Н. ЯДГОРОВ

ПОНЯТИЯ МОДУЛЯРНОСТИ И КОНЕЧНОСТИ P-ПРОЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ

Упорядоченные банаховые пространства с порядковой единицей и базовой нормой были исследованы в [1, 2]. Здесь изучаются связи между понятиями конечности и модулярности P-проекторов в пространстве с порядковой единицей. Будем придерживаться терминологии и обозначений работ [1, 2].

Пусть K — выпуклое множество в некотором локально выпуклом хаусдорфовом пространстве V, $A=A^b(K)$ — упорядоченное банахово пространство ограниченных аффинных функций на K. В качестве порядковой единицы рассмотрим функцию, тождественно равную единице на K, которую обозначим через $e\cdot(V, K)$ — пространство с базовой нормой. Предположим, что A и V находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности.

Определение. Положительное проекционное отображение $R: A\to A$ с единичной нормой называется P-проектором, если существует единственное положительное проекционное отображение $R': A\to A$ с единичной нормой, такое, что

$$\mathrm{im}^+R=\ker^+R' \qquad \mathrm{im}^+R^*=\ker^+R'^*$$

$$\ker^+R=\mathrm{im}^+R' \qquad \ker^+R^*=\mathrm{im}^+R'^*$$

(R^* — сопряженное к R отображение, т. е. R^* действует в V и $\langle Rx, \rho\rangle=\langle x, R^*\rho\rangle$).

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех P-проекторов в A. Для $R, Q\in\mathcal{P}$ положим $R\leqslant Q$, если $\mathrm{im}\,R\subseteq\mathrm{im}\,Q$. Тогда $\mathcal{P}$ частично упорядочено относительно этого порядка. Очевидно, для любого $R\in\mathcal{P}$: $\Theta\trianglelefteq R\trianglelefteq I$, где Θ — нулевое, I — тождественное отображение. Отображение $R\to R'$ называется ортодополнением в $\mathcal{P}$ и P-проектор R' называется квазидополнением R. P-проекторы R и Q называются ортогональными, если $R\trianglelefteq Q'$ или $Q\trianglelefteq R'$. Элементы A вида $u=Re$, $R\in\mathcal{P}$ называются проективными единицами; их совокупность обозначим через $\mathcal{U}$, В $\mathcal{U}$ отображение $Re\to e-Re$ является ортодополнением. И пусть $\mathcal{F}=\{F_R: F_R=\mathrm{im}\,R^*\cap K,\ R\in\mathcal{P}\}$ — множество всех проективных граней K. Отображение $F_R\to F_{R'}$ является ортодополнением. Если A и V находятся в спектральной двойственности и $A=V^*$, то множества $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ являются попарно изоморфными, полными ортомодулярными решетками, т. е. полными логиками [2, предложение 4. 2, следствие 12.5]. Решетка $(\mathcal{P}, \trianglelefteq)$ называется модулярной, если $(R\vee Q)\vee H=R\vee(Q\wedge H)$ для всех $R, Q, H\in\mathcal{P}$, таких, что $R\trianglelefteq H$. P-проектор $R\in\mathcal{P}$ называется модулярным, если множество $[\Theta, R]=\{Q\in\mathcal{P}: Q\trianglelefteq R\}$ является модулярной решеткой.

Определение [4]. Симметрией пространства A с порядковой единицей e называется изометрический порядковый изоморфизм $S: A\to A$, сохраняющий e и коммутирующий с любым порядково ограниченным оператором T в A.

Множество порядково-ограниченных операторов в A обозначим через $O(A)$.

Замечание. Если A и V находятся в спектральной двойственности, тогда для каждой симметрии S существует $R\in\mathcal{P}$, такое, что $S=2R+2R'-I$[3, лемма 3. 13].

Определение [4]. Центральным следом на A называется положительный оператор Γ из A в Z, где $Z=\{Te: T\in O(A)\}$, сохраняющий e, коммутирующий с каждым оператором $T\in O(A)$ и удовлетворяющий условию $\Gamma S=\Gamma$ для всех симметрий S.

Точность, нормальность для центрального следа определяются как обычно [5].

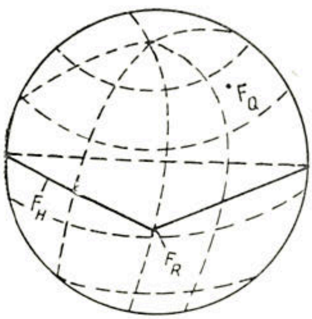
Пусть (A, e) — пространство с порядковой единицей, (V, K) — пространство с базовой нормой. Будем предполагать, что A и V находятся в спектральной двойственности и $A = V^*$ [2].

Лемма Пусть S — симметрия в A, тогда $SRS \in \mathcal{P}$ для любого $R \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Так как $SS = I$, то $SRSSRS = SRS$, и значит, отображение SRS является положительным и с единичной нормой. Нетрудно видеть, что $SR'S$ положительно и с единичной нормой, является квазидополнением для SRS. Докажем: $\mathrm{im}^+ SRS = \ker^+ SR'S$. Пусть $x \in \mathrm{im}^+ SRS$, т. е. $SRS(x) = x$ или $RS(x) = S(x)$, Значит, $S(x) \in \mathrm{im}^+ R$. В силу того, что $\mathrm{im}^+ R = \ker^+ R'$ и $\ker S = 0$· имеем $R'S(x) = 0$ и $SR'S(x) = 0$. Таким образом, $\mathrm{im}^+ SRS \subseteq \ker^+ SR'S$. Обратное включение доказывается аналогично. Нетрудно вычислить, что $\ker^+ SRS = \mathrm{im}^+ SR'S$. Отображения $S^*R^*S^*$, $S^*R'^*S^*$ являются двойственными отображениями для SRS и $SR'S$ соответственно. Как и выше, справедливы равенства $\mathrm{im}^+ S^*R^*S^* = \ker^+ S^*R'^*S^*$, $\ker^+ S^*R^*S^* = \mathrm{im}^+ S^*R'^*S^*$. Отсюда заключаем, что SRS является P-проектором. Лемма доказана.

Пусть R и Q — P-проекторы в A.

Определение. P-проекторы R и Q называются связанными через симметрию, если существует такая симметрия S, что $SRS = Q$.



Очевидно, это отношение рефлексивно, симметрично, но вообще говоря не транзитивно. P-проекторы R и Q называются эквивалентными, если существует конечное число симметрий $S_1, \ldots, S_n$, таких, что

$$S_n \cdots S_1 R S_1 \cdots S_n = Q.$$

Определение. P-проектор $R: A \to A$ называется конечным, если всякое ортогональное семейство P-проекторов $\{Q_i\}$, $Q_i \trianglelefteq R$, в котором любые два P-проектора связаны через симметрию, конечно.

Пространство A с порядковой единицей e называется конечным, если I является конечным P-проектором.

Теорема 1. Пусть в A существует точный, нормальный центральный след. Тогда A конечно.

Доказательство. Пусть в A существует точный нормальный центральный след Г. Допустим, что множество $\{Q_i\}$ — счетное множество ортогональных, ненулевых попарно связанных P-проекторов. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i e \leqslant e$. Отсюда $e \geqslant \Gamma\left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_i e\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Gamma(Q_i e) = \lim_{n \to \infty} n\Gamma(Q_i e)$, т. е. $n\,\Gamma(Q_1 e) \leqslant e$ для любого n. В силу архимедовости порядка в A, $\Gamma(Q_1 e) \leqslant 0$, т. е. $\Gamma(Q_i e) = 0$. В силу точности Γ, $Q_1 e = 0$. Так как $\Gamma(Q_i e) = \Gamma(Q_1 e) = 0$, то приходим к противоречию. Значит, I конечно. Теорема доказана.

Следствие. Когда K конечномерно, то пространство $A = A^b(K)$ является конечным.

Теорема 2. Каждый модулярный P-проектор конечен. Обратное неверно.

Доказательство. Пусть R — модулярный P-проектор. По теореме Капланского [6] $[\theta, R]$ является решеткой фон Неймана, тогда существует размерностная функция f, такая, что $f(\Theta) = 0$ и $f(R) = 1$ и для любого $Q \in [\Theta, R]$, $0 \leqslant f(Q) \leqslant 1$.

Предположим, что множество $\{Q_i\}$ ортогональных P-проекторов

$Q_i \trianglelefteq R$, попарно связанных через симметрию, бесконечно. (Не ограничивая общности, считаем, что оно счетно). По свойству размерностной функции $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_i\right) \leqslant 1$, т. е. $\lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \lim_{n\to\infty} n f(Q_i) \to \infty$, где $Q_i \neq \Theta$. Этого не может быть. Следовательно, множество $\{Q_i\}$ конечно. Значит, R является конечным P-проектором.

Построим пример конечного P-проектора, не являющегося модулярным. В качестве K рассмотрим фигуру на рисунке, состоящую из шара в R^3, у которой экваториальная фигура — треугольник. Тогда $(A^b(K), e)$ и (V, K) находятся в спектральной двойственности [2, § 10]. В силу следствия пространство $A^b(K)$ с порядковой единицей является конечным. В этом случае (см. рис.) можно выбрать такие проективные грани F_R, F_Q, F_H в $\mathcal{F}$, что

$$F_R \subseteq F_H \text{ и } F_R \vee (F_Q \wedge F_H) \neq (F_R \vee F_Q) \wedge F_H .$$

Отсюда вытекает, что $\mathcal{F}$ немодулярно. Следовательно, $A^b(K)$ немодулярно. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alfsen E. M. Compact convex sets and boundary integrals. Berlin: Springer—Verlag. 1971. Vol. 57. IX+210 p. 2. Alfsen E. M.//Memoirs Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 172. XI+120 p. 3 Alfsen E. M., Shultz F. W.//Acta Math. 1978. Vol. 140. P. 155—190 4. Cho-ho chu and D. Maitland Wright//Proc. London. Math. Soc. 1978. Vol. 36. P. 494—517. 5. Topping D. M.//Memoirs Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 53. P. 1—18. 6. Kaplansky I.//Ann. Math. 1955. Vol. 61. P. 524—541.

Институт математики
имени В. И. Романовского
АН УзССР

Дата поступления
20. 03. 1987 г.