II.2 Położenie i prędkość cd. Wektory styczny i normalny do toru.
II.3 Przyspieszenie

- Wersory cylindrycznego i sferycznego układu współrzędnych krzywoliniowych
- Wyrażenia na prędkość w układach cylindrycznym i sferycznym
- Krzywe w przestrzeni. Wersory Freneta.
- Krzywizna i promień krzywizny
- Tor i hodograf
- Wektor przyspieszenia
- Przyspieszenie styczne i normalne
- Przyspieszenie radialne i transwersalne

Wersory cylindrycznego i sferycznego układu współrzędnych krzywoliniowych.

Dla wersorów układu cylindrycznego wyrażonych w kartezjańskim UW obowiązują wzory:

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wersory cylindrycznego i sferycznego układu współrzędnych krzywoliniowych cd.

Dla wersorów układu sferycznego wyrażonych w kartezjańskim UW obowiązują wzory:

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Wersory cylindrycznego i sferycznego układu współrzędnych krzywoliniowych cd.

Pochodna wersora (ogólnie- wektora o stałej długości) jest do niego prostopadła (albo jest wektorem zerowym) bo:

$$a^2(u) = \vec{a}\cdot\vec{a} = \text{const}$$

$$\frac{da^2}{du} = 2\frac{d\vec{a}}{du}\cdot\vec{a} = 0$$

W układzie cylindrycznym pochodna $\hat{e}_r$ jest więc równoległa do wersora $\hat{e}_\phi$:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix} = \frac{d}{d\phi}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}\frac{d\phi}{dt}$$

$$= \dot{\phi}\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

Wyrażenie na prędkość w układzie cylindrycznym

Posługując się powyższymi wzorami możemy otrzymać wyrażenie na składowe prędkości w cylindrycznym układzie współrzędnych:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z =$$

$$= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z =$$

$$= v_r\hat{e}_r + v_\phi\hat{e}_\phi + v_z\hat{e}_z$$

W podobny sposób można otrzymać składowe prędkości w Układzie sferycznym (patrz zadania na ćwiczeniach).

Dygresja: całkowanie wektorów

Całką z wektora zależnego od parametru u nazywamy wektor, którego składowe są całkami składowych wektora pierwotnego:

$$\vec{a}(u) = a_x(u)\hat{e}_x + a_y(u)\hat{e}_y + a_z(u)\hat{e}_z$$

$$\int \vec{a}(u)\,du = \left(\int a_x(u)\,du\right)\hat{e}_x +$$

$$+\left(\int a_y(u)\,du\right)\hat{e}_y +$$

$$+\left(\int a_z(u)\,du\right)\hat{e}_z$$

Tory jako krzywe w przestrzeni. Wersory Freneta

Parametryzacja naturalna toru: długość łuku jako parametr.

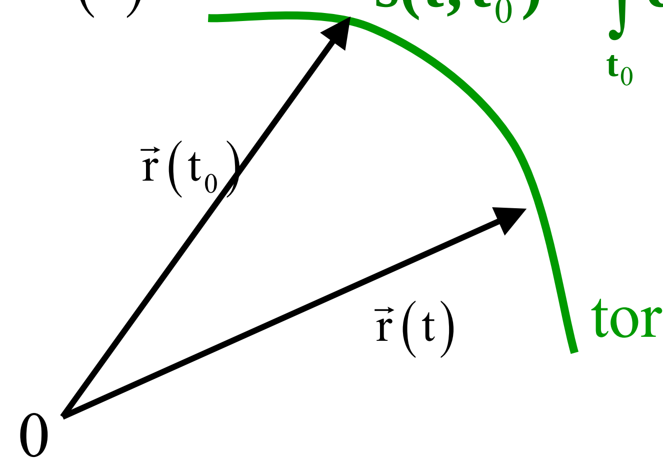
Zamieńmy parametryzację wzgl. czasu t na parametryzację wzgl. długosci łuku s:

$$s(t) = \int ds(t) = \int \sqrt{dx(t)^2 + dy(t)^2 + dz(t)^2}$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int v dt$$

$$\mathbf{s(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} ds}$$



Wersor styczny

Wersor styczny do toru możemy zdefiniować jako

$$\hat{e}_t = \frac{d\vec{r}/dt}{\left|d\vec{r}/dt\right|} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt}\right|} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Bo:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1 \quad \text{lub} \quad dr = ds$$

Wersor normalny. Płaszczyzna ściśle styczna

Ponieważ $\dfrac{d\hat{e}_t}{dt} \perp \hat{e}_t$

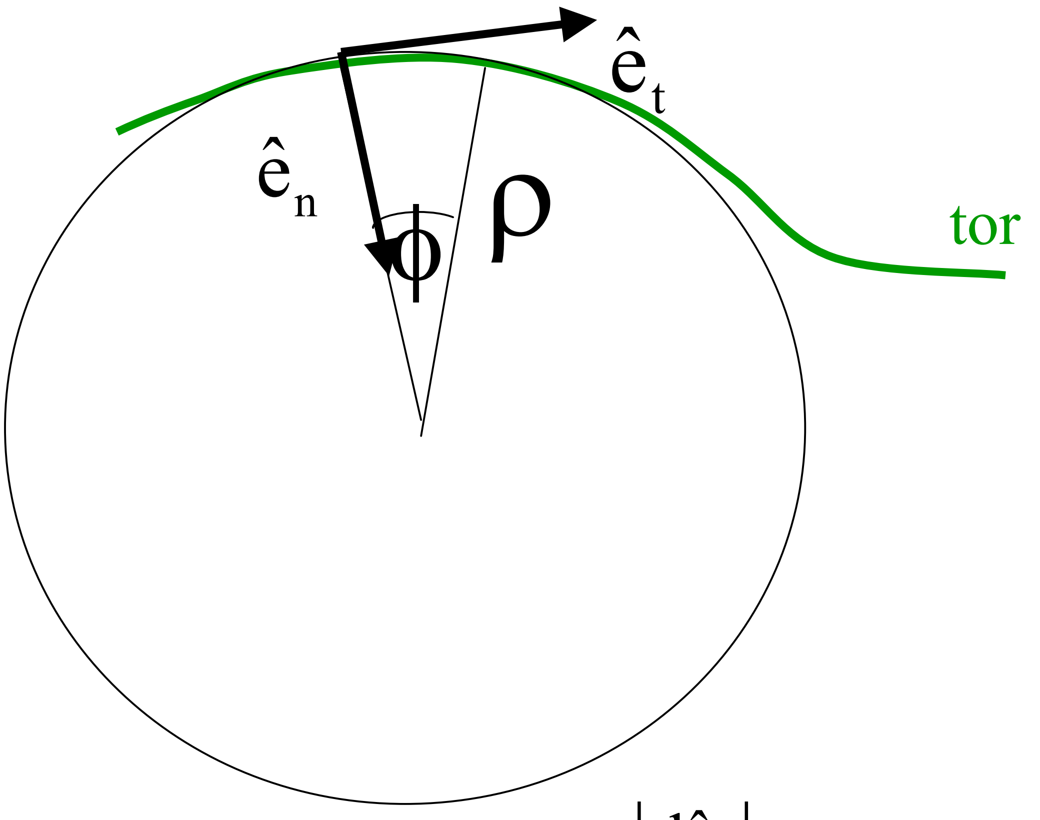
Możemy zdefiniować wersor normalny do toru jako:

$$\hat{e}_n = \frac{d\hat{e}_t / ds}{\left| d\hat{e}_t / ds \right|} = \frac{d\hat{e}_t / dt}{\left| d\hat{e}_t / dt \right|}$$

Płaszczyzna utworzona przez wersory styczny i normalny: <u>płaszczyzna ściśle styczna</u>

Promień krzywizny

Infinitezymalny łuk toru możemy przybliżyć przez łuk okręgu o promieniu ρ.



$$ds = \rho d\phi$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{e}_n v \frac{d\phi}{ds} = \frac{v}{\rho}\hat{e}_n$$

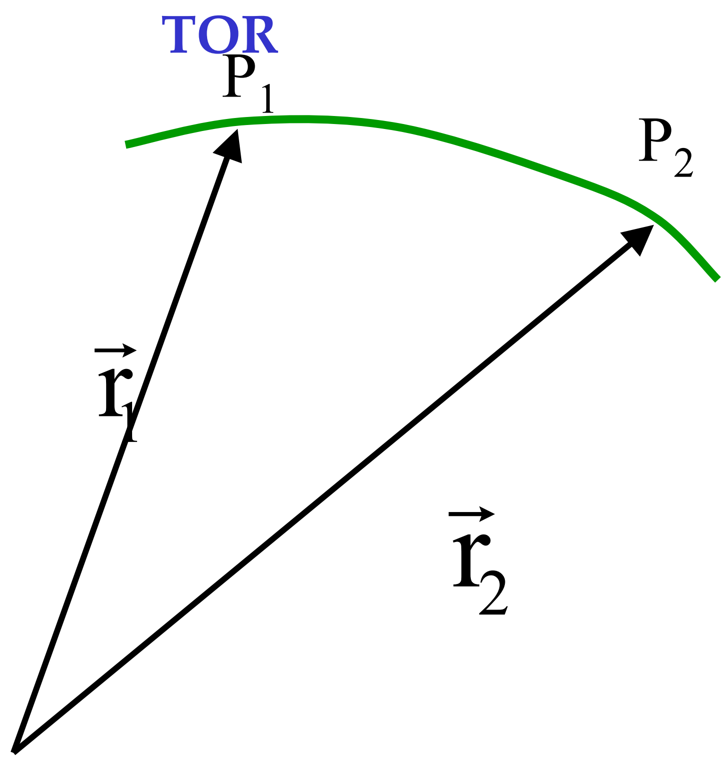
$$\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right| = \frac{v}{\rho}$$

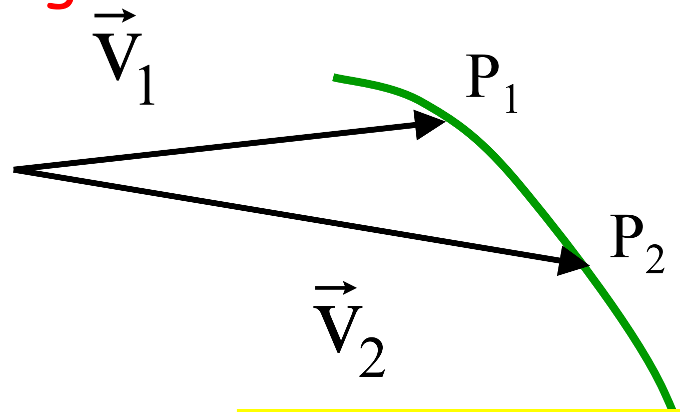
Baza wersorów Freneta

Z każdym punktem na torze można związać lokalny ruchomy, prostokątny i prawoskrętny układ współrzędnych zwany bazą Freneta, oparty o zdefiniowane uprzednio wersory: styczny i normalny oraz o wersor binormalny, zdefiniowany za pomocą iloczynu wektorowego dwóch poprzednich wersorów:

$$\hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n$$

Tor i hodograf.





HODOGRAF= Krzywa w przestrzeni prędkości zakreślana przez koniec wektora prędkości.

Prędkość jest styczna do toru

Wektor przyspieszenia jest styczny do hodografu

Przyspieszenie

Wektor przyspieszenia leży w <u>płaszczyźnie ściśle stycznej</u>:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\hat{e}_t\right) = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{\frac{d\hat{e}_t}{dt}}{\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right|}\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right| = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n$$

Przyspieszenie styczne

Przyspieszenie normalne

Składowe przyspieszenia we współrzędnych cylindrycznych: radialne i transwersalne

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z\right)\right] =$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi + r\frac{d^2\phi}{dt^2}\hat{e}_\phi + r\frac{d\phi}{dt}\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{e}_z =$$

$$= \left[\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right]\hat{e}_r + \left[r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right]\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$$

Uwaga: nie mylić przyspieszenia transwersalnego i stycznego, oraz radialnego i normalnego

Dygresja: obliczanie promienia krzywizny toru

<u>Krzywizna κ</u>: odwrotność promienia krzywizny ρ.

Zachodzą wzory:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} =$$

$$\kappa \geq 0$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right|^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{v^2 a^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{v^6}}$$

Długość wektora przyspieszenia

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} =$$

$$= \sqrt{a_t{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$