II.4 Przykłady opisów ruchu

- **Ruch gdy prędkość i/lub przyspieszenie jest znaną funkcją czasu:**
  - Ruch prostoliniowy
  - Ruch ze stałym przyspieszeniem
- **Ruch po okręgu. Wektor prędkości kątowej**
- **Ruch drgający**

Prędkość i/ lub przyspieszenie jest znaną funkcją czasu

Prędkość jest znaną funkcją czasu:

$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'$$

Warunek początkowy: $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$

Przyspieszenie jest znaną funkcją czasu:

$$\vec{a} = \vec{a}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t'')dt'' = \int_{t_0}^{t} dt'' \int_{t_0}^{t''} \vec{a}(t')dt' + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0$$

Warunki początkowe:

$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$

$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$

Ruch prostoliniowy

Wybieramy UW tak, żeby ruch odbywał się wzdłuż osi OX:

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

$$v(t') - v_0 = \int_{t_0}^{t'} a(t'')\,dt''$$

Ruch ze stałym przyspieszeniem

Ruch jest płaski odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory przyspieszenia i prędkości początkowej

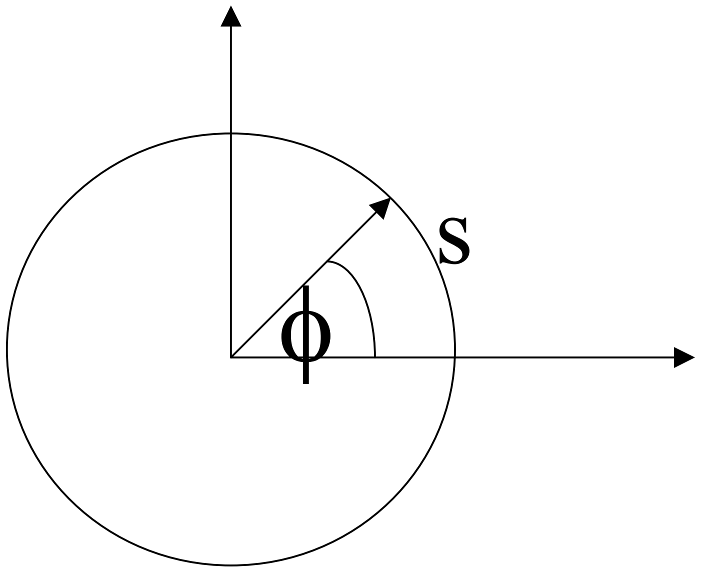
$$\vec{v}(t') = \int_{t_0}^{t'} \vec{a}\,dt'' = \vec{a}(t' - t_0) + \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_0(t' = t_0) = \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t') = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}(t - t_0)^2}{2}$$

Tor ruchu jest parabolą.

Ruch po okręgu

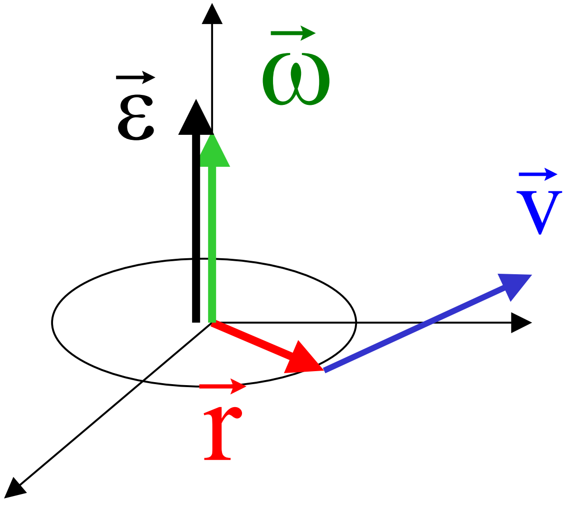


$s = r\phi \qquad v = ds/dt = r\, {}^{d\phi}\!/_{dt} = r\dot{\phi} = r\omega$

$[\omega] = s^{-1}$

$a_t = {}^{dv}\!/_{dt} = r\dot{\omega} = r\varepsilon; \qquad a_n = {}^{v^2}\!/_{r}$

ε – przyspieszenie kątowe $[\varepsilon]=s^{-2}$



Wektor prędkości kątowej orientujemy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Przyspieszenie w ruchu po okręgu

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Podwójny iloczyn wektorowy $\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = -\omega^2\vec{r}$

Przyspieszenie normalne jest skierowane do środka okręgu

Ruch drgający harmoniczny

Przykładowo, rzut punktu poruszającego się jednostajnie po okręgu porusza się harmonicznym ruchem drgającym (okresowym) z amplitudą x_0, częstością ω i fazą początkową ϕ_0:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

Jest to szczególny przykład ruchu okresowego.
Ruch okresowy może być opisany dowolną okresową funkcją czasu np.:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(2\omega t) + C\cos(3\omega t)$$

Równanie oscylatora harmonicznego

Ruch drgający harmoniczny jest rozwiązaniem szczególnie ważnego w fizyce równania różniczkowego- równania oscylatora harmonicznego:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x = 0$$