslant k\Phi\ (u)\qquad 当\ |u|\geqslant u_0\ 时.$$

定义 5 称 Orlicz 函数 Φ 是严格凸的，如果对于任意的 $u,v\in R$ 且 $u\neq v$ 有

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)<\frac{1}{2}(\Phi\ (u)+\Phi\ (v)).$$

有关 Orlicz 空间的其它知识，请参考[1],[3]和[4].

1987 年，陈述涛、王玉文[1]首先给出了 Orlicz 空间具有 H 性质的充分必要条件，但是该文限定 Orlicz 函数空间 $L_\Phi(G)$ 和 $L_\Phi^0(G)$ 中的 G 为 n 维空间的有界闭集. 在证明中用到了 n 维空间的有界闭集的紧性和 G 上连续函数族在可积函数族中的稠性等结果. 故其证明不便推广到一般测度空间. 这篇短文将用新的证明方法讨论一般 Orlicz 函数空间 $L_\Phi(G)$ 和 $L_\Phi^0(G)$ 中的 H 性质，证明了与[1]中相应定理一致的结果；同时证明过程也比较简单.

引理 1 假设 Köthe 空间 X 具有 Fatou 性质，则 X 具有 H 性质蕴涵每一个 $x\in X$ 都具有绝对连续范数.

证 如不然，存在 $x\in S(X)$ 和 $\varepsilon_0>0$ 满足

$$\|x\chi_{G_n}\|\geqslant\varepsilon_0\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $G_n=\{t\in G:|x(t)|\geqslant n\}$.

因为 X 具有 Fatou 性质，存在自然数列 $n_1<n_2<\cdots$ 满足：

$$\|x\chi_{T_i}\|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}\quad i=1,2,\cdots,$$

其中 $T_i=\{t\in G:n_{i-1}\leqslant|x(t)|<n_i\}$, $n_0=0$.

记 $x_i=x\chi_{G\setminus T_i}$ $(i=1,2,\cdots)$. 则

(1) $\|x\chi_{G\setminus G_{n_{i-1}}}\|\leqslant\|x_i\|\leqslant\|x\|$，故 $\lim\limits_{i\to\infty}\|x_i\|=1$.

(2) $x_i\xrightarrow{w}x$. 事实上，对于任意的 $f\in X^*$，f 可唯一地分解为

$$f=y+g$$

其中 $g(x)=0$ 对于任意的 $x\in X_0$, $\langle x,y\rangle=\int_G x(t)y(t)d\mu<\infty$ 对任意的 $x\in X$ 成立(见[6]).

因为 $x-x_i=x\chi_{T_i}\in X_0$，所以 $g(x-x_i)=0$. 注意到 $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\langle x\chi_{T_i},y\rangle<\infty$，我们得到

$$\langle x_i-x,y\rangle=\langle x\chi_{T_i},y\rangle\to 0\quad(i\to\infty).$$

(3) $\| x_i - x \| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$. 这表明 X 不具有(H)性质.

引理 2　如果 $\{x_n\} \subset L_\Phi$ 满足 $|x_n| \leqslant M$ 对某个 $M > 0$ 成立，则 $\{x_n\}$ 是弱序列紧集.

利用 Ando 的结果[6]，此引理容易证明.

定理　Orlicz 空间具有(H)性质的充分必要条件是

(1) $\Phi \in \Delta_2$;

(2) Φ 是严格凸的.

证　定理条件的充分性的证明与[1]的相应部分相同，只需证明条件的必要性.

因为 Orlicz 空间具有 Fatou 性质，又 Orlicz 空间的每一个元素具有绝对连续范数的充分必要条件是 $\Phi \in \Delta_2$，故条件(1)成立.

下面证明条件(2)的必要性.

(1) 关于 $L_\Phi(G)$.

若(2)不成立，则存在一个区间 $[a,b]$ 使得 Φ 在其上是一个线性函数. 取 G 的一个正测度子集 E 满足

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\mu(E) \leqslant 1.$$

再取 $c \geqslant 0$ 满足

$$\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\mu E + \Phi(c)\mu(G \backslash E) = 1.$$

取 E 的两个子集 E_1^1 和 E_2^1 满足

$$\mu E_1^1 = \mu E_2^1,\ E_1^1 \cap E_2^1 = \phi,\ E_1^1 \cup E_2^1 = E.$$

再取 E_1^1 的两个子集 E_1^2 和 E_2^2 满足

$$\mu E_1^2 = \mu E_2^2,\ E_1^2 \cap E_2^2 = \phi,\ E_1^2 \cup E_2^2 = E_1^1.$$

再取 E_2^1 的两个子集 E_3^2 和 E_4^2 满足

$$\mu E_3^2 = \mu E_4^2,\ E_3^2 \cap E_4^2 = \phi,\ E_3^2 \cup E_4^2 = E_2^1.$$

$\cdots$.

一般地，取 E_k^{n-1} 的两个子集 E_{2k-1}^n 和 E_{2k}^n 满足

$$\mu E_{2k-1}^n = \mu E_{2k}^n,\ E_{2k-1}^n \cap E_{2k}^n = \phi,\ E_{2k-1}^n \cup E_{2k}^n = E_k^{n-1}$$

$(n=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots,\ 2^{n-1})$. 置

$$x_n(t) = a\chi_{\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} E_{2k-1}^n} + b\chi_{\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} E_{2k}^n} + c\chi_{G \backslash E}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

则

$$I_\Phi(x_n) = (\Phi(a) + \Phi(b))\frac{\mu E}{2} + \Phi(c)\mu(G \backslash E) = 1. \quad n = 1,2,\cdots.$$

于是，我们有 $\| x_n \|_\Phi = 1,\ n = 1,2,\cdots$.

由引理 2，$\{x_n\}$ 是弱紧序列. 不妨设(必要时取子列) $x_n \xrightarrow{w} x$. 下面证明 $\| x \|_\Phi = 1$.

令 $y(t) = p(a)\chi_E + p(c)\chi_{G \backslash E}$. 则

(i) $y \in E_\Psi$,

(ii) $\| y \|_\Psi^0 = \| y \|_\Psi^0 \| x_n \|_\Phi \geqslant \langle x_n, y \rangle = ap(a)\frac{\mu E}{2} + bp(a)\frac{\mu E}{2} + cp(c)\mu(G \backslash E)$

$$= (\Phi(a) + \Phi(b))\frac{\mu E}{2} + \Phi(c)\mu(G \backslash E) + \Psi(p(a))\mu E + \Psi(p(c))\mu(G \backslash E)$$

$$= 1 + I_\Psi(y) \geqslant \| y \|_\Psi^0.$$

可见$\langle x_n,y\rangle=\|y\|_\Psi^0(n=1,2,\cdots)$. 由$x_n\xrightarrow{w}x$立刻得到$\langle x,y\rangle=\|y\|_\Psi^0$. 故$\|x\|_\Phi=1$.

因为$\|x_n-x_m\|_\Phi=\dfrac{b-a}{\Phi^{-1}(\frac{2}{\mu E})}$对任意$n\neq m$成立，所以$x_n$不依范数收敛于$x$. 此与H性质相悖.

(Ⅱ) 关于$L_\Phi^0(G)$的情形.

若(2)不成立，则存在一个区间$[a,b]$使得Φ在其上是一个线性函数. 取G的一个正测度子集E满足

$$\Psi(p(a))\mu(E)\leqslant 1,$$

再取$c\geqslant 0$和$F\subset G\backslash E$满足

$$\Psi(p(a))\mu E+\Psi(p(c))\mu F=1.$$

将E累次分割同上，并置

$$w_n(t)=a\chi_{\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}E_{2k-1}^n}+b\chi_{\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}E_{2k}^n}+c\chi_F,\quad n=1,2,\cdots.$$

显然有$\|w_n\|_\Phi^0=k(n=1,2,\cdots)$. 置$x_n(t)=\dfrac{w_n(t)}{k}$，则$\|x_n\|_\Phi^0=1(n=1,2,\cdots)$.

由引理2，我们可以认为$x_n\xrightarrow{w}x$.

令$y(t)=p(a)\chi_E+p(c)\chi_F$. 则$y\in E_\Psi(G)$且$\|y\|_\Psi=1$. 从而

$$1\geqslant\langle x_n,y\rangle=\frac{1}{k}\langle w_n,y\rangle=\frac{1}{k}(I_\Phi(w_n)+I_\Psi(y))$$

$$=\frac{1}{k}(1+I_\Phi(kx_n))\geqslant\|x_n\|_\Phi^0=1.$$

于是得$x\in S(L_\Phi^0(G))$.

因为$\|x_n-x_m\|_\Phi^0=(b-a)\dfrac{\mu(E)}{2}\Psi^{-1}(\dfrac{2}{\mu E})$对任意的$n\neq m$成立，所以$x_n$不依范数收敛于$x$. 此与**H**性质相悖.

参 考 文 献

1 陈述涛，王玉文. Orlicz空间的**H**性质. 数学年刊，1987，**8A**：61－67

2 Diestel J. Geometry of Functional Analysis-Selected Topics. Springer-Verlag, 1975

3 Krasnoselskii M A, Rutickii Ya B. Convex Functions and Orlicz Spaces. Groningen:P Noordhoof, Ltd, 1961

4 Rao M M, Ren Z D. Theory of Orlicz Spaces. New York, Besel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc, 1991

5 Ando T. Weakly Compact Sets in Orlicz Spaces. Canad J Math, 1962, **14**: 170－176

6 Kantorovic L V, Akilov G P. Functional Analysis. Moscow, 1977

Property (H) in Orlicz Function Space

Wang Tingfu Cui Yunan

(*Harbin University of Science and Technology, Harbin* 150080)

Abstract In this paper, a criterion that Orlicz function space has property (H) is obtained.

Key words Orlicz Space, Köthe Space, (H) Property.