Information geometric foundations of quantum theory

Ryszard Paweł Kostecki

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

24 kwietnia 2013

1. Wstęp

Standardowy formalizm mechaniki kwantowej [von Neumann'32]:

- kinematyka:
  - stany kwantowe = operatory gęstości na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$:
  $$\rho \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \quad \rho \geq 0, \quad \mathrm{tr}(\rho) = 1,$$
  - wielkości kinematyczne określone są przez operatory samosprzężone na $\mathcal{H}$
- dynamika:
  - ewolucja układów zamkniętych: operatory unitarne: $\rho(t) = U(t)\rho U(t)^*$
  - pomiar: operatory rzutowe: $\rho \mapsto \sum_i P_i \rho P_i$, $\rho \mapsto \frac{P\rho P}{\mathrm{tr}(\rho P)}$.

Motywacje:

- Czy jest możliwe geometryczne sformułowanie teorii kwantowej, umożliwiające nieliniowe rozszerzenie kwantowej kinematyki i dynamiki? $\Rightarrow$ kwantowa geometria informacji
- Czy jest możliwe wyeliminowanie przestrzeni Hilberta z podstaw teorii kwantowej? $\Rightarrow$ podejście algebraiczne
- Cel badań: skonstruowanie i zbadanie podejścia, które łączy zalety tych dwóch podejść.

2. Kwantowa geometria informacji

Kinematyka:

- przestrzenie: zbiory normalizowalnych operatorów gęstości:

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^+ := \{x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \mid \mathrm{tr}(|\sqrt{x^*x}|) < \infty, \quad x \geq 0\}$$

- struktury geometryczne:
  - niesymetryczna odległość: $D : \mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^+ \times \mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^+ \to [0, \infty]$ t.że $D(\rho, \sigma) = 0 \iff \sigma = \rho$. Istnieje wiele możliwych wyborów D, np. $D_1(\rho, \sigma) := \mathrm{tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma)$, $D_{1/2}(\rho, \sigma) := 2\|\sqrt{\rho} - \sqrt{\sigma}\|^2_{\mathfrak{G}_2(\mathcal{H})}$. (Drugie i trzecie pochodne D umożliwiają wprowadzenie riemannowskich metryk i afinicznych koneksji na $\mathcal{M}(\mathcal{H})$.)
  - nawias Poissona: $\{\cdot, \cdot\} : \mathrm{C}^\infty_\mathrm{F}(\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}; \mathbb{R}) \times \mathrm{C}^\infty_\mathrm{F}(\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}; \mathbb{R}) \to \mathrm{C}^\infty_\mathrm{F}(\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}; \mathbb{R})$. Jest on całkowicie zdeterminowany przez komutator, $\{f, k\}(z) := ([\mathfrak{D}^\mathrm{F}_z f, \mathfrak{D}^\mathrm{F}_z k])(z)$, gdzie $\mathfrak{D}^\mathrm{F}_z f \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}} \subseteq \mathrm{C}^\infty_\mathrm{F}(\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}; \mathbb{R})$.
- 'obserwable'/'estymatory': funkcje rzeczywiste na $\mathcal{M}(\mathcal{H})$.

Dynamika:

- można sformułować dynamikę hamiltonowską na $\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$ w oparciu o dowolną funkcję $h \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{F}(\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}; \mathbb{R})$ [Bóna'99]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\rho(t)) = \{h, f\}(\rho(t)) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(t) = [\mathfrak{D}^\mathrm{F}_{\rho(t)} h(\rho(t)), \rho(t)].$$

  W szczególności, dla $h(\rho) = \mathrm{tr}(\rho H)$, $H \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$, otrzymujemy równanie von Neumanna (ewolucję unitarną): $\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(t) = [H, \rho(t)]$.
- czy można dokonać geometrycznego opisu kwantowego pomiaru?

3. Sformułowanie algebraiczne

- Punktem wyjścia są W^*-algebry [von Neumann'27,Sakai'56] := przestrzenie Banacha $\mathcal{N}$, będące $\mathbb{C}$-algebrami wyposażonymi w operację $^* : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ spełniającą $(xy)^* = y^* x^*$, $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(x^*)^* = x$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$, i posiadające unikalny predual (= zbiór $\mathcal{N}_\star$ wszystkich $\mathbb{C}$-liniowych ciągłych funkcjonałów na $\mathcal{N}$, t.że elementy $x \in \mathcal{N}$ są liniowymi funkcjonałami na $\mathcal{N}_\star$ ciągłymi w normie $\|x\| := \sup\{|x(\phi)| \mid \|\phi\| \leq 1, \phi \in \mathcal{N}_\star\}$).
- umożliwia to uogólnienia: $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightsquigarrow \mathcal{N}$, $\mathfrak{G}_1(\mathcal{H}) \rightsquigarrow \mathcal{N}_\star$ (np. $\mathrm{tr}(\rho\,\cdot\,) = \phi(\cdot)$), $\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^+ \rightsquigarrow \mathcal{N}_\star^+$ ('stany kwantowe').
- $\forall \phi \in \mathcal{N}_\star^+$ konstrukcja Gelfanda–Najmarka–Segala ['43-'47] produkuje przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_\phi$ oraz reprezentację $\pi_\phi : \mathcal{N} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\phi)$. Reprezentacje π_ϕ dla różnych ϕ mogą być unitarnie nierównoważne.
- Falcone–Takesaki'2001: konstrukcja kanonicznych przestrzeni $L_p(\mathcal{N})$, $p \in [1, \infty]$, dla dowolnych W^*-algebr $\mathcal{N}$. Jest to dalekie uogólnienie konstrukcji von Neumanna–Schattena['37-'50]

$$\mathfrak{G}_p(\mathcal{H}) := \{x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \mid (\mathrm{tr}((x^* x)^{p/2}))^{1/p} < \infty\}$$

  i Segala–Dixmier['53], $L_p(\mathcal{N}, \tau) := \{x \in \mathcal{N} \mid (\tau(x^* x)^{p/2})^{1/p} < \infty\}$ dla takich $\mathcal{N}$ że $\exists \tau : \mathcal{N}^+ \to [0, \infty]$ t.że $\tau(0) = 0$, $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$, $\lambda \geq 0 \Rightarrow \tau(\lambda x) = \lambda \tau(x)$, $\tau(u^* x u) = \tau(x)$ $\forall$ unitarnego $u \in \mathcal{N}$ $\forall x \in \mathcal{N}^+$.

4. Kwantowa geometria bez przestrzeni Hilberta

- Czy można połączyć sformułowanie geometryczne teorii kwantowej (umożliwiające nieliniowość) ze sformułowaniem algebraicznym (niezależnym od przestrzeni Hilberta)?
- Podstawowe przestrzenie: podzbiory $\mathcal{M}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_\star^+$.
- Odzijewicz–Ratiu'2003: Uogólnienie struktury rozmaitości Poissona na preduale dowolnych W^*-algebr.
- Niesymetryczne odległości $D : \mathcal{N}_\star^+ \times \mathcal{N}_\star^+ \to [0, \infty]$ stanowią b.dużą rodzinę $\Rightarrow$ konieczne są dodatkowe warunki. Najbardziej pożądane to:
  1) Monotoniczność ze względu na odwzorowania markowowskie $T_\star$:

     $$D(T_\star(\phi), T_\star(\psi)) \geq D(\phi, \psi) \;\; \forall \phi, \psi \in \mathcal{N}_\star^+ \;\; \forall T_\star,$$

     gdzie $T_\star : (\mathcal{N}_2)_\star^+ \to (\mathcal{N}_1)_\star^+$ są zadane jako predualizacje odwz.całk.dod., tzn. liniowych map $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ t.że

     $$T \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} : \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ni x \otimes y \mapsto T(x) \otimes y \in \mathcal{N}_2 \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

     są dodatnie $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ "Odległość między stanami nie maleje przy stracie informacji".
  2) Uogólnione twierdzenie Pitagorasa. Jeśli $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_\star^+$ jest t.że

     $$\forall \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{N}) \;\; \exists! \mathfrak{P}^D_{\mathcal{Q}}(\psi) := \arg \inf_{\rho \in \mathcal{Q}} \{D(\rho, \psi)\},$$

     wtedy D spełnia u.t.P. dla $\mathcal{Q}$ $\iff$

     $$D(\phi, \psi) = D(\phi, \mathfrak{P}^D_{\mathcal{Q}}(\psi)) + D(\mathfrak{P}^D_{\mathcal{Q}}(\psi), \psi) \;\; \forall (\phi, \psi) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{M}(\mathcal{N}).$$

     $\Rightarrow$ "Odległość między stanami jest rozkładalna na sumę odległości do rzutu na podprzestrzeń i odległości w podprzestrzeni".

5. Rodzina niesymetrycznych odległości D_γ

- W pracy [Kostecki'2011], dzięki zastosowaniu niekomutatywnej teorii całkowania Falcone'a–Takesakiego, skonstruowana została rodzina D_γ niesymetrycznych odległości na $\mathcal{N}_\star^+$,

$$D_\gamma(\omega,\phi) := \begin{cases} \int \frac{1}{\gamma(1-\gamma)}\left(\gamma\omega + (1-\gamma)\phi - \omega^\gamma\phi^{1-\gamma}\right) & : \gamma \in]0,1[,\ \omega \ll \phi \\ \int \lim_{\tilde{\gamma}\to\pm\gamma} \frac{1}{\tilde{\gamma}(1-\tilde{\gamma})}\left(\tilde{\gamma}\omega + (1-\tilde{\gamma})\phi - \omega^{\tilde{\gamma}}\phi^{1-\tilde{\gamma}}\right) & : \gamma \in \{0,1\},\ \omega \ll \phi \\ +\infty & : \text{w pozost. przyp.,} \end{cases}$$

  oraz udowodniono, że rodzina ta spełniających oba powyższe warunki (markowowską monotoniczność i uogóln. tw.Pitagorasa). Nie są znane inne D na $\mathcal{N}_\star^+$ spełniające oba warunki.
- W szczególności, dla $\mathcal{N} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$: $D_1(\rho,\sigma) := \mathrm{tr}(\rho\log\rho - \rho\log\sigma)$, $D_{1/2}(\rho,\sigma) := 2\left\|\sqrt{\rho} - \sqrt{\sigma}\right\|^2_{\mathfrak{G}_2(\mathcal{H})}$.
- Znaczenie: Amari['2009] udowodnił, że w przypadku komutatywnej i skończenie wymiarowej algebry $\mathcal{N}$ rodzina D_γ może być scharakteryzowana przez dwa powyższe warunki (przy pewnych technicznych założeniach). Bliskie związki między komutatywną i kwantową geometrią informacji prowadzą do (otwartej) hipotezy, że analogiczna charakteryzacja zachodzi dla powyższej postaci D_γ dla ogólnych W^*-algebr $\mathcal{N}$.

6. "Kwantowy pomiar" jako maksymalizacja względnej entropii

- Kluczowy rezultat: Reguła von Neumanna–Lüdersa może być wyprowadzona (zarówno dla $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, jak i dla ogólnych W^*-algebr $\mathcal{N}$) jako szczególny przypadek minimalizacji niesymetrycznej odległości z więzami:

$$\rho \mapsto \sum_i P_i \rho P_i := \arg\inf_{\sigma \in \mathcal{Q}} \{D_1(\rho, \sigma)\},$$

gdzie: $D_1(\rho, \sigma) = \mathrm{tr}(\rho \log \rho - \sigma \log \rho)$,

$$\mathcal{Q} := \{\rho \in \mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^+ \mid [P_i, \rho] = 0,\ P_i P_j = \boldsymbol{\delta}_{ij} P_i,\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{i=1}^n P_i = \mathbb{I}\}.$$

- Znaczenie: zasada maksymalizacji względnej entropii (entropowy rzut na podprzestrzeń więzów) może być traktowana jako nieliniowe uogólnienie dynamiki opisującej "kwantowy pomiar".
- Wynik ten stanowi nietrywialny kwantowy analog wyprowadzenia reguły Bayesa jako szczególnego przypadku entropowego rzutu z więzami, otrzymanego w pracach Warmuth&Kivinen'99, Caticha&Giffin'06.
- W ogólnym przypadku, więzy mogą być zadane przez dowolny podzbiór $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{N})$, który może zależeć od dodatkowych parametrów kontrolnych, np. czasu: $\mathcal{Q}(s)$. Umożliwia to m.in. opis dynamiki kwantowej zadanej przez zależne od czasu eksperymentalne więzy na wartości oczekiwane niektórych obserwabli. $\Rightarrow$ nieliniowa alternatywa dla odwzorowań markowowskich.

7. Geometryczne uogólnienia ewolucji unitarnej

- W podejściu geometrycznym ewolucja unitarna jest uogólniona do ewolucji hamiltonowskiej z dowolną funkcją Hamiltona $h \in \mathrm{C}^{\infty}_{\mathrm{F}}(\mathcal{N}^{\mathrm{sa}}_{\star};\mathbb{R})$ [Bóna'99,Odzijewicz&Ratiu'2003].
- W podejściu W^*-algebraicznym ewolucja unitarna jest uogólniona do izometrii przestrzeni $\mathcal{N}_\star$ zadanych przez predualizację $(\alpha_t)_\star$ grupy słabo-$\star$ ciągłych automorfizmów $\{\alpha_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
- Warunek zgodności tych dwóch sformułowań przyjmuje postać:

  $$\phi((\mathrm{id}_{\mathcal{N}} - \alpha_t)([\mathfrak{D}^{\mathrm{F}}_{(\alpha_t)_\star(\phi)} f, \mathfrak{D}^{\mathrm{F}}_{(\alpha_t)_\star(\phi)} h])) = 0 \ \ \forall \phi \in \mathcal{N}^{\mathrm{sa}}_\star \ \ \forall f, h \in \mathrm{C}^{\infty}_{\mathrm{F}}(\mathcal{N}^{\mathrm{sa}}_\star;\mathbb{R}).$$

  Ten warunek jest dość restrykcyjny. Aby wybrać między tymi podejściami, trzeba porównać ich zastosowania. $\Rightarrow$ Czy można geometrycznie opisać perturbacje 'ewolucji unitarnej'?
- Konstrukcja GNS wytwarza wiązkę przestrzeni Hilberta nad rozmaitością $\mathcal{N}^+_\star$ [Odzijewicz&Sliżewska'2011].
- $\forall \psi \in \mathcal{N}^+_\star$ t.że $\psi(x^* x) = 0 \Rightarrow x = 0$ można bijektywnie przedstawić każdy stan $\phi \in \mathcal{N}^+_\star$ pod postacią wektora $\xi_\psi(\phi) \in \mathcal{H}^+_\psi$ spełniającego warunek:

  $$\phi(x) = \langle \xi_\psi(\phi), \pi_\psi(\phi)\xi_\psi(\phi)\rangle_{\mathcal{H}_\psi} \, ,$$

  gdzie $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ to reprezentacja GNS.

8. Geometryczno-algebraiczny opis perturbacji

- Z tw.Haagerupa['75] wynika, że $\forall$ słabo-$\star$ ciągłej grupy $\{\alpha_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ istnieje jedyny samosprzężony operator K^α_ψ na $\mathcal{H}_\psi$ (zwany liouvilleanem), t.że $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tK^\alpha_\psi}\mathcal{H}^+_\psi = \mathcal{H}^+_\psi$.
- Mając daną rodzinę $\{h_\psi : \mathcal{H}_\psi \to \mathcal{H}_\psi \mid \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}^+_\star\}$ samosprzężonych operatorów spełniających pewne warunki (określone przy pomocy [Dereziński–Jakšić–Pillet'2003]) skonstruowana zostaje rodzina liouvilleanów $\mathcal{L}_\psi$ będących perturbacjami K^α_ψ przez h_ψ.
- W szczególności, w roli rodziny h_ψ mogą wystąpić jednoformy $\mathbf{d}_\phi f \equiv \mathfrak{D}^{\mathrm{F}}_\phi f$ dowolnej funkcji gładkiej $f \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{F}}(\mathcal{N}^{\mathrm{sa}}_\star; \mathbb{R})$. Mogą to być również operatory nieograniczone.
- Cofając ewolucję $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathcal{L}_\psi}$ z $\mathcal{H}^+_\psi$ na $\mathcal{N}^+_\star$ przy pomocy ξ^{-1}_ψ otrzymujemy opis perturbacji algebraicznej dynamiki zadany odwzorowaniem

$$\phi(t) = \xi^{-1}_{(\alpha_t)_\star(\phi)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathcal{L}_{(\alpha_t)_\star(\phi)}}\xi_{(\alpha_t)_\star(\phi)}(\phi)).$$

- Perturbacja automorfizmu algebry przez operatory samosprzężone daje się opisać przy pomocy wiązki GNS oraz jako odzworowanie na $\mathcal{M}(\mathcal{N})$, ale niekoniecznie jest to ewolucja hamiltonowska. Prowadzi to do sugestii, aby zastąpić opis "obserwowalnej dynamiki" oparty na perturbacjach hamiltonianów przez opis oparty na maksymalizacji względnej entropii z więzami.

9. Podsumowanie

- W oparciu o teorię W^*-algebr, niekomutatywne całkowanie, oraz kwantową geometrię informacji, mechanika kwantowa może być uogólniona do nieliniowej teorii kwantowej, której podstawy nie zależą od przestrzeni Hilberta.
- Podstawowym obiektem są przestrzenie $\mathcal{M}(\mathcal{N}) \subseteq L_1(\mathcal{N})^+ \equiv \mathcal{N}_\star^+$, będące uogólnieniem modeli probabilistycznych $\mathcal{M}(\mu) \subseteq \{p \in {}_1(\mu)^+ \mid \int \mu p = 1\}$ oraz zbiorów macierzy gęstości $\mathcal{M}(\mathcal{H}) \subseteq \{\rho \in \mathfrak{G}_1(\mathcal{H})^+ \mid \mathrm{tr}(\rho) = 1\}$.
- Dwie podstawowe struktury geometryczne:
  niesymetryczna odległość $D(\cdot, \cdot)$ i nawiasy Poissona $\{\cdot, \cdot\}$.
- Dwie podstawowe struktury dynamiczne:
  - Rzuty entropowe $\phi \mapsto \arg\inf_{\omega \in \mathcal{Q}(s)} \{D(\omega, \phi)\}$:
    - nieliniowe i nielokalne
    - umożliwiają kodowanie eksperymentalnych więzów
    - redukują się w szczególnym przypadku do reguły von Neumanna–Lüdersa
  - Hamiltonowska ewolucja $\phi \mapsto w_t^h(\phi)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(w_t^h(\phi)) = \{h, f(w_t^h(\phi))\}\ \forall f$:
    - nieliniowa i lokalna
    - umożliwia kodowanie teoretycznych symetrii
    - redukuje się w szczególnym przypadku do równania von Neumanna