文章编号：1007-9831（2016）04-0016-03

赋 p –Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间结构

王晓燕[1]，王希彬[2]，赵秀芳[1]，付俊伟[1]

（1. 齐齐哈尔大学 理学院，黑龙江 齐齐哈尔 161006；2. 齐齐哈尔市朝鲜族中学校，黑龙江 齐齐哈尔 161006）

摘要：Orlicz 空间的对偶空间结构对于进一步研究 Orlicz 空间的几何性质起着重要的作用．根据赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的对偶空间结构，研究了赋 p -Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间结构，得到了 2 个空间的对偶空间结构具有相似性的结论，并且发现它们具有相等的奇异泛函范数．

关键词：Orlicz 空间；p -Amemiya 范数；对偶空间
中图分类号：O177.91　　文献标识码：A　　doi：10.3969/j.issn.1007-9831.2016.04.004

On the dual space structure of Orlicz space equipped with p –Amemiya norm

WANG Xiao-yan[1]，WANG Xi-bin[2]，ZHAO Xiu-fang[1]，FU Jun-wei[1]

（1. School of Science，Qiqihar University，Qiqihar 161006，China；2. Qiqihar Chaoxian Nationality Middle School，Qiqihar 161006，China）

Absract：The dual space structure of Orlicz space plays an important part in further studying its geometric properties. Studies the dual space structure of Orlicz space with p -Amemiya norm according to Orlicz norm and draws a conclusion that there is a similarity between the two spaces and finds that they have equal singular functional norm.

Key words：Orlicz space；p -Amemiya norm；dual space

1　引言及预备知识

自 1932 年著名波兰数学家 W.Orlicz 引入 Orlicz 空间以来，Orlicz 空间理论因其重要的理论性质和应用价值得到了长足的发展．关于 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间的几何性质研究得已近乎完善，而赋 p -Amemiya 范数 Orlicz 空间几何性质的研究刚刚开始．本文给出赋 p -Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间结构和奇异泛函范数．

以 X 表示一个 Banach 空间，$B(X)$，$S(X)$ 分别表示 X 的单位球和单位球面．

定义 1[1]　设映射 $\Phi:\mathbf{R}\to[0,\ \infty)$，如果 Φ 是偶的，非负连续凸函数，当且仅当 $u=0$ 时，$\Phi(u)=0$，则称 Φ 为 Orlicz 函数．满足 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi(u)}{u}=0$ 和 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\Phi(u)}{u}=\infty$ 的 Orlicz 函数称为 N -函数．

定义 Orlicz 函数 $\Phi(u)$ 的余函数为 $\Psi(v)=\sup\left\{|v|u-\Phi(u):u\ge 0\right\}$．

定义 2[2]　设 $(G,\ \Sigma,\ \mu)$ 是非原子完备的测度空间，L^0 是所有定义在 G 上的依测度等价的实值可测函数的全体，对于任意 $x\in L^0$，称 $I_\Phi(x)=\int\limits_G\Phi(x(t))\mathrm{d}\mu$ 为 x 关于 Φ 的模．

Orlicz 空间 $L_\Phi=\left\{x\in L^0:\ 存在\ c>0,\ I_\Phi(cx)<\infty\right\}$ 及其闭子空间 $E_\Phi=\left\{x\in L^0:\ 对于任意\ c>0,\ I_\Phi(cx)<\infty\right\}$

收稿日期：2015-12-01
作者简介：王晓燕（1972-），女，黑龙江克山人，副教授，硕士，从事应用数学研究．E-mail：szz1972@126.com

关于 Orlicz 范数 $\|x\|_\Phi^0=\sup\left\{\left|\int_G x(t)y(t)\mathrm{d}\mu\right|:\ y\in L_\Psi,\ I_\Psi(y)\le 1\right\}=\inf\limits_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi(kx)\right)$ 及 Luxemburg 范数 $\|x\|_\Phi=\inf\left\{\varepsilon>0:\ I_\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\le 1\right\}$ 均称为 Banach 空间，简记 $L_\Phi=\left[L_\Phi,\ \|\cdot\|_\Phi\right]$，$E_\Phi=\left[E_\Phi,\ \|\cdot\|_\Phi\right]$，$L_\Phi^0=\left[L_\Phi,\ \|\cdot\|_\Phi^0\right]$，$E_\Phi^0=\left[E_\Phi,\ \|\cdot\|_\Phi^0\right]$．

在 L_Φ 中引入泛函 $\|x\|_{\Phi,p}=\begin{cases}\inf\limits_{k>0}k^{-1}\left(1+I_\Phi^p(kx)\right)^{\frac{1}{p}} & 1\le p<\infty\\ \inf\limits_{k>0}k^{-1}\max\left\{1,\ I_\Phi(kx)\right\} & p=\infty\end{cases}$．事实上，$\|x\|_{\Phi,1}=\|x\|_\Phi^0$，$\|x\|_{\Phi,\infty}=\|x\|_\Phi$．已经证明，对于任意的 $1\le p\le\infty$，泛函 $\|x\|_{\Phi,p}$ 为 L_∞ 上的范数，且所有的范数是互相等价的，因此称泛函 $\|x\|_{\Phi,p}$ 为 L_Φ 上的 p -Amemiya 范数，赋予该范数的 Orlicz 空间记为 $L_{\Phi,p}$，并可以证明该空间为 Banach 空间．

记 $L_{\Phi,p}=\left[L_\Phi,\ \|\cdot\|_{\Phi,p}\right]$，$E_{\Phi,p}=\left[E_\Phi,\ \|\cdot\|_{\Phi,p}\right]$．

定义 3[3]45　如果存在常数 $k\ge 2$ 和 $u_0>0$，使得当 $|u|>u_0$ 时，有 $\Phi(2u)\le k\Phi(u)$，则称函数 Φ 满足 Δ_2 条件．

引理 1[4]　$\Phi\in\Delta_2$ 等价于 $\Psi\in\nabla_2$．

引理 2[3]190　对于任意 $f\in\left(L_{\Phi,p}\right)'$，$f$ 存在唯一分解 $f=v+s$，其中：$v\in L_{\Psi,q}$；$s\in S$，S 为奇异泛函，即对于任意 $x\in E_{\Phi,p}$，$s(x)=0$．

引理 3[5]　下述命题等价：

（1）$x\in E_{\Phi,p}$；

（2）$\|x-x_n\|_{\Phi,p}\to 0\ (n\to\infty)$；

（3）x 具有绝对连续范数．

其中：$x_n=x\cdot\chi_{G_n}$；$G_n=\left\{t\in G:\ |x(t)|\le n\right\}$．

2　主要结果及证明

定理 1　$L_{\Phi,p}$ 自反的充要条件是 $\Phi\in\Delta_2\cap\nabla_2$．

证明　必要性．由 $L_{\Phi,p}$ 是自反的可知，$E_{\Phi,p}$ 也是自反的，即 $E_{\Phi,p}=\left(E_{\Phi,p}\right)''$．由引理 1 可知，$\left(E_{\Phi,p}\right)'=L_{\Psi,q}$，于是 $\left(E_{\Phi,p}\right)''=\left(L_{\Psi,q}\right)'=\left(E_{\Phi,p}\right)'\oplus\left(L_{\Phi,p}/E_{\Phi,p}\right)'=L_{\Phi,p}+S=E_{\Phi,p}$，故 $S=\phi$，$L_{\Phi,p}=E_{\Phi,p}$．由 $S=\phi$ 可知，$\Phi\in\nabla_2$，由 $L_{\Phi,p}=E_{\Phi,p}$ 可知，$\Phi\in\Delta_2$．因此 $\Phi\in\Delta_2\cap\nabla_2$．

充分性．由 $\Phi\in\Delta_2$ 可知，$L_{\Phi,p}=E_{\Phi,p}$，$\left(L_{\Phi,p}\right)'=\left(E_{\Phi,p}\right)'=L_{\Psi,q}$；由 $\Phi\in\nabla_2$ 可知，$L_{\Psi,q}=E_{\Psi,q}$，$\left(L_{\Psi,q}\right)'=\left(E_{\Psi,q}\right)'=L_{\Phi,p}$．于是 $\left(L_{\Phi,p}\right)''=L_{\Phi,p}$．故 $L_{\Phi,p}$ 是自反的．　证毕．

推论 1　对于任意 $x\in L_{\Phi,p}$，有 $\|x\|_{\Phi,p}=\sup\left\{\int_G x(t)y(t)\mathrm{d}\mu;\ y(t)\in S\left(E_{\Psi,q}\right)\right\}$．

定理 2　令 $f\in\left(L_{\Phi,p}\right)'$，则 $\|f\|=\|v\|_{\Psi,q}+\|s\|_{\Psi,q}$．

证明　由引理 2 可知，$f=v+s$，故 $\|f\|\le\|v\|_{\Psi,q}+\|s\|_{\Psi,q}$．只须证明反向不等式：对于任意 $\varepsilon>0$，取 $x,\ y\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$，满足 $\|v\|_{\Psi,q}-\varepsilon<\int_G x(t)v(t)\mathrm{d}\mu$，$\|s\|_{\Psi,q}-\varepsilon<\langle s,\ y\rangle$．

（下转第 21 页）

$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$．进而由罗尔中值定理可知，存在 $\eta \in (\xi_1,\ \xi_2)$，使得 $g''(\eta) = 0$，这与已知 $g''(x) \neq 0$ 矛盾．因此，由 $F'(\xi) = 0$ 可得所需证明的中值表达式．

例 8　设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)| \le 1$，$f(1)f'(1) = 3$，证明：至少存在一点 $\xi \in (0,\ 2)$，满足 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$．

分析　式 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$ 可变形为 $f'(\xi)(f(\xi) + f''(\xi)) = 0$．可构造辅助函数 $F(x) = f^2(x) + f'^2(x)$，只需证明存在一点 $\xi \in (0,\ 2)$，使得 $F'(\xi) = 0$ 且 $f'(\xi) \neq 0$ 即可．

证明　对 $f(x)$ 分别在区间 $[0,\ 1]$ 与 $[1,\ 2]$ 上应用拉格朗日中值定理，有 $f(1) - f(0) = f'(\xi_1)$，$f(2) - f(1) = f'(\xi_2)$（$0 < \xi_1 < 1,\ 1 < \xi_1 < 2$）．由于 $|f(x)| \le 1$，则有 $|f'(\xi_1)| \le 2$，$|f'(\xi_2)| \le 2$．

若令 $F(x) = f^2(x) + f'^2(x)$，则 $|F(\xi_1)| \le 5$，$|F(\xi_2)| \le 5$，$F(1) = f^2(1) + f'^2(1) \ge 2f(1)f'(1) = 6$．因此有 $F(1) \ge F(\xi_1), F(1) \ge F(\xi_2)$．由此可知，存在 $\xi \in (\xi_1,\ \xi_2)$ 为函数 $F(x)$ 在区间 $[\xi_1,\ \xi_2]$ 上的最值点，且 $F'(\xi) = 2f'(\xi)(f(\xi) + f''(\xi)) = 0$．因此 $F(\xi)$ 为最值且 $F(\xi) = f^2(\xi) + f'^2(\xi) \ge F(1) \ge 6$．而 $|f(\xi)| \le 1$，故必有 $f'^2(\xi) \neq 0$，进而 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$．

参考文献：

[1]　同济大学数学系．高等数学（上册）[M]．7 版．北京：高等教育出版社，2014：68-242

[2]　四川大学数学系．高等数学（第一册）[M]．北京：高等教育出版社，1978：113-122

[3]　徐森林，薛春华．数学分析（第一册）[M]．北京：清华大学出版社，2005：185-197

[4]　李心灿．大学生数学竞赛试题研究生入学数学考试难题解析选编[M]．2 版．北京：高等教育出版社，2000：226-396

[5]　西北工业大学高等数学教研室．高等数学专题分类指导[M]．上海：同济大学出版社，1999：58-78

[6]　陈兆斗，郑连存，王辉，等．大学生数学竞赛习题精讲[M]．北京：清华大学出版社，2010：36-47

[7]　王戈平．数学分析选讲[M]．徐州：中国矿业大学出版社，2002：107-118

[8]　徐利治．大学数学解题方法诠释[M]．合肥：安徽教育出版社，1999：55-70

[9]　胡适耕．大学解题艺术[M]．长沙：湖南大学出版社，1999：296-302

（上接第 17 页）

不妨设 $x \in S(E_{\Phi,p})$，取 $\delta > 0$，使 $\mu(E) < \delta$ 且 $\int_E x(t)v(t)\mathrm{d}\mu < \varepsilon$．取 $k > 0$，$H = \{t \in G,\ |y(t)| > k\}$，满足 $\mu(H) < \delta$，$\int_H y(t)v(t)\mathrm{d}\mu < \varepsilon$，$\|y\chi_H\|_{\Phi,p} < \varepsilon$．定义 $u(t) = x(t)\cdot\chi_{G/H} + y(t)\chi_H$，由引理 3 可知，$\|u(t)\|_{\Phi,p} = \|x(t)\chi_{G/H}\|_{\Phi,p} + \|y(t)\chi_H\|_{\Phi,p} < 1 + \varepsilon$，又 $(1+\varepsilon)\|f\| \ge f(u) = ?f\left(x(t)\cdot\chi_{G/H} + y(t)\chi_H\right) = \int_{G/H} v(t)x(t)\mathrm{d}\mu + \int_H v(t)y(t)\mathrm{d}\mu + \langle s,\ y\chi_H\rangle > \int_G v(t)x(t)\mathrm{d}\mu - \varepsilon - \varepsilon + \langle s,\ y\rangle > \|v\|_{\Psi,q} - \varepsilon - 2\varepsilon + \|s\|_{\Psi,q} - \varepsilon = ?\|v\|_{\Psi,q} + \|s\|_{\Psi,q} - 4\varepsilon$，由 ε 任意性，有 $\|f\| \ge \|v\|_{\Psi,q} + \|s\|_{\Psi,q}$．故 $\|f\| = \|v\|_{\Psi,q} + \|s\|_{\Psi,q}$．　　证毕．

参考文献：

[1]　吴从炘，王廷辅．Orlicz 空间及其应用[M]．哈尔滨：黑龙江科技出版社，1983

[2]　Cui Yunan，Duan L F，Hudzik H．Basic Theory of p-Amemiya Norm in Orlicz Spaces（$1 \le p \le \infty$）：Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Equipped with These Norm[J]．Nonlinear Analysis，2008，69（5-6）：1796-1816

[3]　吴从炘，王廷辅，陈述涛，等．Orlicz 空间几何理论[M]．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1986

[4]　Chen Shoutao．Geometry of Orlicz Space[M]．Warzawa：Dissertation Math，1992

[5]　Wei Lili，Chen Shutao．Orlicz Space with Weakly Normal Structure[J]．应用泛函分析学报，2001，3（1）：37-51