УДК 517.98

Б. С. ЗАКИРОВ, В. И. ЧИЛИН

ОПИСАНИЕ GB^*-АЛГЕБР, ОГРАНИЧЕННАЯ ЧАСТЬ КОТОРЫХ ЕСТЬ W^*-АЛГЕБРА

Мақолада чегараланган қисми W^*-алгебра бўлган ҳар қандай GB^*-алгебра, бирор EW^*-алгебрага $*$-изоморф эканлиги исботланган.

В работах Диксона [1—3] были выделены и изучены важные классы $*$-алгебр неограниченных операторов, названных EC^*-алгебрами и EW^*-алгебрами (расширенные C^*- и W^*-алгебры). Там же исследовался вопрос о связи этих классов $*$-алгебр с классом GB^*-алгебр, введенных в [4]. В частности, было показано, что:

а) $*$-алгебра $\mathscr{A}$ над полем комплексных чисел является локально выпуклой GB^*-алгеброй в том и только том случае, когда $\mathscr{A}$ $*$-изоморфна некоторой EC^*-алгебре операторов с общей плотной областью определения;

б) существует не локально выпуклая GB^*-алгебра, не $*$-изоморфная никакой EC^*-алгебре операторов;

в) любая EW^*-алгебра операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве, является GB^*-алгеброй.

Естественно возникают следующие вопросы:

1) сохраняется ли свойство в) для EW^*-алгебр операторов, действующих в несепарабельном гильбертовом пространстве?

2) Выделить класс GB^*-алгебр, $*$-изоморфных EW^*-алгебрам или более конкретно (см. [2]) — каждая ли GB^*-алгебра, ограниченная часть которой есть W^*-алгебра, $*$-изоморфна EW^*-алгебре?

Положительный ответ на первый вопрос получен в [5, 6]. Настоящая работа посвящена решению второго вопроса. Используются терминология и обозначения из [1—4, 7].

Пусть $\mathcal{A}$ — непустое множество плотно определенных замкнутых операторов в гильбертовом пространстве H, которое является $*$-алгеброй относительно сильного сложения и умножения, перехода к сопряженному оператору и сильного умножения на скаляр. $\mathcal{A}$ называется EW*-алгеброй, если оператор $(I+T^*T)^{-1}$ принадлежит $\mathcal{A}$ для всех $T\in\mathcal{A}$ (где I — единичный оператор в H) и $*$-подалгебра $\mathcal{A}_b$ ограниченных операторов из $\mathcal{A}$ является W^*-алгеброй. В [5, 6] показано, что любая EW^*-алгебра является заполненной $*$-подалгеброй в $*$-алгебре $S(\mathcal{A}_b)$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к W^*-алгебре $\mathcal{A}_b$ ($*$-подалгебра F в $S(\mathcal{A}_b)$ называется заполненной, если $I\in F$ и из $0\leqslant T\leqslant S\in F$, $T\in S(\mathcal{A}_b)$ следует $T\in F$ [7]).

Напомним определение GB^*-алгебры [1, 4]. Пусть $(\mathcal{A}, \tau)$ — топологическая $*$-алгебра с единицей 1. Через $\mathcal{B}$ обозначим совокупность всех непустых τ-ограниченных замкнутых подмножеств B из $(\mathcal{A}, \tau)$, для которых $B^2\subset B$, $B=B^*$, $1\in B$. Пусть B — абсолютно выпуклое множество из $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}(B)$ — $*$-подалгебра в $\mathcal{A}$, порожденная множеством B. Функционал Минковского p_B, соответствующий B, является нормой на $\mathcal{A}(B)$.

Топологическая $*$-алгебра $(\mathcal{A}, \tau)$ называется GB^*-алгеброй, если выполнены следующие условия:

1) система $\mathcal{B}$ имеет небольшой элемент B_0 и множество B_0 — абсолютно выпукло;

2) для каждого $x\in\mathcal{A}$ существует обратный элемент $(1+x^*x)^{-1}$, принадлежащий $\mathcal{A}(B_0)$;

3) нормированное пространство $(\mathcal{A}(B_0), p_{B_0})$ — полное.

Для каждой GB^*-алгебры $\mathcal{A}$ ее $*$-подалгебра $\mathcal{A}(B_0)$ является C^*-алгеброй относительно нормы p_{B_0} и называется ограниченной частью $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ — EW^*-алгебра, τ — топология сходимости локально по мере в $S(\mathcal{A}_b)$, то, как показано в [5, 6], $(\mathcal{A}, \tau)$ есть GB^*-алгебра, причем $B_0=\{T\in\mathcal{A}_b : \|T\|\leqslant 1\}$, где $\|\cdot\|$ — C^*-норма в $\mathcal{A}_b$, т. е. $\mathcal{A}(B_0)=\mathcal{A}_b$. В дальнейшем ограниченную часть $\mathcal{A}(B_0)$ в GB^*-алгебре $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\mathcal{A}_b$. Следующая теорема дает решение вопроса Диксона, поставленного в [2].

Теорема 1. Если ограниченная часть $\mathcal{A}_b$ в GB^*-алгебре $\mathcal{A}$ является W^*-алгеброй, то $\mathcal{A}$ — $*$-изоморфна некоторой EW^*-алгебре.

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов. Нам понадобится понятие BO^*-алгебры [7]. Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра над полем комплексных чисел. Говорят, что $\mathcal{A}$ — бэровская $*$-алгебра, если для каждого непустого подмножества S из $\mathcal{A}$ существует такой проектор (самосопряженный идемпотент) $p\in\mathcal{A}$, что

$$R(S)=\{x\in\mathcal{A} : sx=0 \text{ для всех } s\in S\}=p\mathcal{A}.$$

В каждой бэровской $*$-алгебре существует кольцевая единица, которую обозначим через 1. Положим $K=\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i : a_i\in\mathcal{A},\ i=1,\dots,\ n,\right.$ $n\in N$, где N — множество всех натуральных чисел. Говорят, что $*$-алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяет аксиоме положительного квадратного корня, если для любого $x \in K$ существует такое $y \in K \cap \{x\}''$, что $x = y^2$, где $\{x\}''$ — бикоммутант элемента x в $\mathcal{A}$. В этом случае K образует собственный конус в эрмитовой части $\mathcal{A}_h = \{x \in \mathcal{A} : x = x^*\}$ бэровской $*$-алгебры $\mathcal{A}$ и порождает в $\mathcal{A}_h$ частичный порядок. Говорят, что $\mathcal{A}$ с этим частичным порядком удовлетворяет аксиоме Рисса — Фишера, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{A}_h$, такой, что $0 \leqslant x_n \leqslant \varepsilon_n 1$, где $\{\varepsilon_n\}$ — некоторая суммируемая последовательность неотрицательных чисел, существует $\sup\limits_{n \geqslant 1} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ в $\mathcal{A}_h$.

Бэровская $*$-алгебра, удовлетворяющая аксиомам положительного квадратного корня и Рисса — Фишера называется BO^*-алгеброй. Свойства BO^*-алгебр подробно изложены в [7]. Элемент $x = a + ib$ из BO^*-алгебры $\mathcal{A}$, $a, b \in \mathcal{A}_h$, называется порядково ограниченным, если существует положительное число λ, для которого $-\lambda 1 \leqslant a, b \leqslant \lambda 1$. Множество M всех порядково ограниченных элементов из $\mathcal{A}$ образует $*$-подалгебру в $\mathcal{A}$, и на M существует норма, относительно которой $M - AW^*$-алгебра [7]. Следующее предложение описывает BO^*-алгебры, у которых $M - W^*$-алгебра.

Предложение 1 [7]. Пусть $\mathcal{A} - BO^*$-алгебра, у которой AW^*-алгебра M порядково ограниченных элементов является W^*-алгеброй. Тогда $\mathcal{A}$ $*$-изоморфна заполненной $*$-подалгебре в $S(M)$.

Из этого предложения непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. В условиях предложения 1 $\mathcal{A}$ $*$-изоморфно некоторой EW^*-алгебре.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что GB^*-алгебра $\mathcal{A}$, у которой ограниченная часть $\mathcal{A}_b$ есть W^*-алгебра, является BO^*-алгеброй и $\mathcal{A}_b$ совпадает с множеством всех порядково ограниченных элементов из $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная GB^*-алгебра. Положим $\mathcal{A}^+ = \{a^*a : a \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{A}_b^+ = \{a^*a : a \in \mathcal{A}_b\}$. В [1] показано, что $\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}^+$. Поэтому $\mathcal{A}^+ = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^* a_i : a_i \in \mathcal{A},\ i = 1, \ldots, n,\ n \in N\right.$. Отметим также, что элемент x принадлежит $\mathcal{A}^+$ в том и только том случае, когда его спектр $\sigma(x)$ лежит в $[0, +\infty]$ [1], при этом если $x \in \mathcal{A}_b \cap \mathcal{A}^+$, то $\sigma(x) \subset [0, \alpha]$ для некоторого положительного числа α, т. е. $x \in \mathcal{A}_b^+$. Это означает, что $\mathcal{A}_b^+ = \mathcal{A}_b \cap \mathcal{A}^+$.

Лемма 1. Если $x \in \mathcal{A}$, $x = x^*$, $1 \pm x \in \mathcal{A}^+$, то $x \in \mathcal{A}_b$ и $\|x\| \leqslant 1$, где $\|\cdot\| - C^*$-норма в $\mathcal{A}_b$.

Доказательство. Поскольку $\sigma(x) = \sigma(x+1) - 1 \subset [-1, \infty]$ и $\sigma(x) = \sigma(x-1) + 1 \subset [-\infty, 1]$, то $\sigma(x) \subset [-1, 1]$, и поэтому $x \in \mathcal{A}_b$ [1] и $\|x\| \leqslant 1$.

Лемма 2. $\mathcal{A}^+ \cap (-\mathcal{A}^+) = \{0\}$, т. е. $\mathcal{A}^+$ — собственный конус в $\mathcal{A}_h$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}^+$, то достаточно показать, что равенство $x^*x = 0$, $x \in \mathcal{A}$ влечет $x = 0$. Пусть $x^*x = 0$. Так как $(1 \pm nx)^*(1 \pm nx) \in \mathcal{A}^+$, то $1 \pm n(x^* + x) \in \mathcal{A}^+$. В силу леммы 1 $n(x^* + x) \in \mathcal{A}_b$ и $\|n(x^* + x)\| \leqslant 1$ для всех $n \in N$. Отсюда $x^* + x = 0$. Аналогично, используя включения $(1 \pm inx)^*(1 \pm inx) \in \mathcal{A}^+$, получим, что $i(x^* - x) = 0$. Следовательно, $x = 0$.

Собственный конус $\mathcal{A}^+$ порождает в $\mathcal{A}_h$ отношение частичного порядка: $x \leqslant y \Longleftrightarrow x - y \in \mathcal{A}^+$. Обозначим через M множество всех порядково ограниченных (относительно введенного частичного порядка) элементов из $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}_b^+ = \mathcal{A}_b \cap \mathcal{A}^+$, то $\mathcal{A}_b \subset M$. Из леммы 1 вытекает обратное включение; таким образом имеет место равенство $M = \mathcal{A}_b$.

Лемма 3. $\mathcal{A}$ удовлетворяет аксиоме Рисса — Фишера.

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset \mathcal{A}_h$, $0 \leqslant x_n \leqslant \varepsilon_n 1$, $\varepsilon_n > 0$, $n \in N$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Тогда $x_n \in \mathcal{A}_b$ для любого $n \in N$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$, и так как $\mathcal{A}_b$ — C^*-алгебра, то существует такой $x \in \mathcal{A}_b^+$, что $y_n \uparrow x$ в $\mathcal{A}_b^h = \{x \in \mathcal{A}_b : x = x^*\}$. Пусть $y \in \mathcal{A}_h$ и $y \geqslant y_n$, $n \in N$. Для $Z = 1 + y$ существует обратный элемент $z^{-1} \in \mathcal{A}_b$. Ясно, что $z^{-1}(1 + y_n) z^{-1} \uparrow z^{-1}(1 + x) z^{-1}$ в $\mathcal{A}_b^h$, и поэтому $z^{-1} = z^{-1}(1 + y) z^{-1} \geqslant z^{-1}(1 + x) z^{-1}$. Отсюда $1 + x \leqslant z$, т. е. $x \leqslant y$. Это означает, что $y_n \uparrow x$ в $\mathcal{A}_h$.

Лемма 4. $\mathcal{A}$ удовлетворяет аксиоме положительного квадратного корня.

Доказательство. В [1] показано, что для любого $x \in \mathcal{A}^+$ и любой максимальной коммутативной $*$-подалгебры $\mathcal{B}$, содержащей x, существует такой элемент $y \in \mathcal{A}^+ \cap \mathcal{B}$, что $y^2 = x$, при этом элемент y не зависит от выбора $\mathcal{B}$, поэтому $y \in \{x\}''$.

Лемма 5. $R(\{x\}) = R(\{x^*x\})$ для любого $x \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Очевидно, что $R(\{x\}) \subset R(\{x^*x\})$. Пусть $a \in R(\{x^*x\})$, т. е. $x^*xa = 0$. Тогда $(xa)^*xa = a^*x^*xa = 0$, и поэтому $xa = 0$ (см. доказательство леммы 2), т. е. $a \in R(\{x\})$.

Предложение 2. Всякая коммутативная GB^*-алгебра $\mathcal{A}$, ограниченная часть $\mathcal{A}_b$ которой есть AW^*-алгебра, является BO^*-алгеброй.

Доказательство. В силу лемм 3 и 4 достаточно показать, что $\mathcal{A}$ — бэровская $*$-алгебра. Поскольку $\mathcal{A}_b$ — коммутативная AW^*-алгебра, то $\mathcal{A}_b^h$ — условно полная векторная решетка относительно частичного порядка, порожденного конусом $\mathcal{A}_b^+$, при этом $\mathbf{1}$ — фрейденталевская единица в $\mathcal{A}_b^h$. Пусть $\{x_\alpha\}$ — возрастающая сеть из $\mathcal{A}^+$ и $x_\alpha \leqslant y \in \mathcal{A}^+$ при всех α. Положим $z = 1 + y$. Так как $\left\{z^{-1} x_\alpha\right\}$ — возрастающая и ограниченная сеть в $\mathcal{A}_b^+$, то существует такой $x \in \mathcal{A}_b^+$, что $z^{-1} x_\alpha \uparrow x$. Отсюда $x_\alpha \uparrow zx$. Следовательно $\mathcal{A}_h$ — условно полная векторная решетка. Аналогично устанавливается, что $\mathbf{1}$ — фрейденталевская единица в $\mathcal{A}_h$. Из [8, гл. V, § 8] и из леммы 5 вытекает, что для каждого $x \in \mathcal{A}$ существует такой проектор $p \in \mathcal{A}$, что $R(\{x\}) = p\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}$ является риккартовой $*$-алгеброй [7]. Поскольку $\mathcal{A}_b$ — AW^*-алгебра, то решетка всех проекторов в $\mathcal{A}$ полна, и поэтому $\mathcal{A}$ — бэровская $*$-алгебра [7].

Теорема 2. Любая GB^*-алгебра, ограниченная часть $\mathcal{A}_b$ которой есть AW^*-алгебра, является BO^*-алгеброй, множество M порядково ограниченных элементов которой совпадает с $\mathcal{A}_b$.

Доказательство. Равенство $M=\mathcal{A}_b$ было установлено перед леммой 3. В силу лемм 3—5, также как и при доказательстве предложения 2, достаточно показать, что для любого $x\in\mathcal{A}^+$ существует такой проектор $p\in\mathcal{A}$, что $R(\{x\})=p\mathcal{A}$.

Пусть $x\in\mathcal{A}^+$ и $\mathcal{B}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $\mathcal{A}$, содержащая x. Тогда $\mathcal{B}$ — коммутативная GB^*-алгебра, относительно индуцированной из $\mathcal{A}$ топологии, $\mathcal{B}_b=\mathcal{A}_b\cap\mathcal{B}$, причем $\mathcal{B}_b$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $\mathcal{A}_b$ [1], в частности $\mathcal{B}_b$ — AW^*-подалгебра в $\mathcal{A}_b$. В силу предложения 2 существует такой проектор $p\in\mathcal{B}$, что

$$R_{\mathcal{B}}(\{x\})=\{a\in\mathcal{B}:xa=0\}=p\mathcal{B}.$$

Пусть $\mathcal{B}_1$ — другая максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $\mathcal{A}$, содержащая x, и p_1 — такой проектор из $\mathcal{B}_1$, что $R_{\mathcal{B}_1}(\{x\})=p_1\mathcal{B}_1$. Пользуясь спектральной теоремой для BO^*-алгебр [7] выберем проекторы $f_n\in\mathcal{B}$, $n\in N$ так, чтобы $f_n\uparrow(1-p)$ в $\mathcal{B}_h$ и $f_n=y_nx$ для некоторых $y_n\in\mathcal{B}_b$ (f_n есть спектральный проектор в $\mathcal{B}$ для x, соответствующий множеству $[n^{-1},\infty)$, $n\in N$). Положим $q=(1-p)p_1(1-p)$. Так как $xq=0$, то $f_nq=y_nxq=0$ для всех $n\in N$. Поскольку $\mathcal{A}_b$ — AW^*-алгебра, то $q=(1-p)q=0$. Это означает, что $p_1(1-p)=0$, т. е. $p_1=p_1p$. Аналогично устанавливается, что $p=p_1p$. Таким образом $p=p_1$.

Пусть $a\in R(\{x\})$, $a=a^*$. Тогда $xa=ax=0$, и существует максимальная коммутативная $*$-подалгебра $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{A}$, содержащая x и a. Поэтому из доказанного выше вытекает, что $a=pa\in p\mathcal{A}$. Если a — произвольный элемент из $R(\{x\})$, то $xaa^*=0$, и потому $aa^*=paa^*$, откуда $(1-p)aa^*(1-p)=0$ и $a^*(1-p)=0$ (см. доказательство леммы 2). Таким образом, $(1-p)a=0$, т. е. $a=pa\in p\mathcal{A}$. Следовательно, $R(\{x\})=p\mathcal{A}$.

Поскольку любая W^*-алгебра является AW^*-алгеброй, то из теоремы 2 и предложения 1 вытекает следующее описание GB^*-алгебр, у которых ограниченная часть есть W^*-алгебра.

Теорема 3. Любая GB^*-алгебра $\mathcal{A}$, ограниченная часть $\mathcal{A}_b$ которой является W^*-алгеброй, $*$-изоморфна заполненной $*$-алгебре в $S(\mathcal{A}_b)$.

Так как каждая заполненная $*$-подалгебра в $*$-алгебре $S(M)$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к W^*-алгебре M, является EW^*-алгеброй, то утверждение теоремы 1 следует из теоремы 3.

Из теоремы 1 и результатов [5, 6] вытекает следующее абстрактное описание EW^*-алгебр.

Теорема 4. $*$-Алгебра $\mathcal{A}$ над полем комплексных чисел $*$-изоморфна EW^*-алгебре операторов в том и только том случае, когда на $\mathcal{A}$ существует такая топология τ, что $(\mathcal{A},\tau)$ есть GB^*-алгебра, у которой $\mathcal{A}_b$ — W^*-алгебра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dixon P. G.//Proc. London Math. Soc. 1970. V. 21. N 3. P. 693.
2. Dixon P. G.//J. London Math. Soc. 1972. V. 5. N 2. P. 159.
3. Dixon P. G.//Proc. London Math. Soc. 1971. V. 23. N 3. P. 53.
4. Allan G. R.//Proc. London Math. Soc 1967. V. 17. N 3. P. 91.

5. Закиров Б. С., Чилин В. И.//Докл. АН УзССР. 1989. № 11.
6. Закиров Б. С. Абстрактное описание EW^*-алгебр/Деп. ВИНИТИ. 1989. № 1813—В89. 12 с.
7. Чилин В. И.//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1985. Т. 27. С. 99.
8. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз. 1961. 407 с.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступила 17. 05. 89

Ташкентский государственный университет имени В. И. Ленина

A DESCRIPTION OF GB^*-ALGEBRAS WITH W^*-ALGEBRAS AS THE BOUNDED PART

V. I. Chilin, B. C. Zakirov

(Summary)

Let $\mathcal{A}$ be a GB^*-algebra and B be the bounded part of $\mathcal{A}$. It is proved that it B is a W^*-algebra then $\mathcal{A}$ is $*$-isomorphic to a EW^*-algebra.