总30卷 第2期 数学研究 Vol. 30 No. 2
1997年6月 Journal of Mathematical Study Jun. 1997

Orlicz-Lorentz 空间的局部一致凸①

吴从炘 任丽伟
(哈尔滨工业大学数学系，哈尔滨 150001)

摘 要 本文证明了 Orlicz-Lorentz 空间 $\Lambda_{\varphi,W}$局部一致凸的充要条件为：(i)$\varphi\in\Delta_2$，(ii)φ 是严格凸的，(iii)$W(t)>0,t\in(0,r),r<\infty$

关键词 Orlicz-Lorentz 空间，局部一致凸，严格凸

1 引言

本文用 R、R_+分别表示实数集、非负实数集. 一个函数 $\varphi:R_+\to R_+$称为 Young 函数，若满足 φ 是凸的、$\varphi(0)=0$、$\varphi(u)>0(u>0)$，且 $\varphi(u)\to\infty(u\to\infty)$. $W:(0,r)\to R_+(r<\infty)$表示一个非增可积函数，且

$$\int_0^s W(t)\mathrm{d}t\neq 0(s\in(0,r])$$

我们称其为权函数. 令 M 表示所有 $f:(0,r)\to R$ μ-可测函数的集合，μ 为 Lebesgue 测度. 对于 $f\in M$，我们定义其分布函数：

$$\mathrm{d}_f(\theta)=\mu\{s\in(0,r):|f(s)|>\theta\}\quad,\theta\geqslant 0$$

及$|f|$的非增等可测置换：

$$f^*(t)=\inf\{\theta>0:\mathrm{d}_f(\theta)\leqslant t\},t\in(0,r)$$

对于 $f\in M$ 令

$$\rho_\varphi(f)=\int_0^r\varphi(f^*(t))W(t)\mathrm{d}t=\int_0^r\varphi(|f(t)|)^*W(t)\mathrm{d}t.$$

为方便起见，此式可简写为

$$\rho_\varphi(f)=\int_0^r\varphi(f^*)W=\int_0^r\varphi(|f|)^*W.$$

我们用 $\Lambda_{\varphi,W}$表示由模 ρ_φ 生成的 Orlicz-Lorentz 空间，即

$$\Lambda_{\varphi,W}=\{f\in M:\text{存在 }\lambda>0,\text{使 }\rho_\varphi(\lambda f)<\infty\}\ ,\|f\|=\inf\{\varepsilon>0:\rho_\varphi(\frac{f}{\varepsilon})\leqslant 1\}$$

一个函数 $\sigma:(0,r)\to(0,r)$称为保测变换，若对于每一个可测集 $E\subset(0,r)$，$\sigma^{-1}(E)$是可测的，且 $\mu(\sigma^{-1}(E))=\mu(E)$.

我们称 φ 满足 Δ_2-条件，若存在 $k>0,u_0\geqslant 0$，当 $u\geqslant u_0$ 时，$\varphi(2u)\leqslant k\varphi(u)$. 我们称 φ 是严格凸的，若对任意 $u,v\in(0,r)$，$\varphi(\frac{u+v}{2})<\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}(u\neq v)$.

① 本文于 1996-12-16 收到：国家自然科学基金资助项目

Banach 空间 X 称为局部一致凸的，若对任意 $x\in S(X)$，$x_n\in S(X)$，$\|x_n+x\|\to 2$. 有 $\|x_n-x\|\to 0$.

引理 1(cf[1])　对于任意的 Orlicz-Lorentz 空间 $\Lambda_{\varphi,W}$，下列诸陈述是等价的：

(a) $\varphi\in\Delta_2$；

(b) $\rho_\varphi(x)=1\Leftrightarrow\|x\|=1$；

(c) 对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$ 使 $\|x\|\geqslant 1-\delta\Rightarrow\rho_\varphi(x)\geqslant 1-\varepsilon$；

(d) 范数收敛与模收敛是等价的，即 $\rho_\varphi(x_n)\to 0\Leftrightarrow$ 对所有 $\lambda>0$，$\rho_\varphi(\lambda x_n)\to 0$.

引理 2(cf[2])若 $\varphi\in\Delta_2$，则支集测度有限的简单函数全体在 $\Lambda_{\varphi,W}$ 中稠密.

引理 3(cf[3])　若 X 是一个具有紧支集的简单函数，那么存在一个保测变换 σ，使得

$$\int_0^r\varphi(x^*)W=\int_0^r\varphi(|x|)W\circ\sigma$$

2　主要结果

定理 1　Orlicz-Lorentz 函数空间 $\Lambda_{\varphi,W}(0,r)$ 是局部一致凸的 $\Leftrightarrow$ (i) $\varphi\in\Delta_2$，(ii) φ 是严格凸的，(iii) $W(t)>0$，$t\in(0,r)$.

证明　必要性，因为局部一致凸空间必是严格凸的. 由[1]可知必要性成立.

下面证明充分性，设 $f,f_n\in S(\Lambda_{\varphi,W})$ 且 $\|f_n+f\|\to 2$，我们将证明 $\|f_n-f\|\to 0\ (n\to\infty)$，由引理 2，可设 f_n,f 都为支集测度有限的简单函数，此证明可分为三步进行.

(一)对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $D>0$，满足对 $\forall\ f\in S(\Lambda_{\varphi,W})$ 都有

$$\mu\{t\in(0,r):|f(t)|>D\}<\varepsilon$$

否则，存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的 n，有 $f_n\in S(\Lambda_{\varphi,W})$，使得

$$\mu(D(f_n))=\{t\in(0,r):|f_n(t)|\geqslant n\}\geqslant\varepsilon_0.$$

于是

$$1=\rho_\varphi(f_n)=\int_0^r\varphi(f_n^*)W=\int_0^r\varphi(|f_n|)^*W\geqslant\int_0^r\varphi(|f_n\chi_D(f_n)|)^*W\geqslant\varphi(n)\int_0^{\varepsilon_0}W.$$

令 $n\to\infty$，有 $\varphi(n)\to\infty$，便产生矛盾.

(二)$f_n\xrightarrow{\mu}f$

对于任意正数 ε 和 σ，由(一)可知，$\exists\ r_1>0$，使得

$$\mu A_n=\mu\{t:|f_n(t)|>r_1\}<\frac{\varepsilon}{4},\tag{1}$$

$$\mu B=\mu\{t:|f(t)|>r_1\}<\frac{\varepsilon}{4}.\tag{2}$$

令

$$C_n=\mu\{t:|f(t)|\leqslant r_1,|f_n(t)|\leqslant r_1,|f_n(t)-f(t)|\geqslant\sigma\}.$$

由于 φ 是严格凸的，根据《Orlicz 空间几何理论》P. 19定理 1. 2 便知，对于 $r_1>0$，$\sigma>0$，$\exists\ 0<\lambda<1$，当 $|u-v|\geqslant\sigma$，$|u|\leqslant r_1$，$|v|\leqslant r_1$ 时

$$\varphi\left(\left|\frac{u+v}{2}\right|\right)\leqslant(1-\lambda)\frac{\varphi(|u|)+\varphi(|v|)}{2}.$$

于是，当 $t\in C_n$ 时，有

$$\varphi(|\frac{f_n(t)+f(t)}{2}|)\leqslant(1-\lambda)\frac{\varphi(|f_n(t)|)+\varphi(|f(t)|)}{2}(n=1,2,\cdots) \tag{3}$$

由于 $\varphi\in\Delta_2$ 及引理 1，$\exists\ \delta>0$，当 $\|g\|\geqslant 1-\delta$ 时，有

$$\rho_\varphi(g)=\int_0^r\varphi(g^*)W\geqslant 1-\frac{\lambda\varepsilon}{16}\varphi(\frac{\sigma}{2})W(r-\frac{\varepsilon}{4}).$$

这样，由 $\|f_n+f\|\to 2$，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\|\frac{f_n+f}{2}\|\geqslant 1-\delta$，从而有

$$\rho_\varphi(\frac{f_n+f}{2})\geqslant 1-\frac{\lambda\varepsilon}{16}\varphi(\frac{\sigma}{2})W(r-\frac{\varepsilon}{4}) \tag{4}$$

又由于 $t\in C_n$，$|f_n(t)-f(t)|\geqslant\sigma$，有

$$\max\{|f_n(t)|,|f(t)|\},\geqslant\frac{\sigma}{2}. \tag{5}$$

令 n 是大于 N 的任意自然数，由引理 3，不失一般性，可认为 f_n+f 是非负非增的，于是，由(3)，(4)，(5)，有

$$1-\frac{\lambda\varepsilon}{16}\varphi(\frac{\sigma}{2})W(r-\frac{\varepsilon}{4})\leqslant\int_0^r\varphi(\frac{f_n+f}{2})W=\int_{(0,r)\setminus C_n}\varphi(\frac{f_n+f}{2})W+\int_{C_n}\varphi(\frac{f_n+f}{2})W$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^r(\varphi(|f_n|)+\varphi(|f|))W-\frac{\lambda}{2}\int_{C_n\setminus(r-\frac{\varepsilon}{4},r)}(\varphi(|f_n|)+\varphi(|f|))W$$

$$\leqslant 1-\frac{\lambda}{2}\varphi(\frac{\sigma}{2})(\mu C_n-\frac{\varepsilon}{4})W(r-\frac{\varepsilon}{4}).$$

于是 $\mu C_n\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，又由(1)，(2)，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\mu\{t:|f_n(t)-f(t)|\geqslant\sigma\}\leqslant\mu A_n+\mu B+\mu C_n\leqslant\varepsilon$$

即得 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

(三) $\|f_n-f\|\to 0$.

首先证明 f_n 具有等度绝对连续范数，即对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $\mu e<\delta$ 时，对任何 n 都有

$$\|f_n\chi_e\|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

否则 $\exists\ \varepsilon_0>0$ 对 $\forall\ \delta>0$，$\exists\ e\subset(0,r)$，$\mu e<\delta$，$\exists\ N$ 使得

$$\|f_N\chi_e\|\geqslant\varepsilon_0\quad 即\ \rho_\varphi(\frac{f_N\chi_e}{\varepsilon_0})\geqslant 1$$

由引理 3，不失一般性，可设 f_N 是非负非增的简单函数

令 $\quad f_N=\sum_{i=l}^m a_i\chi_{[a_{i-l},a_i]}$

这里 $a_1>a_2>\cdots\cdots>a_m$，$0=a_1<a_2<\cdots\cdots<a_m$，令 $B_i=e\cap[0,a_i]$，于是，

$$1\leqslant\rho_\varphi(\frac{f_N\chi_e}{\varepsilon_0})=\int_0^r\varphi(\frac{f_N\chi_e}{\varepsilon_0})^*W=\sum_{i=1}^m\varphi(\frac{a_i}{\varepsilon_0})\int_{\mu B_{i-1}}^{\mu B_i}W$$

$$=\sum_{i=1}^m\varphi(\frac{a_i}{\varepsilon_0})(\int_0^{\mu B_i}W-\int_0^{\mu B_{i-1}}W)=\sum_{i=1}^m\varphi(\frac{a_i}{\varepsilon_0})\int_0^{\mu B_i}W-\sum_{i=1}^{m-1}\varphi(\frac{a_{i+1}}{\varepsilon_0})\int_0^{\mu B_i}W$$

$$\leqslant(\varphi(\frac{a_m}{\varepsilon_0})+\sum_{i=1}^{m-1}(\varphi(\frac{a_i}{\varepsilon_0})-\varphi(\frac{a_{i+1}}{\varepsilon_0}))\int_0^\delta W.$$

令 $\delta\to 0$，便产生了矛盾.

另外,由于 $\varphi\in\Delta_2$, $\|f\chi_e\|\to 0\ (\mu e\to 0)$,于是,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\mu e\leqslant\delta$ 时,对任意的 n,有下式成立

$$\|f_n\chi_e\|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad \|f\chi_e\|<\frac{\varepsilon}{3}\tag{7}$$

又由 $f_n\xrightarrow{\mu}f$,可知存在子列 $\{f_{n_k}\}$,使得 $f_{n_k}\to f$ a. e. 应用叶果洛夫定理,存在 $e\subset(0,r)$, $\mu e<\delta$,使得

$$f_{n_k}\to f \text{ 对 } t\in(0,r)\backslash e \text{ 一致成立}$$

即对任意的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n_k\geqslant N$ 时,

$$|f_{n_k}(t)-f(t)|<\varphi^{-1}(\varepsilon/\int_0^r W)\quad t\in(0,r)\backslash e$$

从而

$$\rho_\varphi((f_{n_k}-f)\chi_{(0,r)\backslash e}=\int_0^r\varphi((fn_k-f)\chi_{(0,r)\backslash e})^*W=\varepsilon/\int_0^r W\int_0^{\mu((0,r)\backslash e)}W\leqslant\varepsilon$$

即　$\rho_\varphi((f_{n_k}-f)\chi_{(0,r)\backslash e})\to 0\ (n_k\to\infty)$. 由 $\varphi\in\Delta_2$ 及引理 1 有

$$\|(f_{n_k}-f)\chi_{(0,r)\backslash e}\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

即对于上述的 $\varepsilon>0$, $\exists\ N$,当 $n\geqslant N$ 时,有

$$\|(f_{n_k}-f)\chi_{(0,r)\backslash e}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\tag{8}$$

由(6),(7),(8)有

$$\|(f_{n_k}-f)\|\leqslant$$

$$\|f_{n_k}-f)\chi_{(0,r)\backslash e}\|+\|f_n\chi_e\|+\|f\chi_e\|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

这样,$f_{n_k}\xrightarrow{\|\cdot\|}f$. 从而 $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f$,否则,若 $f_n-f\overset{\|\cdot\|}{\not\to}0$,则$\exists\ \delta>0$ 及 $\{f_n\}$,的子列 $\{f_{n_i}\}$ 使得 $\|f_{n_i}-f\|\geqslant\delta$,又 $f_{n_i}\xrightarrow{\mu}f$,从而存在子列(不妨仍记为 $\{f_{n_i}\}$)使 $f_{n_i}\xrightarrow{a.e.}f$,重复上面的方法可知 $f_{n_k}-f\xrightarrow{\|\cdot\|}0$,这与 $\|f_{n_i}-f\|\geqslant\delta$ 矛盾,证毕.

Banach 空间称为弱局部一致凸的,若对任意 $f,f_n\in S(X)$ 及 $\|f_n+f\|\to 2$,有 $f_n-f\xrightarrow{W}0$. 又已知,局部一致凸⇒弱局部一致凸⇒严格凸. 再根据[1]我们可得到下面的推论.

推论　对于 Orlicz-Lorentz 函数空间 $\Lambda_{\varphi,w}$,下列诸陈述是等价的:

(1) $\Lambda_{\varphi,w}$是局部一致凸的,(2) $\Lambda_{\varphi,w}$是弱局部一致的,

(3) $\Lambda_{\varphi,w}$是严格凸的,(4) $\varphi\in\Delta_2$,φ 是严格凸的,$W(t)>0$,$t\in(0,r)$,这里 $r<\infty$.

参 考 文 献

1 Kaminska A. Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces. Math Nachr, 1990, 147: 29~38

2 Kaminska A. Uniform convexity of generalized Lorentz spaces. Arch Math., 1991, 56: 181~188

3 Lin Pei—Kee and Sun Huiying. Some geometrics properties of Lorentz-Orlicz spaces. Arch Math., 1995, 64: 500~511

4 吴从炘，王廷辅，陈述涛，王玉文. Orlicz 空间几何理论. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1986

Locally Uniform Rotundity of Orlicz-Lorentz Spaces

Wu Congxin *Ren Liwei*

(Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract In this paper, it has been proved that the Orlicz—lorentz spaces $\Lambda_{\varphi,w}(r<\infty)$ is locally uniformly rotund if and only if (i) $\varphi\in\Delta_2$; (ii) φ is strictly convex; (iii) $W(t)>0, t\in(0,r)$.

Key words Orlicz-Lorentz spaces, Locally uniform rotundity, strict rotundity