哈 尔 滨 工 业 大 学 学 报
1985年6月 JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY 增刊

Orlicz 序列空间的 H 性质

吴从炘 陈述涛 王玉文

摘 要

众所周知，H性质在 Banach 空间理论中和逼近论等应用方面都有重要意义。在本文中，我们讨论了 Orlicz 序列空间关于 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数的H性质，推广 lp(P⩾1)空间中已有的结果。

Banach 空间 $(X\|\cdot\|)$ 具有H性质系指 x_n，$x_0\in X$，$n=1,2,\cdots$，$x_n\xrightarrow{W}x_0$且 $\|x_n\|\to\|x_0\|$ $(n\to\infty)$ 蕴涵 $\|x_n-x_0\|\to 0$ $(n\to\infty)$．H性质在 Banach 空间理论中和逼近论等应用方面都有重要意义[1,2]．

本文讨论 Orlicz 序列空间关于 Luxemburg 范数和 Orliez 范数的H性质，推广l_p $(p\geqslant 1)$空间中已有的结果．

本文总用$M(u)$，$N(v)$表示一对互余N函数，$p(u)$，$q(v)$分别为它们的右导数．对于序列 $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}$，规定它的模为 $\rho_M(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}M(x_i)$．定义

$$l_M^*=\{x=(x_i)_{i=1}^{\infty}:\exists\lambda>0,\ \rho_M(\lambda x)<\infty\}$$

$$h_M=\{x\in l_M^*:\forall\lambda>0,\ \rho_M(\lambda x)<\infty\}$$

在l_M^*上分别定义 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数

$$\|x\|_M=\sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\sum_{i=1}^{\infty}x_iv_i$$

$$\|x\|_{(M)}=\inf\{k>0:\rho_M\left(\frac{x}{k}\right)\leqslant 1\}$$

仿[3]可以验证，这两个范数有如下关系

$$\|x\|_{(M)}\leqslant\|x\|_M\leqslant 2\|x\|_{(M)}$$

而且l_M^*关于上述范数是 Banach 空间，h_M则是其闭子空间[4]．为方便起见，我们记

$$l_M^*=(l_M^*,\ \|\cdot\|_M);\ l_{(M)}^*=(l_M^*,\ \|\cdot\|_{(M)})$$

本文以"$M\in\Delta_2$"表示$M(u)$关于较小的u满足Δ_2条件，即存在$u_0>0$和$k\geqslant 2$使得$u\in[0,u_0]$时成立$M(2u)\leqslant kM(u)$．

仿函数空间情形[3]可证，$M\in\Delta_2$等价于对任意$u_0>0$和$l>1$，存在$k>1$使得$u\in[0,u_0]$时$M(lu)\leqslant kM(u)$．$M\in\Delta_2$也等价于存在$u_0>0$，$l>1$和$k>1$使$u\in[0,u_0]$时成立$M(lu)\leqslant kM(u)$．

完全仿照 Orlicz 函数空间情形[3]可得

引理1 a）对任何$x=(x_i)\in l_M^*$，

$$\|x\|_M = \inf \frac{1}{k}[1+\rho_M(kx)]$$

b) 对任何 $x=(x_i)\in l_M^*$,

$$\|x\|_M = \frac{1}{k}[1+\rho_M(kx)] \Longleftrightarrow k\in[k_x^*,\ k_x^{**}]$$

其中

$$k_x^* = \inf\{k>0:\sum_{i=1}^{\infty} N[p(k|x_i|)]\geqslant 1\}$$

$$k_x^{**} = \sup\{k>0:\sum_{i=1}^{\infty} N[p(k|x_i|)]\leqslant 1\}$$

引理 2　设$M\in\Delta_2$，$x^{(n)}\in l_M^*$ ($n=1,2,\cdots$)，则

a)　$\|x^{(n)}\|_{(M)}\to 0 \quad \Longleftrightarrow \rho_M(x^{(n)})\to 0 \quad (n\to\infty)$

b)　$\|x^{(n)}\|_{(M)}\to 1 \quad \Longleftrightarrow \rho_M(x^{(n)})\to 1 \quad (n\to\infty)$

引理 3　设 $x\in l_M^*$，$e_i=(0,\cdots,0,\overset{\text{第 } i \text{ 个}}{1},0,0,\cdots)$　$(i=1,2,\cdots)$，$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i$，则

a)　$\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|_M\to\|x\|_M \ (n\to\infty)$

b)　$\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|_{(M)}\to\|x\|_{(M)} \quad (n\to\infty)$

证　a) 由 $\|\cdot\|_M$ 定义，显然 $\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|_M\leqslant\|x\|_M$ ($n=1,2,\cdots$)．又对任何$\varepsilon>0$，由 $\|\cdot\|_M$ 定义，存在$v\in l_N^*$ 使 $\|x\|_M-\varepsilon<\sum_{i=1}^{\infty}x_iv_i$，且$\rho_N(v)\leqslant 1$．从而$n$ 充分大时必有

$$\|x\|_M-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}x_iv_i\leqslant\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|_M$$

由ε任意性得 a).

b) 易见 $\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|_{(M)}\leqslant\|x\|_{(M)}$ ($n=1,2,\cdots$).又由 $\|\cdot\|_{(M)}$定义,对任何$\varepsilon\in(0,\|x\|_{(M)})$ (这里不妨假定 $x\neq\theta$)，$\rho_M\left(\frac{x}{\|x\|_{(M)}-\varepsilon}\right)>1$．从而$n$ 充分大时应有 $\sum_{i=1}^{n}M\left(\frac{x_i}{\|x\|_{(M)}-\varepsilon}\right)>1$．这表示$n$ 充分大时

$$\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|_{(M)}\geqslant\|x\|_{(M)}-\varepsilon$$

由ε任意性得 b).

引理 4 [4]　$(h_M)^*=l_{(N)}^*$

引理 5　对任何 $f\in(l_M^*)^*$, f 可唯一表示为$f=v+f_s$．其中f_s 在 h_M上取值为零，$v\in l_N^*$，$v(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iv_i$ ($x\in l_M^*$).

证　命 $(h_M)^\circ$为h_M在$(l_M)^*$中的零化子：

$$(h_M)^\circ=\{f\in(l_M)_*: f(x)=0, \forall x\in h_M\}$$

则由A·E·Taylor[6]定理4·3-F和引理1.3知

$$l^*_{(N)}=(l^*_M)^*/(h_M)^\circ$$

引理 6[6] 设$M\in\Delta_2$，则对任何 $c,\varepsilon>0$.存在 $\delta>0$使当 $\rho_M(x)\leqslant c$，$\rho_M(y)\leqslant\delta$时

$$|\rho_M(x+y)-\rho_M(x)|<\varepsilon$$

引理 7　设$M\in\Delta_2$，$x^{(n)}=(x_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}\in l^*_M$ ($n=0,1,2,\cdots$). 则 $\rho_M(x^{(n)})\to\rho_M(x^{(0)})$且$x_i^{(n)}\to x_i^{(0)}$ ($i=1,2,\cdots$)($n\to\infty$)蕴涵$\|x^{(n)}-x^{(0)}\|_M\to0$ ($n\to\infty$).

证　因$M\in\Delta_2$，由引理2，只须证明 $\rho_M(x^{(n)}-x^{(0)})\to0$ ($n\to\infty$).若$x^{(0)}=\theta$，则引理自真. 今设$x^{(0)}\neq\theta$.由已知，$\{\rho_M(x^{(n)})\}$有界，设C为其上界. 对给定$\varepsilon>0$，由引理 6，存在 $\delta>0$（不妨设 $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$），使得$\rho_M(x)\leqslant C$，$\rho_M(y)<\delta<\frac{\varepsilon}{4}$时

$$|\rho_M(x+y)-\rho_M(x)|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{1}$$

因$M\in\Delta_2$时　$l^*_M=h_M$，故$\rho_M(x^{(0)})<\infty$. 从而存在自然数I使得

$$\sum_{i=I+1}^{\infty}M(x_i^{(0)})<\delta<\frac{\varepsilon}{4} \tag{2}$$

又由已知$x^{(n)}$依坐标收敛于$x^{(0)}$，故存在N_1使得$n>N_1$时

$$\sum_{i=1}^{I}M(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})<\delta<\frac{\varepsilon}{4} \tag{3}$$

于是$n>N_1$时，由(1)，(2)，(3)，

$$\sum_{i=1}^{I}M(x_i^{(n)})=\sum_{i=1}^{I}M(x_i^{(0)}+(x_i^{(n)}-x_i^{(0)}))$$

$$>\sum_{i=1}^{I}M(x_i^{(0)})-\frac{\varepsilon}{4}>\rho_M(x^{(0)})-\frac{\varepsilon}{2}$$

联系$\rho_M(x^{(n)})\to\rho_M(x^{(0)})$ ($n\to\infty$)，知有$N_2\geqslant N_1$ 使$n>N_2$时

$$\sum_{i=I+1}^{\infty}M(x_i^{(n)})=\rho_M(x^{(n)})-\sum_{i=1}^{I}M(x_i^{(n)})<\frac{\varepsilon}{2}$$

顾及(1)、(2)、(3)，知$n>N_2$时

$$\sum_{i=1}^{\infty}M(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})\leqslant\sum_{i=1}^{I}M(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})+\sum_{i=I+1}^{\infty}M(|x_i^{(n)}|+|x_i^{(0)}|)$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\sum_{i=I+1}^{\infty}M(x_i^{(n)})+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon$$

引理 8　设$x^{(n)}\in l^*_M$ ($n=0,1,2,\cdots$).若$x^{(n)}\xrightarrow{w}x^{(0)}$ ($n\to\infty$)，则$x^{(n)}$依坐标收敛于 $x^{(0)}$($n\to\infty$).

证　显然引理中的$e_i\in l^*_{(N)}\subset(l^*_M)^*$($i=1,2,\cdots$).从而对每个$i=1,2,\cdots$，有

$$x_i^{(n)}-x_i^{(0)}=e_i(x^{(n)}-x^{(0)})\to0(n\to\infty)$$

引理 9　若$M\overline{\in}\Delta_2$，则$l^*_{(M)}$与l^*_M均无H性质.

证　由 $M\in\Delta_2$ 的定义，当$M\overline{\in}\Delta_2$时存在 $u_n>0$ 使得 $M(u_n)<\frac{1}{2n+1}$ 且

$$M\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right)>2^{n+1}M(u_n)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

取自然数m_n使$\frac{1}{2^{n+1}}<m_nM(u_n)\leqslant\frac{1}{2^n}$　$(n=1,2,\cdots)$，命

$$x^{(0)}=(\overbrace{u_1,\cdots,u_1}^{m_1},\cdots,\overbrace{u_{n-1},\cdots,u_{n-1}}^{m_{n-1}},\ \overbrace{u_n,\cdots,u_n}^{m_n},\overbrace{u_{n+1},\cdots,u_{n+1}}^{m_{n+1}},\cdots)$$

$$x_{(n)}=(\overbrace{u_1,\cdots,u_1}^{m_1},\cdots,\overbrace{u_{n-1},\cdots,u_{n-1}}^{m_{n-1}},\ \overbrace{0,\cdots,0}^{m_n},\ \overbrace{u_{n+1},\cdots,u_{n+1}}^{m_{n+1}},\cdots)$$

$n=1,2,\cdots$. 则$\rho_M(x^{(n)})<\rho_M(x^{(0)})=\sum_{i=1}^{\infty}m_iM(u_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$，故　$x^{(n)}\in l_M^*$，$n=0,1,2,\cdots$. 由引理3，$\|x^{(n)}\|_{(M)}\to\|x^{(0)}\|_{(M)}$，　$\|x^{(n)}\|_M\to\|x^{(0)}\|_M$　$(n\to\infty)$. 今验证$x^{(n)}\xrightarrow{W}x^{(0)}$　$(n\to\infty)$.

对任给 $f\in(l_M^*)^*$，由引理5，f 可分解为 $f=v+f_s$，其中$v\in l_N^*$, f_s在h_M上取零值，注意到$x^{(0)}\equiv(x_i^{(0)})_{i=1}^{\infty}\in l_M^*$，可知$x'=(x_i^{(0)}sgnv_i)_{i=1}^{\infty}\in l_M^*$，从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}v_i|=v(x')<\infty$$

联系$x^{(0)}-x^{(n)}\in h_M$因而$f_s(x^{(0)}-x^{(n)})=0$ $(n=1,2,\cdots)$，便有

$$|f(x^{(0)}-x^{(n)})|\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}|x_i^{(0)}v_i|\to0\quad(n\to\infty)$$

即$x^{(n)}\xrightarrow{W}x^{(0)}$　$(n\to\infty)$

另一方面，对任何自然数 n，

$$\rho_M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(x^{(0)}-x^{(n)})\right]=m_nM\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]>2^{n+1}m_nM(u_n)>1$$

故$\|x^{(0)}-x^{(n)}\|_M\geqslant\|x^{(0)}-x^{(n)}\|_{(M)}\geqslant\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\to1$　$(n\to\infty)$. 这说明$l_{(M)}^*$与l_M^*均不具有H性质.

定理　下述命题等价

（i）　$M\in\Delta_2$，

（ii）　$l_{(M)}^*$具有H性质，

（iii）　l_M^*具有H性质。

证　由引理9，只须证明（i）⇒（ii）和（i）⇒（iii）.

设　$x^{(n)}\xrightarrow{W}x^{(0)}$，　$\|x^{(n)}\|_{(M)}\to\|x^{(0)}\|_{(M)}$　$(n\to\infty)$. 不失一般性，可设$\|x^{(n)}\|_{(M)}=1$　$(n=0,1,2,\cdots)$. 据引理8，$x^{(n)}$依坐标收敛于$x^{(0)}$. 又由引理2，

$\rho_M(x^{(n)})=\rho_M(x^{(0)})=1\ \ (n=1,2,\cdots)$. 据引理 7，得 $\|x^{(n)}-x^{(0)}\|_{(M)}\to 0\ \ (n\to\infty)$. 此即(i)⇒(ii).

最后证(i)⇒(iii). 设 $x^{(n)}\xrightarrow{W}x^{(0)}$，$\|x^{(n)}\|_M=1\ \ (n=0,1,2,\cdots)$. 由引理 8，$x^{(n)}$ 按坐标收敛于 $x^{(0)}$. 据引理 1，可选 $\{k_n\}$ 使得

$$1=\|x^{(n)}\|_M=\frac{1}{k_n}[1+\rho_M(k_n x^{(n)})]$$

$(n=0,1,2,\cdots)$. 由此式立即可知 $k_n>1\ \ (n=0,1,2,\cdots)$.

先说明对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 m，N 使得 $n>N$ 时 $\|\sum\limits_{i=m}^{\infty}x_i^{(n)}e_i\|_M<\varepsilon$.

如若不然，有在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任何自然数 j 存在 n_j 满足 $\|\sum\limits_{i=j}^{\infty}x_i^{(n_j)}e_i\|_M\geqslant\varepsilon_0$. 于是由引理2，有 $\delta<0$ 使 $\sum\limits_{i=i}^{\infty}M(x_i^{(n_j)})\geqslant\delta\ (j=1,2,\cdots)$. 在得由引理 3，可取 j_0 使得 $\|\sum\limits_{i=j}^{j_0}x_i^{(0)}e_i\|_M>1-\frac{\delta}{2}$. 注意到引理 1 及 $k\geqslant1$ 时，$M(ku)\geqslant kM(n)$ 便得

$$\begin{aligned}1=\|x^{(n_j)}\|_M&=\frac{1}{k_{n_j}}\left[1+\sum_{i=1}^{j}M(k_{n_j}x_i^{(n_j)})\right]+\frac{1}{k_{n_j}}\sum_{i=j+1}^{\infty}M(k_{n_j}x_i^{(n_j)})\\&>\frac{1}{k_{n_j}}\left[1+\sum_{i=1}^{j_0}M(k_{n_j}x_i^{(n_j)})\right]+\delta\\&\geqslant\|\sum_{i=1}^{j_0}x_i^{(n_j)}e_i\|_M+\delta\qquad(j>j_0)\end{aligned}\tag{4}$$

注意到 $x_i^{(n_j)}\longrightarrow x_i^{(0)}\ (i=1,2,\cdots)$，可知

$$\operatorname*{Lim}_{j\to\infty}\|\sum_{i=1}^{j_0}x_i^{(n_j)}e_i\|_M=\|\sum_{i=1}^{j_0}x_i^{(0)}e_i\|_M>1-\frac{\delta}{2}.$$

于是在(4)中令 $j\to\infty$ 便得矛盾 $1\geqslant1+\frac{\delta}{2}>1$.

因此，对给定 $\varepsilon>0$ 可选 N_1，$m\geqslant1$ 使 $n>N_1$ 时

$$\|\sum_{i=m}^{\infty}x_i^{(n)}e_i\|_M<\frac{\varepsilon}{\varepsilon},\quad\|\sum_{i=m}^{\infty}x_i^{(0)}e_i\|_M<\frac{\varepsilon}{3}$$

再由 $x^{(0)}$ 的坐标收敛性，可选 N_2 使 $n>N_2$ 时

$$\|\sum_{i=1}^{m-1}(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})e_i\|_M<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是 $n>max(N_1,N_2)$ 时

$$\begin{aligned}\|x^{(n)}-x^{(0)}\|_M&\leqslant\|\sum_{i=1}^{m-1}(x_i^{(0)}-x_i^{(0)})e_i\|_M\\&+\|\sum_{i=m}^{\infty}x_i^{(n)}e_i\|_M+\|\sum_{i=m}^{\infty}x_i^{(0)}e_i\|_M<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

定理获证.

推论 序列空间$l_p(p\geqslant 1)$具有H性质.

参 考 文 献

[1] J.Diestel, Geometry of Banach Spaces—Selected Topics, Lec.Not. Math.Vol.485, Springer—Verlag, Berlin, 1975.

[2] Ky.Fan.,I.Glicksberg, Duke, Math.J.52 (1958) 553—568,

[3] 吴从炘，王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科技出版社，1983,

[4] J.Lindenstrauss,L.Tzafriri,Classical Banach Spaces I,1977,

[5] A.E.Taylor,Introduction to functional Analysis,1958,

[6] 叶以宁，数学年刊，4(A)(1983) 487—493.

H—Property in Orlicz Seqence Space

Wu Congxin,Chen Sutiao and Wang Yuwen

Abstract

It is known to all that H-property is playing a important part in theory of Banach space and others.In this paper,our purpose is to discuss H-property of Luxemburg norms and Orlicz norms in Orlicz sequence space.

Theorem.Following propositions are equivalent.

(1). $M\in\Delta_2$

(2). $L_{(M)}^{*}$ have property H.

(3). $L_{(M)}^{*}$ has property H.