

IX. Podsumowanie. Egzamin

Zasady zaliczania i organizacja egzaminu

A) Do egzaminu dopuszczeni są studenci, którzy zaliczyli ćwiczenia tj.:

- i) uczęszczali regularnie na ćwiczenia,
- ii) byli do nich przygotowani,
- iii) zdobyli co najmniej 18 punktów z kolokwiów.

Dla tych studentów przewidujemy egzamin pisemny i ustny oraz ewentualne egzaminy poprawkowe- pisemne i ustne.

B) Jeżeli studenci spełniają Ai) ale nie Aii) i/ lub Aiii), egzamin pisemny będzie dla nich kolokwium zaliczeniowym. Do zaliczenia ćwiczeń wymagamy 50% punktów z kolokwium zaliczeniowego.

Jeżeli studenci nie spełniają Ai)- mają niezaliczone ćwiczenia i otrzymują ocenę ndst.

cd.

C. Dalej rozróżniamy trzy przypadki:

C1) Niezaliczenie ćwiczeń- ocena ndst,

C2) Spełnione Ai), Aii), niespełnione Aiii) z powodu uzasadnionej nieobecności na kolokwium +50% punktów z kolokwium zaliczeniowego- zaliczone ćwiczenia, egzamin poprawkowy jest 1-szym egzaminem, ew. egz. poprawkowy w terminie do uzgodnienia.

C3) Niespełnione Aii) i/ lub Aiii) bez „okoliczności łagodzących”+ 50% punktów z kolokwium zaliczeniowego- zaliczone ćwiczenia, egzamin poprawkowy jest jedynym egzaminem.

Terminy egzaminów

Egzamin pisemny odbędzie się:

31 stycznia 2006 w SDD, SSD i Auli w godz. 9-13
Egzaminy ustne od 2.02 do 8.02 w godz. 8:30-19:00 w SST
zgodnie z wywieszoną listą.

Egzamin poprawkowy:

20 lutego 2006 w SDD w godz. 9-13
Ustne zostaną ustalone później.

Powtórzenie materiału

- I. Przedmiot i metodologia fizyki
- II. Opis ruchu- kinematyka
- III. Ruch względny
- IV. Prawa ruchu
- V. Zasady zachowania
- VI. Oddziaływania dwóch ciał. Oddziaływanie grawitacyjne i Układ Słoneczny. Przekrój czynny
- VII. Bryła sztywna
- VIII. Oddziaływania bardzo wielu ciał
- IX. Podsumowanie

II. Opis ruchu- kinematyka

II.1 Pojęcia podstawowe.

II.2 Położenie i prędkość. Wektor styczny i normalny do toru

II.3 Przyspieszenie

II.4 Przykłady opisu ruchów

II.5 Prędkość światła c jako prędkość graniczna w przyrodzie

Wyrażenie na prędkość w układzie cylindrycznym

Posługując się powyższymi wzorami możemy otrzymać wyrażenie na składowe prędkości w cylindrycznym układzie współrzędnych:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z = \\ &= \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z = \\ &= v_r \hat{e}_r + v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{e}_z\end{aligned}$$

W podobny sposób można otrzymać składowe prędkości w Układzie sferycznym (patrz zadania na ćwiczeniach).

Wektor styczny

Wektor styczny do toru możemy zdefiniować jako

$$\hat{e}_t = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \right|} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Bo:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} = 1 \quad \text{lub} \quad dr = ds$$

Wersor normalny. Płaszczyzna ściśle styczna

Ponieważ $\frac{d\hat{e}_t}{dt} \perp \hat{e}_t$

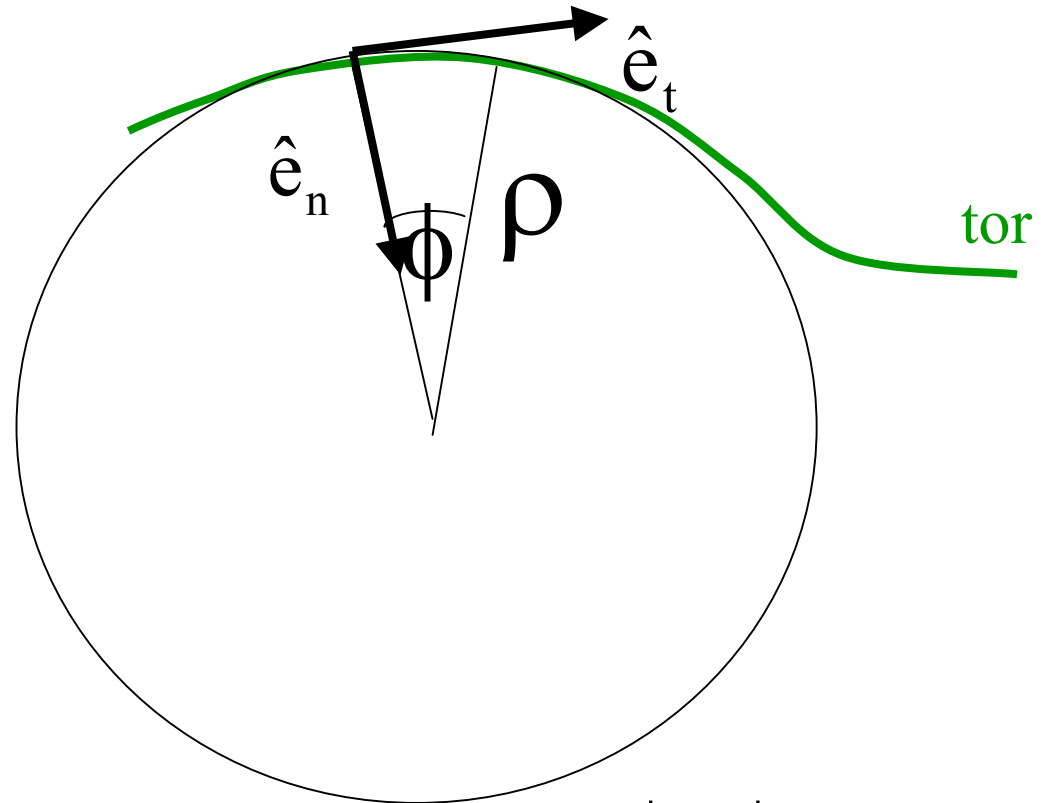
Możemy zdefiniować wersor normalny do toru jako:

$$\hat{e}_n = \frac{d\hat{e}_t/ds}{\left|d\hat{e}_t/ds\right|} = \frac{d\hat{e}_t/dt}{\left|d\hat{e}_t/dt\right|}$$

Płaszczyzna utworzona przez wersory styczny i normalny:
płaszczyzna ściśle styczna

Promień krzywizny

Infinityzalny łuk toru możemy przybliżyć przez łuk okręgu o promieniu ρ .

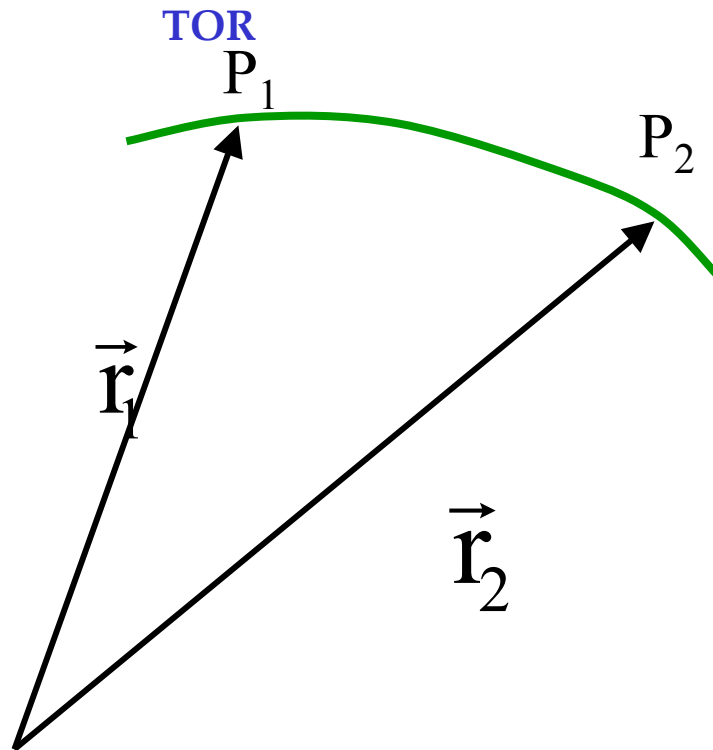


$$ds = \rho d\phi$$

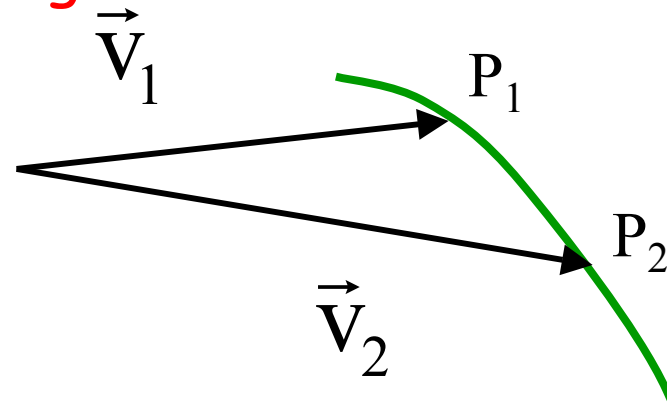
$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \hat{e}_n v \frac{d\phi}{ds} = \frac{v}{\rho} \hat{e}_n \quad \left| \frac{d\hat{e}_t}{dt} \right| = \frac{v}{\rho}$$

Tor i hodograf.



Prędkość jest styczna do toru



HODOGRAF=
Krzywa w przestrzeni
prędkości zakreślana
przez koniec wektora
prędkości.

Wektor przyspieszenia jest styczny do
hodografu

Przyspieszenie

Wektor przyspieszenia leży w płaszczyźnie ściśle stycznej:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{e}_t) = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{\frac{d\hat{e}_t}{dt}}{\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right|}\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right| = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n$$

Przyspieszenie
styczne

Przyspieszenie
normalne

Składowe przyspieszenia we współrzędnych cylindrycznych: radialne i transwersalne

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \hat{e}_\phi + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z \right) \right] = \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{e}_\phi + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \hat{e}_\phi + r \frac{d\phi}{dt} \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{e}_z = \\ &= \left[\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \right] \hat{e}_r + \left[r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \right] \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z\end{aligned}$$

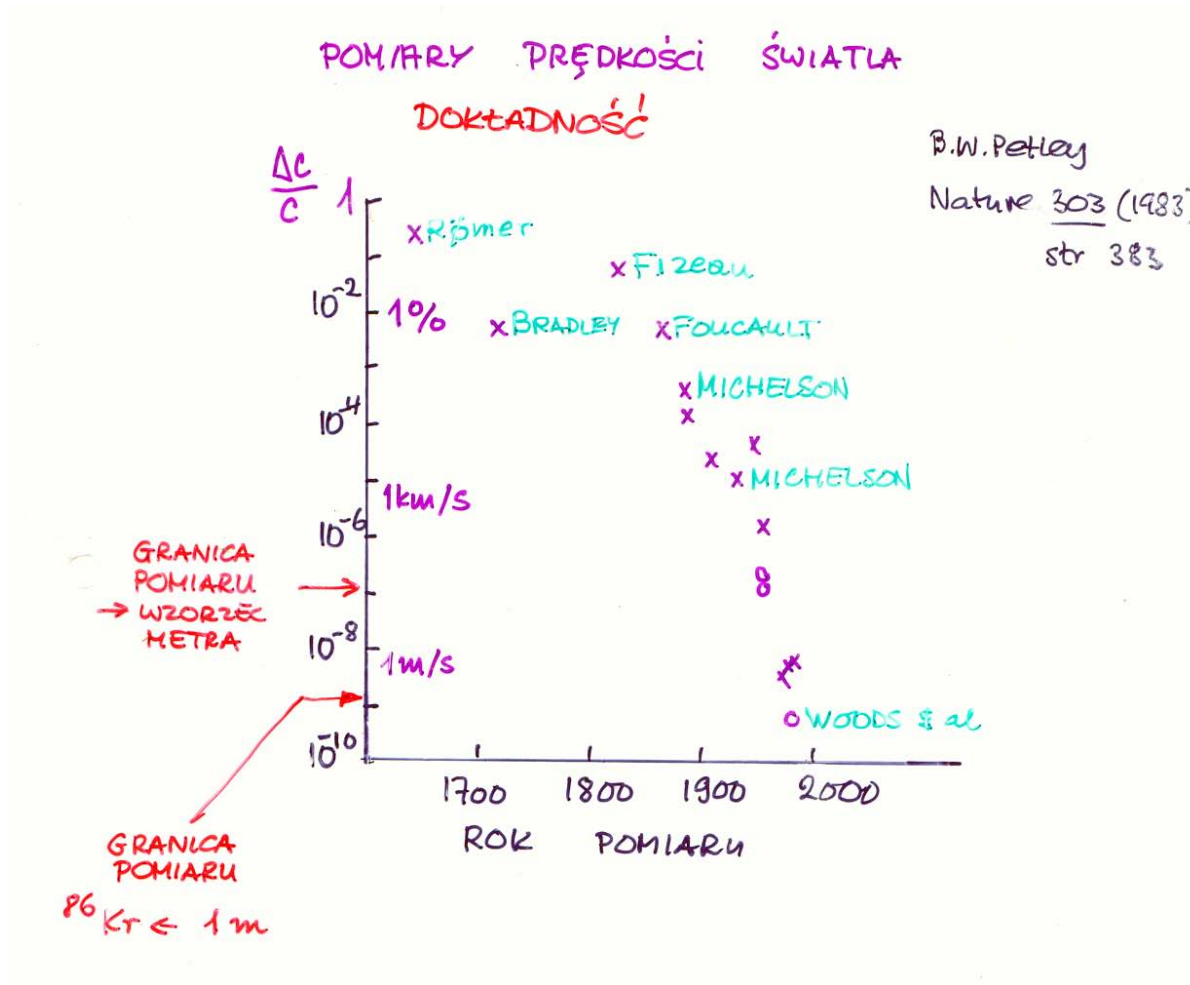
Uwaga: nie mylić przyspieszenia transwersalnego i stycznego, oraz radialnego i normalnego

Historia pomiarów c

Niektóre ważne metody i wyniki

Rok	Przez kogo?	Metoda	Wynik [m/s]
1676	Roemer	Astronomiczna: zaćmienia Io	214 000 000 (~30%)
1727	Bradley	Astronomiczna: aberracja światła	301 000 000 (~10%)
1849	Fizeau	Lab.: Modulacja wiązki światła kołem zębatym. Baza pomiaru 8633 m.	315 000 000 (duży błąd systematyczny)
1902	Perrotin	jw.	299 880 000 (84 000)
1850- 1862	Foucault (Arago)	Lab.: modulacja wiązki światła metodą wirującego zwierciadła	298 000 000 (500 000)
1878- 1926	Michelson	Jw. ,ostatnio na bazie 35 km w powietrzu jw., w próżni na bazie 1.6 km	299 796 000 (4 000) 299 774 000 (11 000)
1929- 1969	Karolus & Mittelstaedt/ inni	Lab.: modulacja światła komórką Kerra, modulacja czułości detektora	1927: 299 784 000 (20 000) 1962: 299 792 500 (50)

Dokładność pomiarów c



III. Ruch względny

III.1 Obserwacja położenia z dwóch różnych układów odniesienia. Pchnięcia (boosts) i obroty.

III.2 Transformacja Lorentza położenia. Geometria czasoprzestrzeni- interwał. Konsekwencje transformacji Lorentza: dylatacja czasu i skrócenie długości.

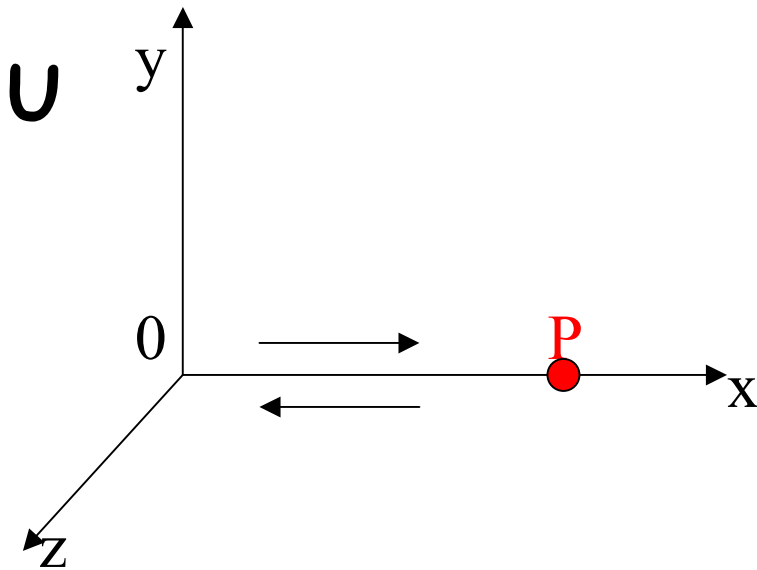
III.3 Transformacje prędkości i przyspieszenia

III.4 Ruch względny w przybliżeniu nierelatywistycznym. Obroty.

III. Transformacja Galileusza.

Wszechświat radarowy cd.

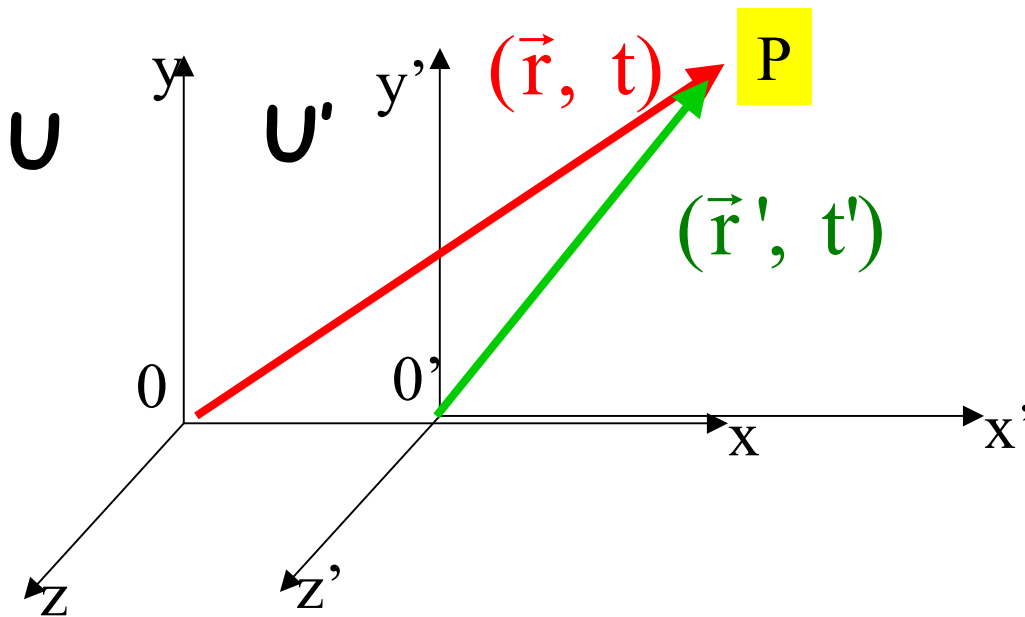
Wysyłając z 0 sygnały świetlne w czasie t_1 do P i odbierając tamże sygnały odbite od P w czasie t_2 możemy odtworzyć współrzędne czasoprzestrzenne (t_P, x_P) zdarzenia jakim jest dojście sygnału z 0 do P:



$$x_P = c \frac{(t_2 - t_1)}{2}$$

$$t_P = \frac{t_2 + t_1}{2}$$

Wszechświat radarowy: metoda pomiaru położenia i czasu zajścia zdarzenia



Układy odniesienia U i U' na ogół poruszają się względem siebie ruchem postępowym i/ lub obrotowym.

To będzie typowa sytuacja rozważana w tej części wykładu. Będziemy rozważali to samo zjawisko w dwóch UO.

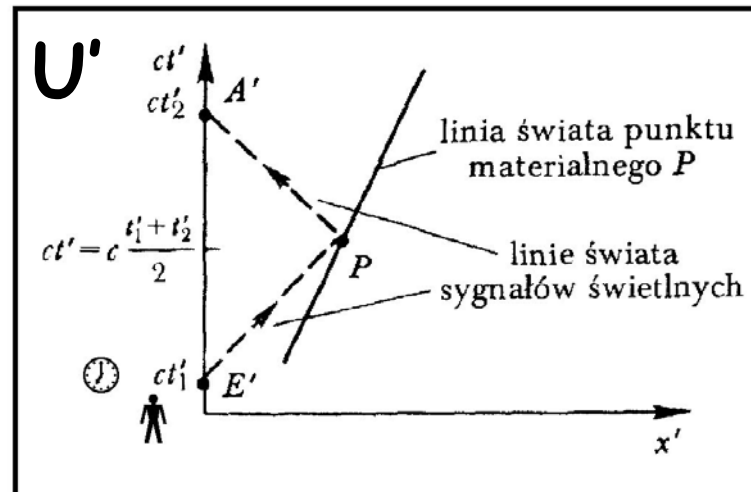
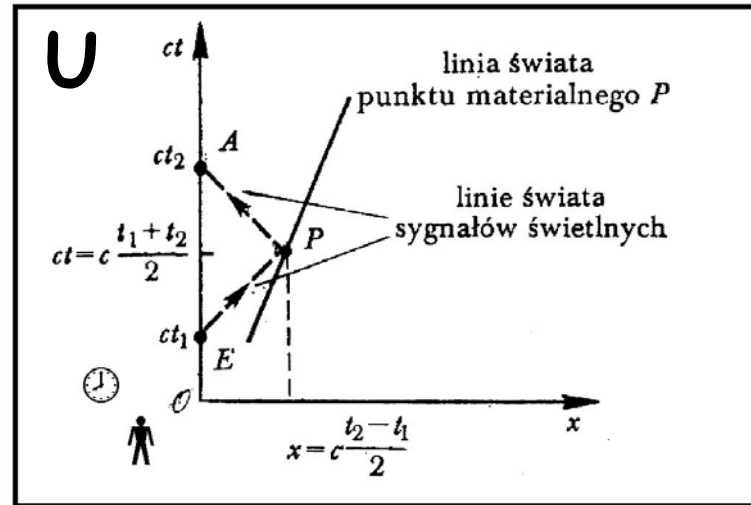
Dla uproszczenia rozważań będziemy rozważali zdarzenia zachodzące na osiach X i X' .

Światy radarowe U i U'

Obaj obserwatorzy

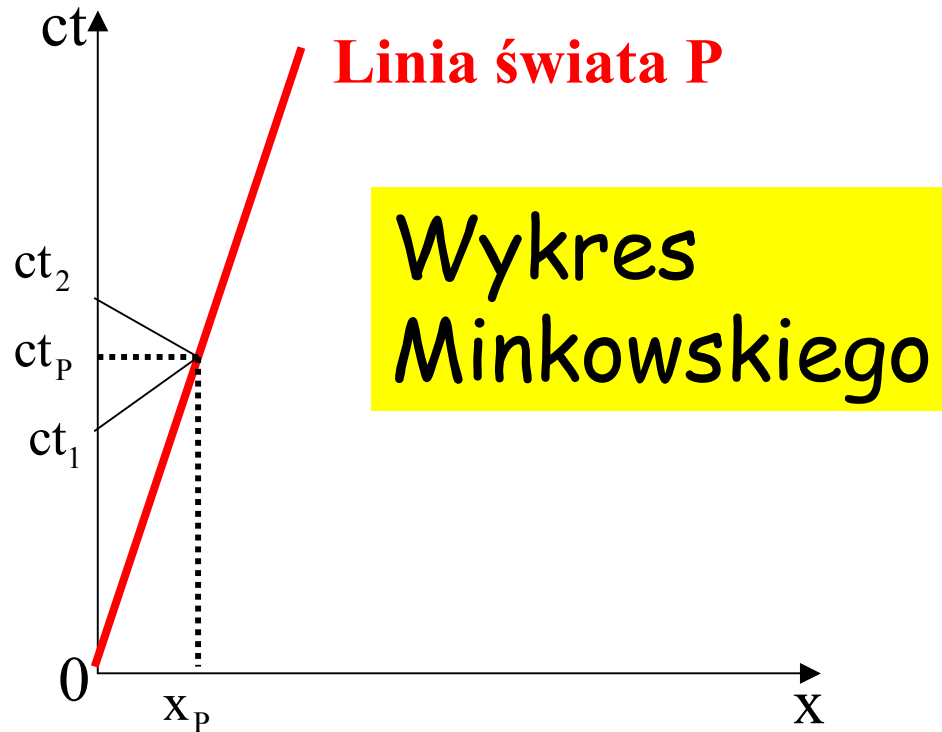
O i O' mogą zmierzyć metodą radarową położenie pewnego punktu materialnego P .

Wyniki ich pomiarów zaznaczone są na rysunku.



Prędkość światła w próżni c jest jednakowa w U i U'

Wszechświat radarowy cd.. Wykres Minkowskiego

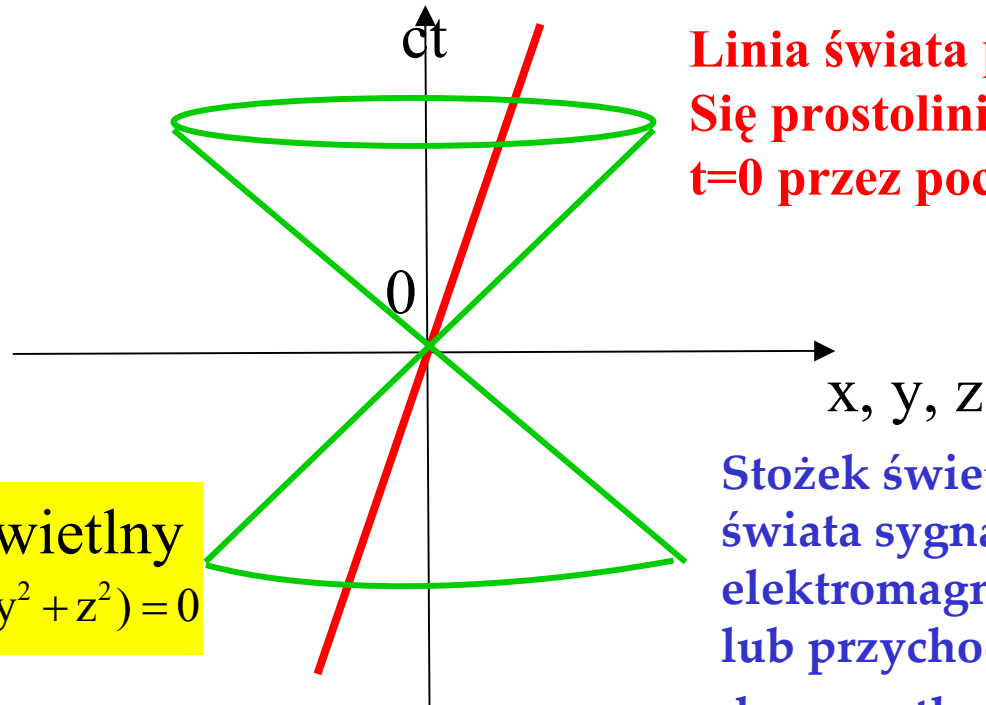


Z serii zdarzeń (x_i, t_i) możemy obliczać prędkość i przyspieszenie punktu P.

Metoda radarowa dostarcza więc obrazu ruchu punktu P.

Niech punkt P porusza się w U

Wykres Minkowskiego cd.



Linia świata punktu poruszającego się prostoliniowo, przechodzącego w $t=0$ przez początek układu

Stożek świetlny
 $(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$

Stożek świetlny- zbudowany z linii świata sygnałów elektromagnetycznych wysyłanych lub przychodzących do początku układu 0.

Stożek świetlny w przestrzeni Minkowskiego jest powierzchnią kuli w przestrzeni 3-wymiarowej

Współrzędne zdarzeń prostopadłe do V nie ulegają zmianie w wyniku tr. Lorentza

Ostatecznie dostajemy:

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \text{ gdzie } \beta = V/c \text{ i } \gamma = \left(\sqrt{1 - \beta^2}\right)^{-1}$$

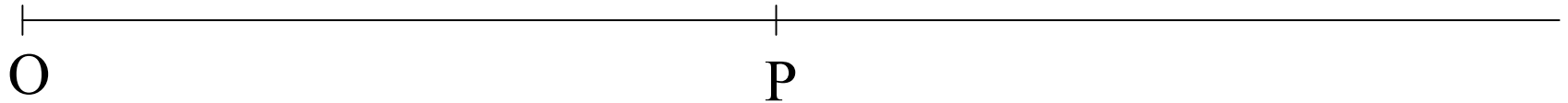
Dla małych prędkości $\beta \rightarrow 0; \gamma \rightarrow 1$

I transformacja Lorentza przechodzi w nierelatywistyczną transformację Galileusza:

$$x' = x - Vt$$

$$t' = t$$

Synchronizacja zegarów odległych obserwatorów



Przepis A. Einsteina:

1. Zmierzyć odległość OP metodą radarową,

Należy umówić się przez radio z obserwatorem w P , żeby:

2. Nastawił swój zegar na czas $t + OP/c$

3. Uruchomił zegar gdy dotrze do niego sygnał wysłany przez O w chwili t .

Stała α i synchronizacja zegarów

Rozwiązując ze względu na stałą α dostajemy:

$$\alpha^2 = \frac{1+\beta}{\beta-1} \quad \text{czyli} \quad \alpha = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \gamma(1+\beta)$$

Zatem zegary w U i U' chodzą inaczej bo

$$T' = \alpha T_0, \quad T = \alpha T' \quad \alpha = \gamma(1+\beta)$$

$$t = \frac{T+T_0}{2} = \gamma^2(1+\beta) = \gamma T'$$

Jak więc synchronizować zegary?

cd..

Ostatecznie dostajemy:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{V \cdot v_x}{c^2}} \begin{pmatrix} v_x - V \\ v_y / \gamma \\ v_z / \gamma \end{pmatrix}$$

Uwaga: składowe prędkości punktu prostopadłe do V (prędkości boostu) także się transformują relatywistycznie

Transformacja składowych przyspieszenia

Różniczkując wyrażenia na prędkość w obu układach otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma^3 \left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)^3} a_x \\ \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)^2} \left(a_y + \frac{v_y V / c^2}{\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)} a_x \right) \\ \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)^2} \left(a_z + \frac{v_z V / c^2}{\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)} a_x \right) \end{pmatrix}$$

Podobnie jak dla transformacji prędkości, składowe przyspieszenia prostopadłe do boostu także się transformują.

W przybliżeniu nierelatywistycznym...

Gdy $\beta \rightarrow 0; \gamma \rightarrow 1; \frac{v_x}{c} \rightarrow 0$

Dostajemy:

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Przyspieszenie jest niezmiennikiem transformacji Galileusza

Efekt Dopplera dla fali elektromagnetycznej

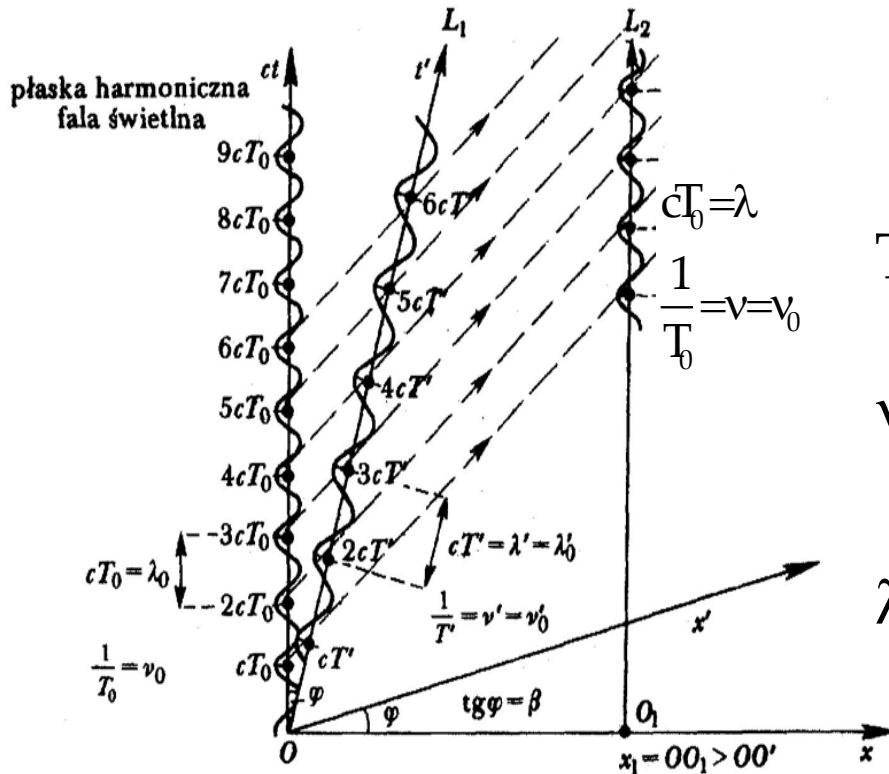
Efekt Dopplera jest to zmiana długości (częstości) fali związana z ruchem obserwatora.

Ponieważ fale elektromagnetyczne zawsze poruszają się relatywistycznie z prędkością c będziemy dla nich musieli stosować wzory relatywistyczne.

Dla innych fal, np. dźwiękowych, ich prędkość jest znacznie mniejsza od c i stosujemy wzory nierelatywistyczne.

Rozważymy fale e-m (lub dźwiękowe) poruszające się równoległe do wektora prędkości względnej \mathbf{V} .
Przypadek bardziej ogólny- źródło fal e-m ma prędkość skierowaną pod pewnym kątem do kierunku obserwacji jest trudniejszy. Przedyskutujemy go w Cz. V wykładu.

Efekt Dopplera dla fali elektromagnetycznej cd.



w chwili $t = t' = 0$
początki układów U
i U' pokrywają się, tzn.
 $x = x' = 0$

Wykres Minkowskiego w U ,
pokazuje sytuację obserwatora O' ,
który mierzy w swoim układzie:

$$T' = \gamma(1 + \beta) T_0$$

$$v' = v_0 / \gamma(1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} v_0$$

$$\lambda' = \lambda_0 \gamma(1 + \beta) = \lambda_0 (1 + \beta) \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right)$$

O i O' posługują się metodą radarową

W przypadku nierelatywistycznym, małej prędkości V

Dla fal świetlnych

$$\lambda' = \lambda_0 \gamma (1 + \beta) = \lambda_0 (1 + \beta) \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right)$$

$$\rightarrow \lambda_0 (1 + \beta)$$

Dla fal rozchodzących się w ośrodku związanym z obs. O z prędkością $v_{\text{drg}} \gg V$ zachodzi:

$$\lambda v = v_{\text{drg}}; \lambda = v_{\text{drg}} T$$

Obserwator O' stosuje tr. Galileusza:

$$v'_{\text{drg}} = v_{\text{drg}} - V \quad \text{ale } T' = T \quad \text{i dostajemy}$$

$$\lambda' = v'_{\text{drg}} T' = (v_{\text{drg}} - V) T = v_{\text{drg}} T \left(1 - \frac{V}{v_{\text{drg}}} \right) = \lambda \left(1 - \frac{V}{v_{\text{drg}}} \right)$$

$$v' = \frac{v}{\left(1 - \frac{V}{v_{\text{drg}}} \right)}$$

Prawo Hubble'a

Prawo Hubble'a mówi, że prędkość v oddalania się obiektu astronomicznego i jego odległość r od nas związane są zależnością:

$$v = H \cdot r$$

, gdzie $H = 100 h \text{ km/s/Mps} = h \times (9.77813 \text{ Gyr})^{-1}$ jest tzw. stałą Hubble'a. Znormalizowana stała Hubble'a h z najnowszych pomiarów wynosi $h = (0.71 \pm 0.04 \pm 0.03)$. Odwrotność stałej Hubble'a H wynosi około 13.7 mld. lat. Długość Hubble'a $c/H = 1.3 \times 10^{26} \text{ m}$

Prawo Hubble'a jest wyrazem rozszerzania się Wszechświata.

Parsek (ps) to astronomiczna jednostka długości równa odległości z której większą półoś eliptycznej orbity Ziemi wokół Słońca widać pod kątem jednej sekundy: $1 \text{ ps} = 3.26 \text{ lat świetlnych} = 3.08 \cdot 10^{13} \text{ km} = \text{około } 200\,000 \text{ większych półosi Ziemi (j.a.)}$.

IV. Prawa ruchu

1. Zasada bezwładności.
2. Druga zasada dynamiki; równania ruchu; masa bezwładna i masa ważka
3. Ruch swobodny i nieswobodny; więzy
4. Przykłady sił występujących w przyrodzie i przykłady rozwiązywania równań ruchu
5. Siły pozorne w nieinercjalnych układach odniesienia

Zasady dynamiki Izaaka Newtona

„Zasady matematyczne filozofii przyrody” 1687

I

Gdy wypadkowa siła działająca na ciało równa się zero, ciało spoczywające pozostaje w spoczynku, a będące w ruchu kontynuuje ruch po linii prostej ze stałą prędkością

II

Siła wypadkowa działająca na ciało powoduje jego przyspieszenie skierowane zgodnie z działającą siłą i do niej wprost proporcjonalne, a odwrotnie proporcjonalne do masy ciała.

III

Jeżeli ciało pierwsze działa na ciało drugie siłą F_{12} to istnieje także siła wywierana przez ciało drugie na ciało pierwsze F_{21} , która jest przeciwnie skierowana i równa co do wartości tej poprzedniej: $F_{21} = -F_{12}$.

II zasada dynamiki

Siła wypadkowa działająca na ciało powoduje jego przyspieszenie skierowane zgodnie z działającą siłą i do niej wprost proporcjonalne, a odwrotnie proporcjonalne do masy ciała.

$$m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Równania ruchu i podstawowy problem dynamiki

Równanie ruchu ciała o masie m poddanego działaniu siły wypadkowej \mathbf{F} :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Jest to równanie różniczkowe II-giego rzędu.

Podstawowe zagadnienie dynamiki: znaleźć rozwiązanie równania ruchu mając zadaną siłę i zadane warunki początkowe.

Masa ważka i masa bezwładna

W Ogólnej Teorii Względności masa ważka= występująca w prawie powszechnego ciężenia jest równa masie bezwładnej.

Jeżeli tak by było, to dla wszelkich substancji powinna zachodzić proporcjonalność masy bezwładnej do masy grawitacyjnej z tą samą stałą proporcjonalności:

$$\frac{m_{\text{bezw}}}{m_{\text{grav}}} = \lambda$$

Ten związek był kilkakrotnie sprawdzony doświadczalnie: R. Eötvös et. al. (1890, 1922, waga skręceń, dokładność $5 \cdot 10^{-9}$), R. H. Dicke et. al. (1964, wahadło torsyjne, dokładność 10^{-11}).

W mechanice klasycznej nierelatywistycznej i relatywistycznej masy ciał są dowolnymi parametrami. Nie są wyznaczone przez jakąś głębszą teorię.

Brak jest atomowego wzorca masy. Jednostka masy= wzorzec 1 kg w MIMW w Sevres pod Paryżem.

Współczesne teorie oddziaływań fundamentalnych zawierają początki teorii mas- masy biorą się z oddziaływania cząstek z uniwersalnym polem Higgsa.

Siła

Jednostka siły: 1 newton=1kg.1m/s²

Zasada niezależności sił:

Niech na ciało działają dwie niezależne siły: $\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$ $\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$

Wtedy ciało porusza się przyspieszeniem będącym sumą wektorową przyspieszeń:

$$m\vec{a} = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

V Zasady zachowania

1. Pęd nierelatywistyczny. Moment pędu
2. Nierelatywistyczna energia kinetyczna, praca, moc
3. Energia potencjalna. Siły zachowawcze
4. Ruch w polach sił zachowawczych
5. Ruch ciała o zmiennej masie. Rakieta. Spadająca kropla
6. Energia i pęd przy prędkościach bliskich c

Definicja wektora pędu. Prawo zachowania pędu

Dla cząstki o masie m_i i prędkości \mathbf{v}_i definiujemy (nierelatywistyczny) wektor pędu \mathbf{p}_i jako:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

Dla układu N cząstek pęd całkowity \mathbf{P} to:
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Jeżeli wypadkowa siła działająca na te ciała znika to spełnione jest prawo zachowania pędu:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i = 0 \text{ czyli } \vec{P} = \overline{\text{const}}$$

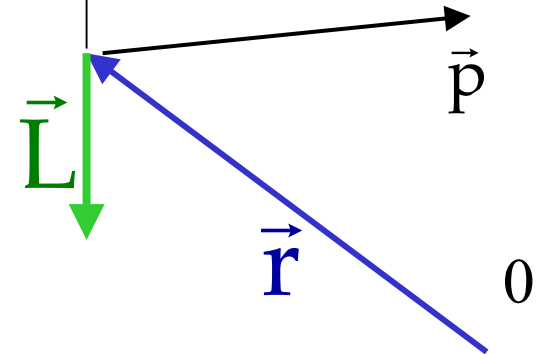
Mamy wtedy do czynienia z układem izolowanym N ciał.

Moment pędu

Moment pędu określamy zawsze względem pewnego wyróżnionego punktu, najczęściej początku układu współrzędnych 0. Dla jednej cząstki i układu N cząstek będzie to:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



Zmiana wektora momentu pędu jest związana z momentem siły:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

Zachowanie momentu pędu cząstki

Ponieważ:
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

moment pędu jest zachowany gdy znika moment siły działającej na ciało. Zachodzi to w dwóch przypadkach:

1. Dla cząstki swobodnej gdy na ciało nie działa siła wypadkowa.
2. Gdy siła jest zawsze równoległa do promienia wodzącego. Ma to miejsce m. dla sił centralnych:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{e}_r$$

Gdy moment pędu jest zachowany ruch jest płaski, odbywa się po płaszczyźnie prostopadłej do wektora momentu pędu.

Ruch w polu sił centralnych jest płaski

Energia kinetyczna i jej związek z pracą sił

Przekształcając równanie ruchu:

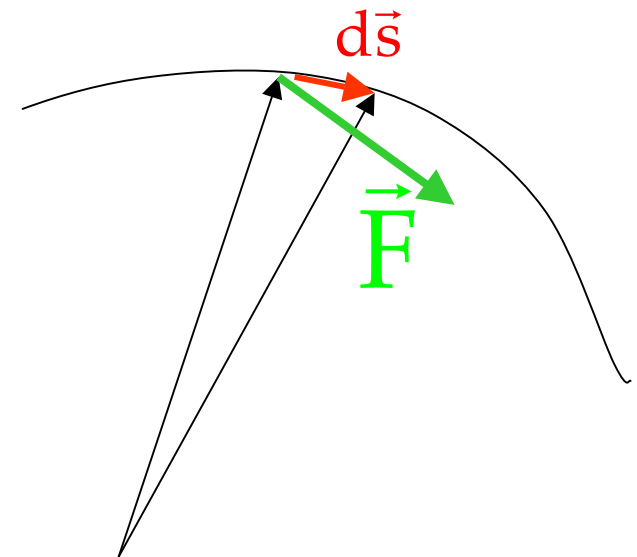
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (mv^2) = \frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}$$

dostajemy:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \hat{e}_t ds$$



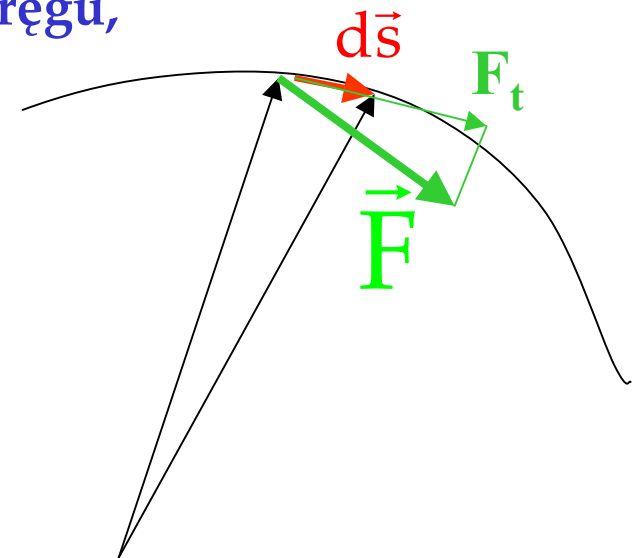
Praca

Praca siły \vec{F} przy infinitezymalnym przesunięciu $d\vec{s}$:

$$dW \equiv \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_t ds$$

Praca sił prostopadłych do przesunięcia =0.

Przykłady: siła dośrodkowa w ruchu po okręgu,
magnetyczna część siły Lorentza w
jednorodnym polu magnetycznym.



$$[W] = [F][L] = 1\text{Nm} = 1\text{J} \text{ (dżul)}$$

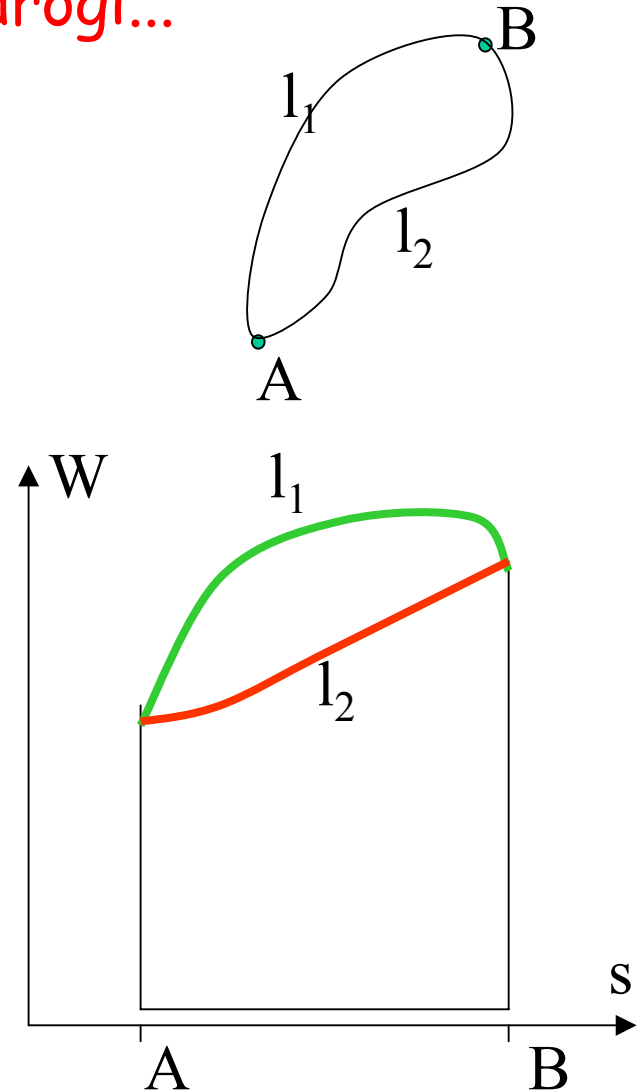
Praca na ogół zależy od drogi...

Siłę i wektor styczny wzdłuż toru możemy przedstawić jako funkcję parametru np. długości łuku s .

Moc P definiujemy jako:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Jednostka mocy wat:
1W=1J/s



Siły zachowawcze lub potencjalne

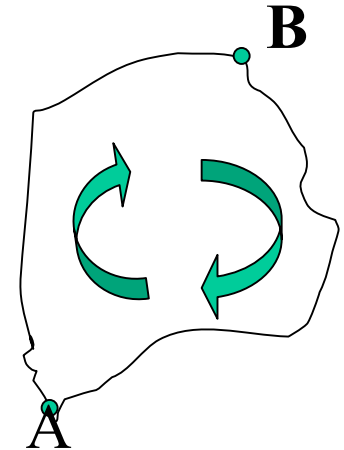
Są to takie siły, dla których praca po dowolnej drodze między (dowolnymi) punktami A i B nie zależy od drogi (krzywej toru po którym porusza się ciało) i wyraża się przez zmianę energii potencjalnej ciała w trakcie ruchu od A do B: $E_p(A) - E_p(B)$:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_p(A) - E_p(B)$$

Dla sił zachowawczych dowolna cyrkulacja (całka krzywoliniowa po drodze zamkniętej) znika:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

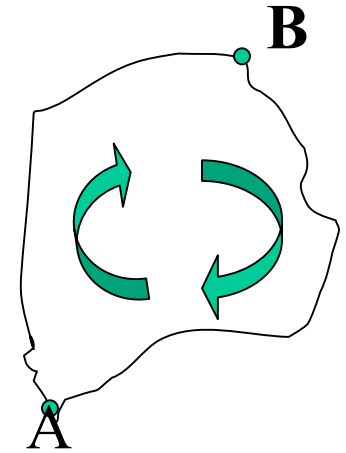
$$\text{Bo: } \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$



Związek między siłą zachowawczą a energią potencjalną

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Prawo zachowania energii mechanicznej



W polu sił zachowawczych zachodzi:

$$\Delta E_k = E_k(B) - E_k(A) = W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_p(A) - E_p(B)$$

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A)$$

Prawo zachowania energii

$$E_{\text{całkowita}} = E_k + E_p +$$
$$+ E_{\text{pól}} +$$
$$+ Q_{\text{energia kinetyczna ruchu cząsteczek}}$$

Potencjał efektywny. Bariera odśrodkowa

Prawo zachowania energii może być zapisane w postaci:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E$$

Człon zależny od L^2 nosi nazwę bariery odśrodkowej, bo

$$F_o = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = \frac{L^2}{2mr^3} = mr\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

skierowana jest od centrum siły.

Suma energii potencjalnej i członu odśrodkowego to efektywna energia potencjalna:

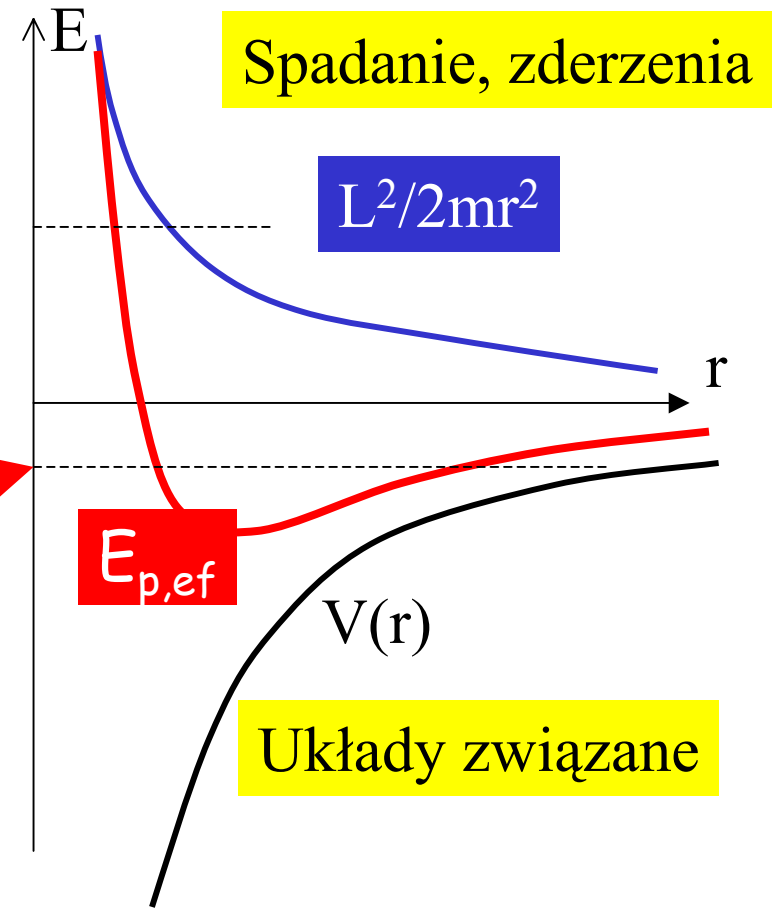
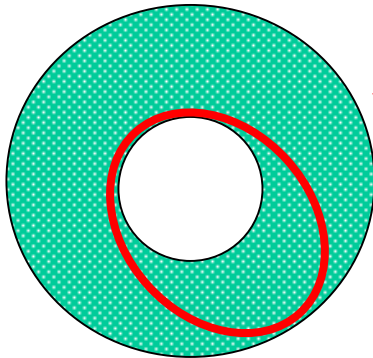
$$E_{p,ef} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Potencjał efektywny. Bariera odśrodkowa cd.

Punkty zwrotne:

$$E - E_{p,ef}(r) = 0$$

Dozwolony obszar ruchu



Wzór Bineta: równanie toru w polu sił centralnych

Równania ruchu w płaszczyźnie ruchu- siła ma tylko składową radialną:

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F(r) \quad ma_\phi = m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0$$

Drugie z tych równań to zasada zachowania momentu pędu:

$$ma_\phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\phi}) = \frac{1}{r} \frac{dL}{dt} = 0$$

Równanie toru otrzymamy zamieniając różniczkowanie po czasie na różniczkowanie po ϕ :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} = \left(\frac{L}{mr^2} \right) \frac{d}{d\phi}$$

Stosując dwukrotnie dostajemy:

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Podstawiając do r. Radialnego dostajemy wzór Bineta:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2} F(r)$$

Kiedy tor wyraża się przez funkcje trygonometryczne?

Przyjmijmy, że $F(r)=Fr^{-n}$.

Wtedy mamy:

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mF}{L^2(n+1)}u^{-n-1} - u^2}}$$

Całka daje nam arcsin gdy pod pierwiastkiem mamy wielomian drugiego stopnia bo:

$$\phi = \phi_0 = \int \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \arcsin\left(\frac{\xi(u)}{A}\right)$$

Zachodzi to dla

$n = 2, 3$ i -1

oscylator

Siła grawitacji i kulombowska

Przykład: całkowanie wzoru Bineta dla siły grawitacyjnej

Mamy:

$$F(r) = -\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{GmM}{r^2}$$

Wzór Bineta:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} = \frac{1}{p}$$

Ma rozwiązanie w postaci krzywej stożkowej ogniskiem w centrum

siły:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos(\phi - \phi_0)$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

Charakter stożkowej zależy od wartości mimośrodu ε :

1. $\varepsilon < 1$ - **elipsa**
2. $\varepsilon = 1$ **parabola**- krzywa zmierza do nieskończoności dla $\phi = \phi_0 + \pi$
3. $\varepsilon > 1$ - **hiperbola**- krzywa zmierza do nieskończoności dla $\phi = \phi_0 + \arccos(1/\varepsilon)$

Mimośród jako funkcja energii

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2} E} = \sqrt{1 + \frac{2pE}{\alpha}}; \quad p > 0, \alpha > 0$$

Widać, że mimośród jest:

- mniejszy od 1 – rozwiązanie eliptyczne- dla ujemnych energii,
- większy od 1- rozwiązanie hiperboliczne- dla dodatnich energii,
- równy 1- rozwiązanie paraboliczne- dla energii zerowych

1. Pęd relatywistyczny

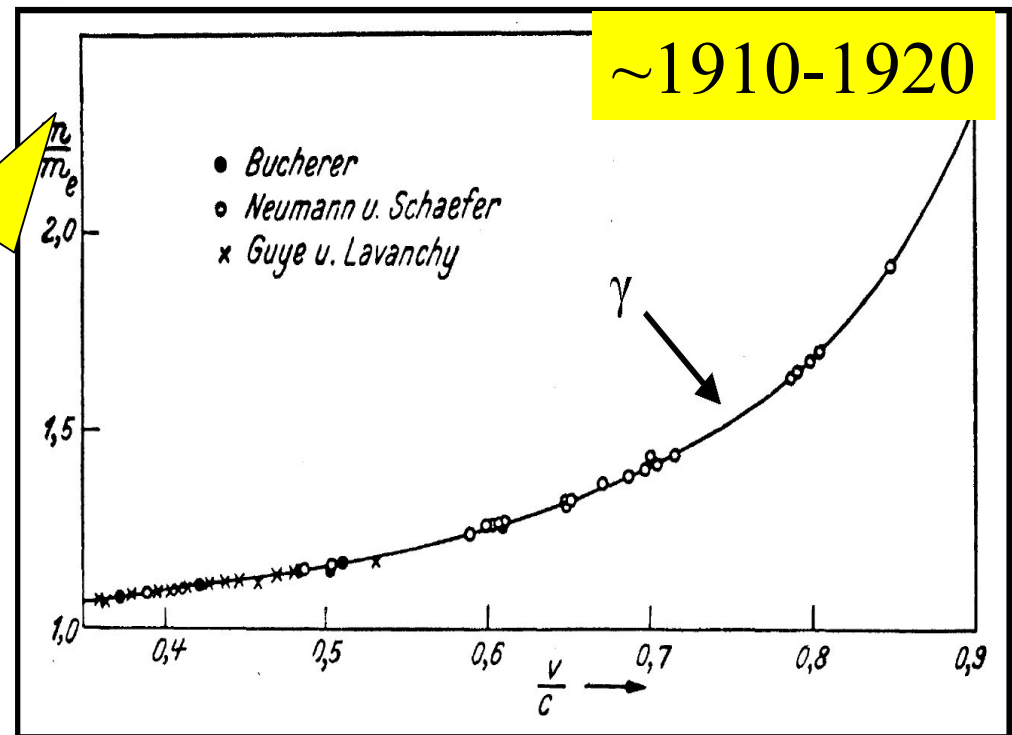
Z szeregu doświadczeń wynika, że należy zmodyfikować nierelatywistyczną definicję wektora pędu: $\vec{p} = m\vec{v}$. Poprawne wyrażenie relatywistyczne ma postać:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma\vec{v}$$

Dla elektronów

$$m_{ev} = m_e \gamma$$

$$\frac{m_{ev}}{m_e} = \gamma$$



Uogólnienie II zasady dynamiki dla $v \rightarrow c$

Wiemy już, że II zasada dynamiki zapisana jako pochodna pędu po czasie= sile jest słuszna relatywistycznie. Oznacza to, że:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \vec{F} \rightarrow K^m = F^m \gamma$$

Konstrukcja i interpretacja K^0 :

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \cdot u_\mu ; \quad \vec{K} = \gamma \vec{F}$$

$$K^\mu \cdot u_\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \cdot u_\mu = m u_\mu \cdot \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{d\tau} u^\mu \cdot u_\mu \right) = 0$$

$$K^0 = \frac{\vec{K} \cdot \vec{u}}{u^0} = \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\gamma}{c} P = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}$$

Związek między energią i pędem

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1 | m^2 c^4$$

$$E^2 - p^2 c^2 = (m c^2)^2$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m c^2)^2} \underset{c=1}{=} \sqrt{p^2 + m^2}$$

Prędkość cząstki wyraża się przez jej wektor pędu i energię:

$$\vec{v} = \frac{c \vec{p}}{E} c; \quad \vec{\beta} = \frac{c \vec{p}}{E}$$

zaś jej czynnik Lorentza γ wynosi: $\gamma = \frac{E}{m c^2}$

4. Czwierowektor energii- pędu

Podobnie do interwału czasoprzestrzennego:

$$s^2 = (ct)^2 - \vec{r}^2 = \text{inv}$$

który jest niezmiennikiem tr. Lorentza, wielkość

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = (mc^2)^2$$

utworzona z E i relatywistycznego pędu jest niezmiennikiem.

Sugeruje to, że E i wektor pędu.c mogą być czasową i przestrzennymi składowymi czterowektora, który transformuje się zgodnie z transformacją Lorentza:

$$E^\mu = (E, p_x c, p_y c, p_z c) \quad \mu=0,1,2,3$$

Czterowektor E-p podlega tr. Lorentza

Pod wpływem pchnięcia Lorentza wzdłuż osi OX z prędkością V czterowektor E-p transformuje się następująco:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x c \\ p'_y c \\ p'_z c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_V \left(E - \frac{V}{c} p_x c \right) \\ \gamma_V \left(p_x c - E \frac{V}{c} \right) \\ p_y c \\ p_z c \end{pmatrix}$$

gdzie

$$\gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \beta_V = \frac{V}{c}$$

Czteropęd fotonu (cząstki o zerowej masie)

Dla cząstki o zerowej masie spoczynkowej zachodzi:

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = 0$$

Stąd energia fotonu związana z częstością wzorem $E=h\nu$ wiąże się z pędem wzorem:

$$p_\gamma = k / c = h\nu / c$$

Zaś czteropęd fotonu lecącego w kierunku \hat{e} :

$$k^\mu = (h\nu, h\nu\hat{e})$$

cd. ŚM-uogólnienie na przypadek relatywistyczny

Ponieważ prędkość cząstki relatywistycznej wyraża się przez jej relatywistyczny pęd i energię:

$$\vec{v} = c \frac{\vec{p}c}{E}$$

Możemy uogólnić wyrażenie na prędkość układu ŚM jako:

$$\vec{V} = c \frac{\sum \vec{p}_i c}{\sum E_i} \xrightarrow{v_i \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i}$$

Do znalezienia czterowektorów energii- pędu w ŚM musimy zastosować tr. Lorentza z powyższym pchnięciem między układami.

VI Oddziaływania dwóch ciał. Oddziaływania grawitacyjne i Układ Słoneczny

- 1 Redukcja do problemu jednego ciała.
- 2 Potencjał grawitacyjny kuli jednorodnej
- 3 Problem Keplera cd.
- 4 Stabilność Układu Słonecznego.
- 5 Przekrój czynny. Rozpraszanie Rutherforda
- 6 Rozpraszanie głębokonieelastyczne i kwarki

Równanie ruchu względnego

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}(\vec{r}_{12}) \cdot m_2$$

daje nam po odjęciu stronami:

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_{12}(\vec{r}_{12}) \cdot m_1$$

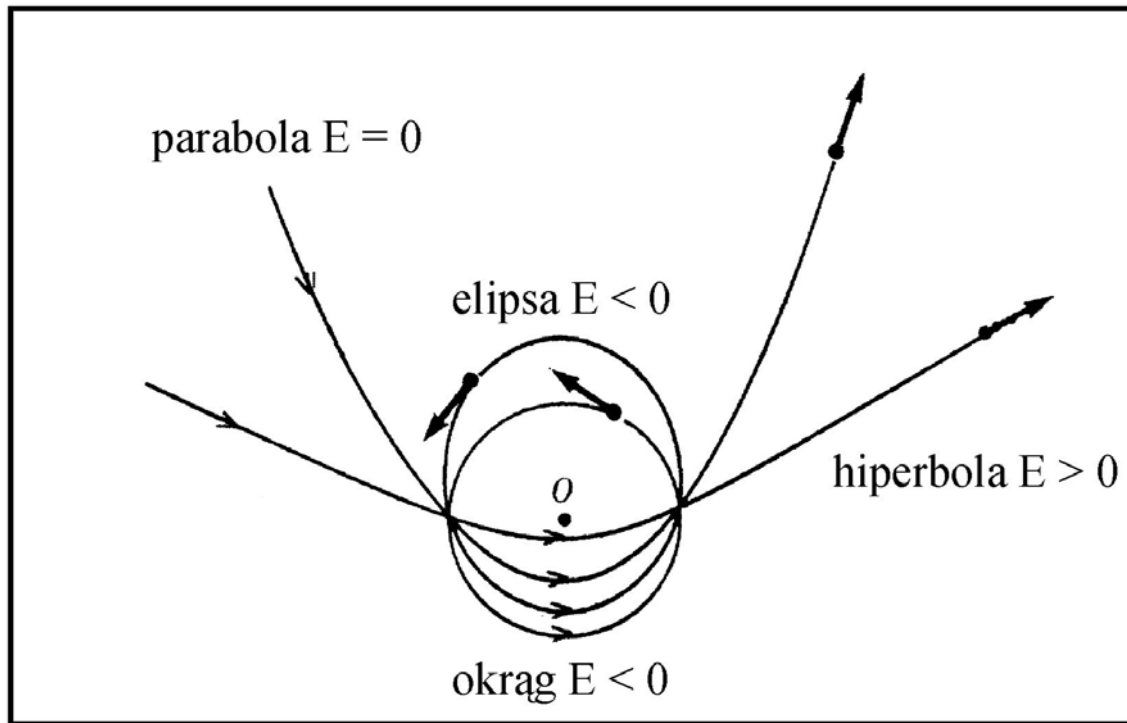
$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (m_1 + m_2) \vec{F}_{12}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_{21} = \mu \ddot{\vec{r}}_{21} = \vec{F}_{12}$$

Ruch względny jest to ruch ciała o masie zredukowanej μ w zewnętrznym polu siły

Stożkowe

Problem Keplera: ruch w ŚM dla ciała o różnych E ale tym samym L



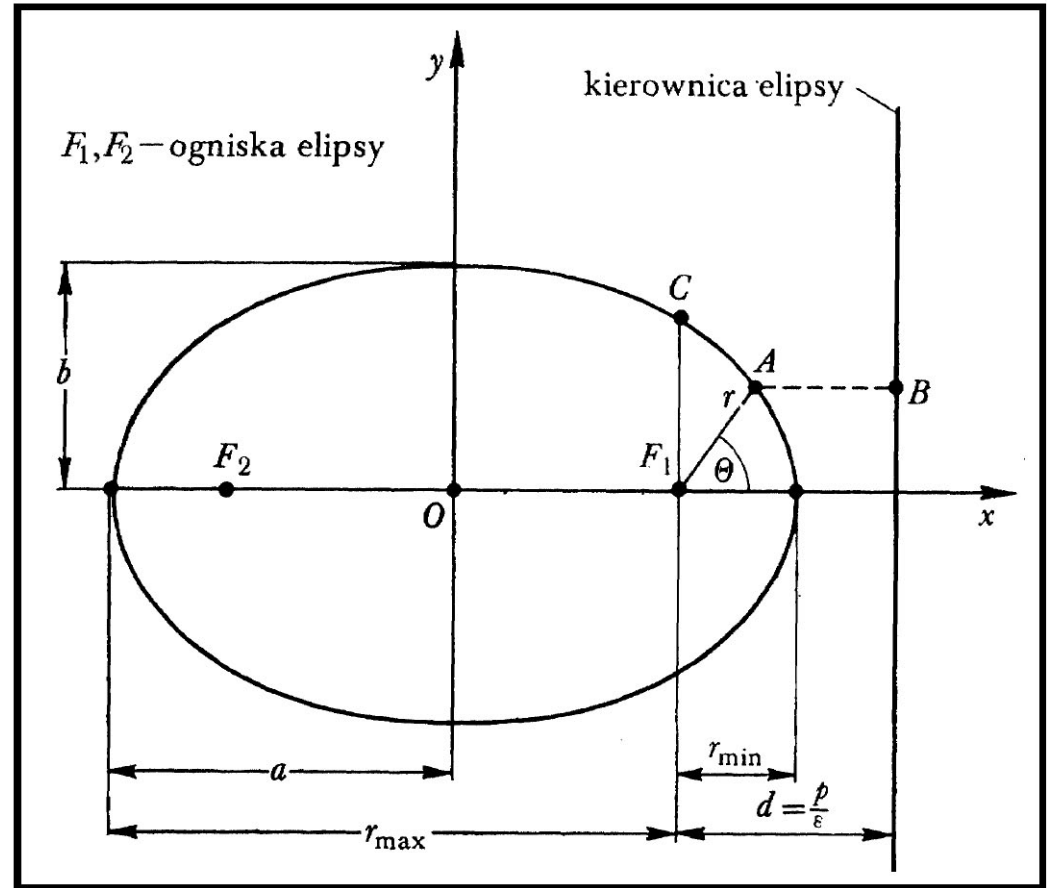
Elipsa $E < 0$

$$\varepsilon = \frac{r}{AB}$$

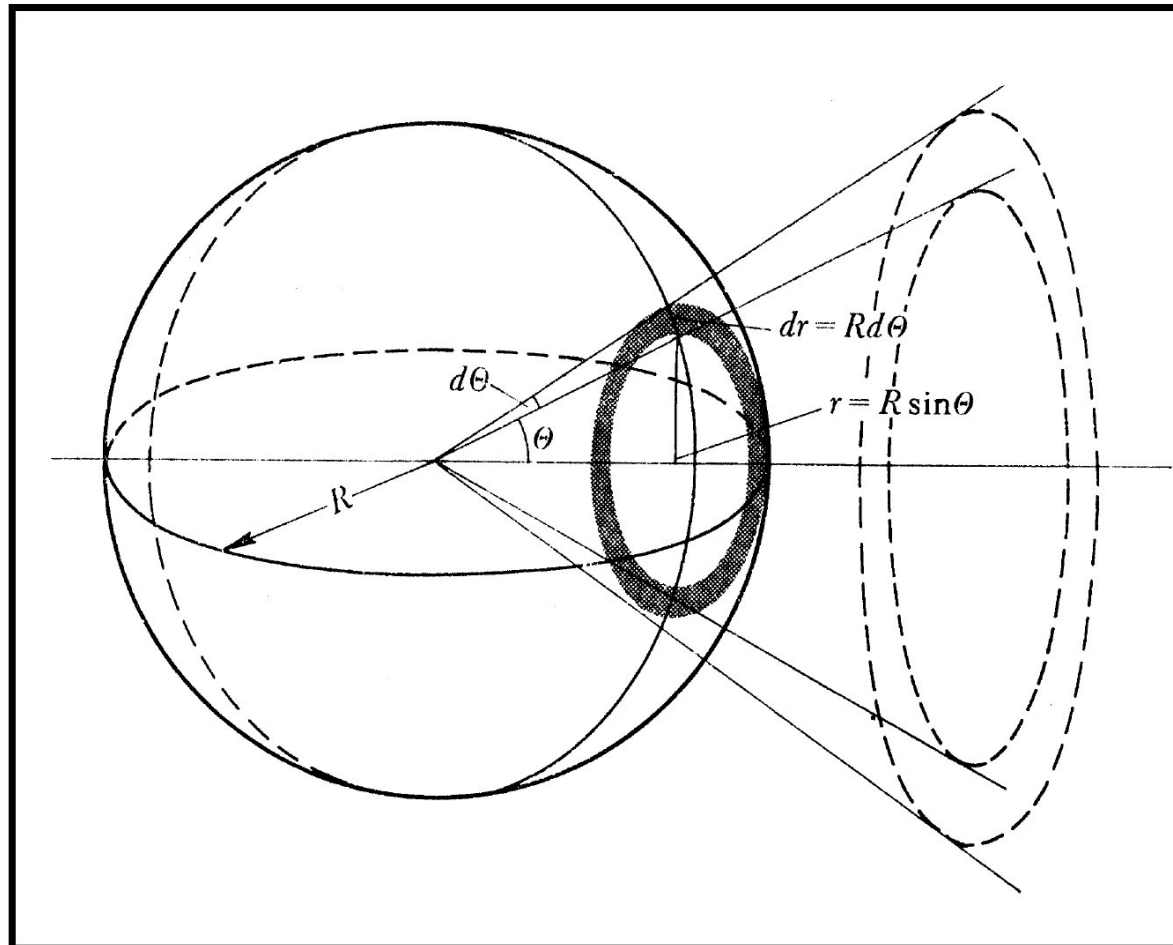
$$2a = r_{\max} + r_{\min} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{Gm_1m_2}{|E|}$$

$$a = \frac{Gm_1m_2}{2|E|}$$

$$2b = \frac{2p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2\mu|E|}}$$



Kąt bryłowy



Prawa Keplera ruchu planet

- I. Każda planeta krąży po elipsie ze Słońcem w jednym z jej ognisk.
- II. Promień wodzący planety zakreśla równe pola w równych czasach
- III. **Kwadrat** okresu obiegu planety dookoła Słońca jest proporcjonalny do **sześcianu** długości wielkiej półosi elipsy

Drugie prawo Keplera zostało udowodnione w Cz. V.1:

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{L}{2\mu} = \text{const}$$

Wyprowadzenie III Prawa Keplera

Korzystamy z II Prawa Keplera:

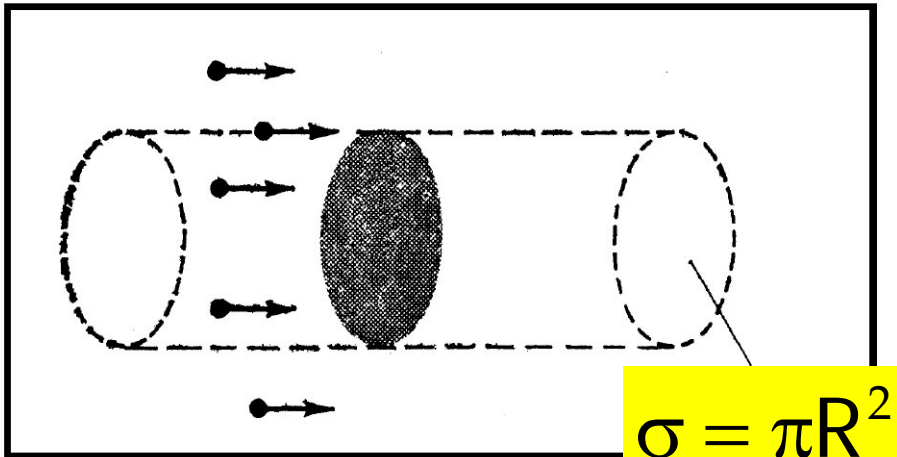
$$\int_0^T \dot{A} dt = T \frac{L}{2\mu} = \pi ab; \text{ podnosimy stronami do kwadratu}$$

$$\left(T \frac{L}{2\mu} \right)^2 = -\pi^2 a^2 \frac{L^2}{2E\mu} = L^2 \pi^2 \frac{a^3}{\mu\alpha}$$

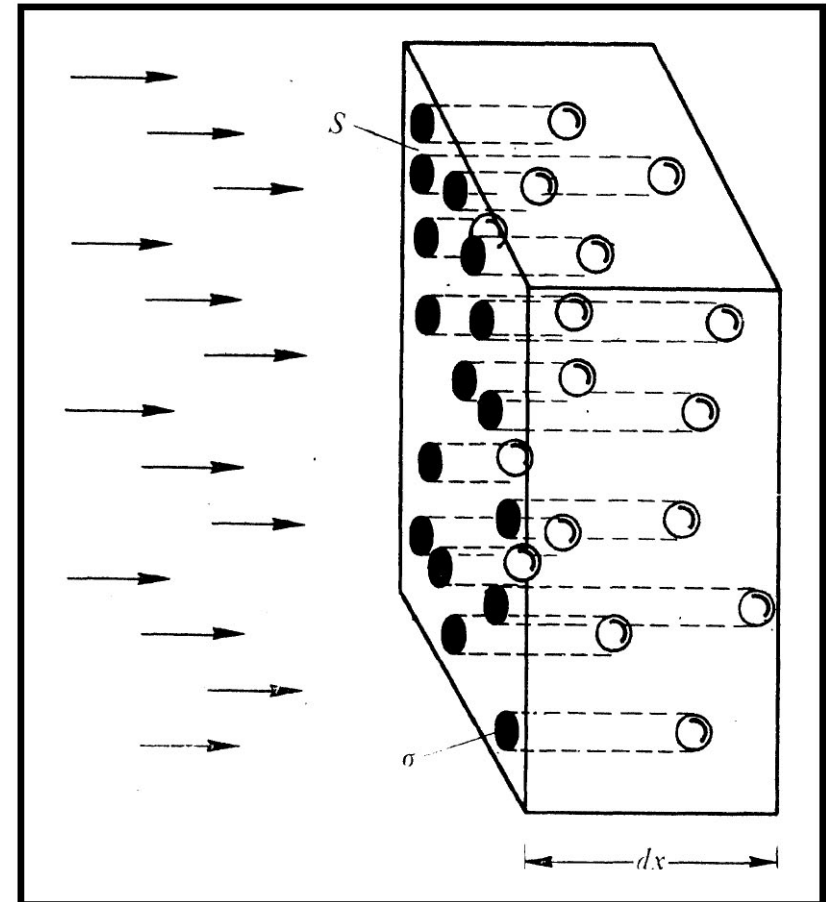
$$\frac{T^2}{4\mu} = \frac{\pi^2 a^3}{\alpha}; \quad T^2 = \frac{4\pi^2 \mu a^3}{\alpha} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \xrightarrow{m_1/m_2 \rightarrow 0} \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_2}$$

Dla bardzo masywnego Słońca i stosunkowo lekkich planet okresy ich obiegu nie zależą od ich mas.

cd. Całkowity Przekrój Czynny



Musimy uwzględnić strumień padających pocisków Φ_0 i liczbę centrów rozpraszających na jedn. powierzchni.



cd...

Rozważmy warstwę tarczy o grubości dx i powierzchni A . W objętości tarczy $dV=Adx$ znajduje się $ndV=nAdx$ centrów rozpraszających. Niech gęstość centrów wynosi n .

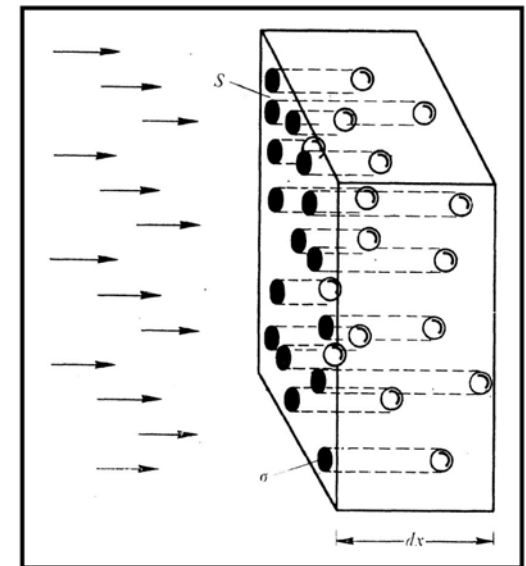
Niech strumień cząstek padających na warstwę dx wynosi Φ cząstek na jednostkę powierzchni na jednostkę czasu.

Liczba rozproszonych cząstek, jeżeli centra mają powierzchnie σ wynosi:

$$d\Phi = -\frac{\Phi \cdot n \cdot \sigma A dx}{A}; \quad \frac{d\Phi}{\Phi} = -n\sigma \cdot dx$$

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-n\sigma \cdot x} = \Phi_0 e^{-x/\lambda}; \quad \lambda = \frac{1}{n\sigma}$$

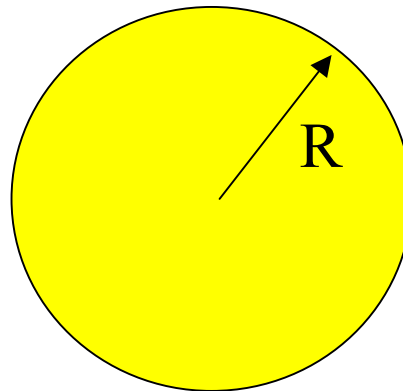
λ - średnia droga swobodna



Przekrój czynny- wymiary i jednostki

$$[\sigma] = \text{m}^2;$$

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 100 \text{ fm}^2$$



$$\sigma = 1 \text{ barn} \Leftrightarrow R = 5.64 \text{ fm}$$

Rozkład kątowy i różniczkowy przekrój czynny

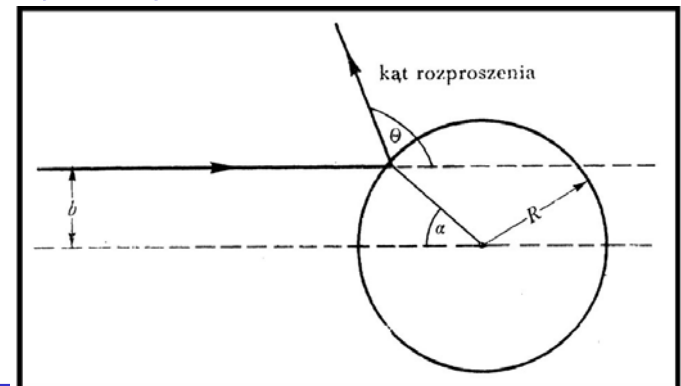
Całkowity przekrój czynny opisuje prawdopodobieństwo zderzenia pocisku z centrum.

Można zadać bardziej szczegółowe pytania np. :

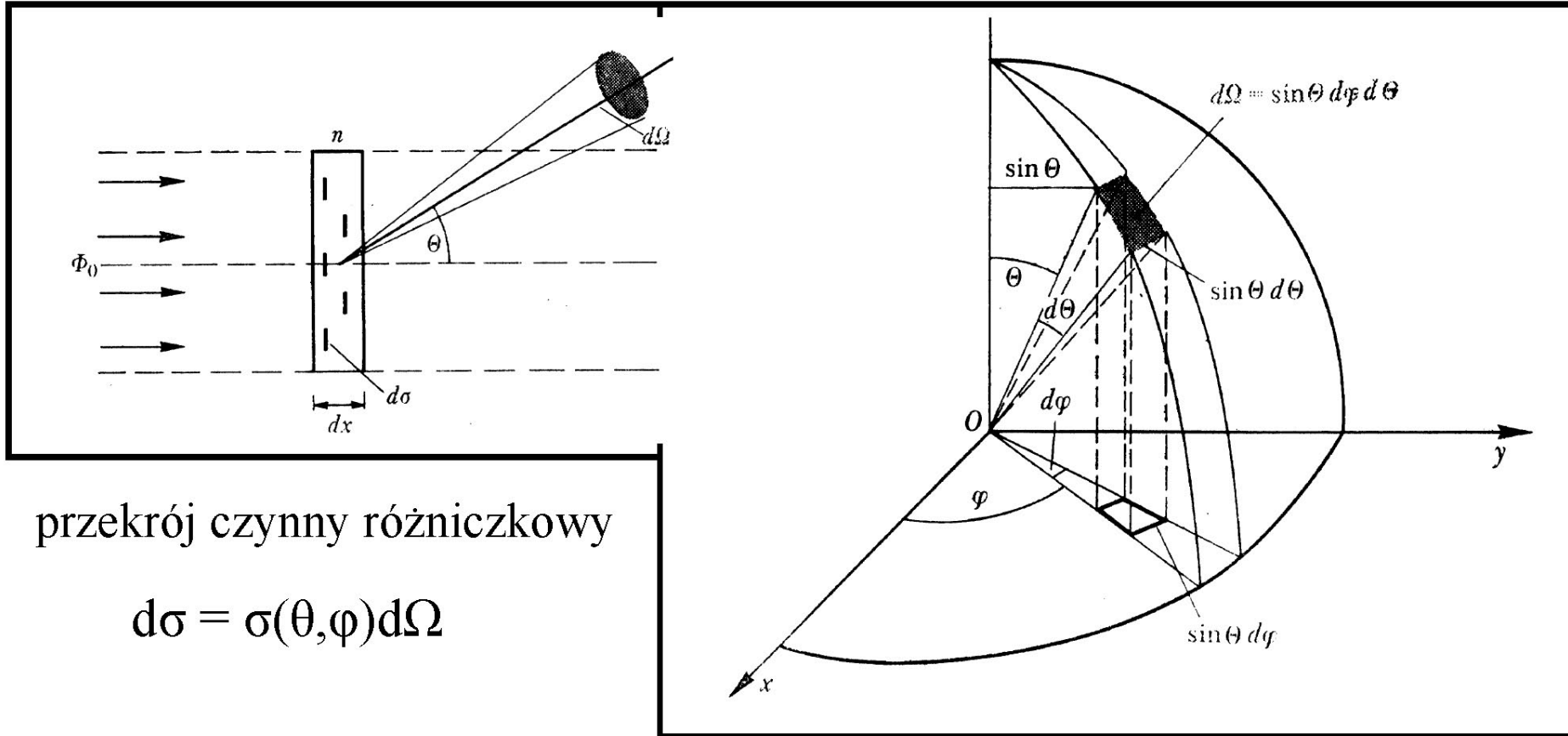
- Jakie jest prawdopodobieństwo rozproszenia pocisku pod określonym kątem?
- Jakie jest prawdopodobieństwo określonej straty energii pocisku w zderzeniu nieelastycznym? Itp.

Wielkościami, które wykorzystujemy w odpowiedziach na te i podobne pytania są różniczkowe przekroje czynne.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}; \quad \frac{d\sigma}{d(E-E')}$$



Różniczkowy przekrój czynny cd.



przekrój czynny różniczkowy

$$d\sigma = \sigma(\theta, \varphi) d\Omega$$

Zwykle mamy symetrię osiową:

$$\sigma(\phi, \theta) = \sigma(\theta); \quad d\Omega = 2\pi d(\cos\theta)$$

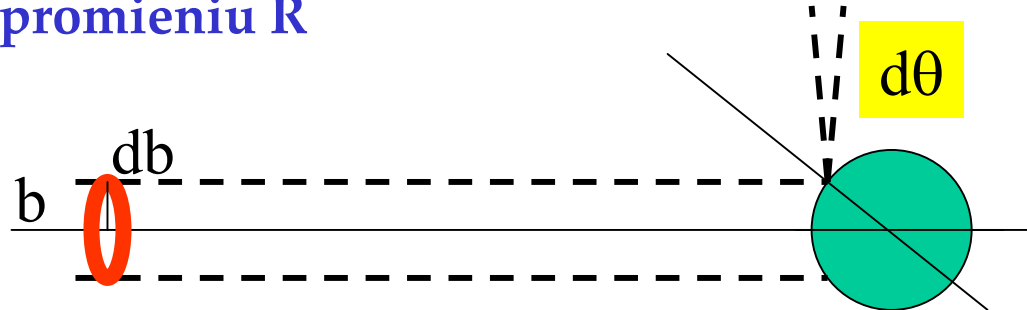
Różniczkowy przekrój czynny cd.

Całkowity przekrój czynny otrzymujemy całkując różniczkowy przekrój czynny po całym kącie bryłowym:

$$\sigma = \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta$$

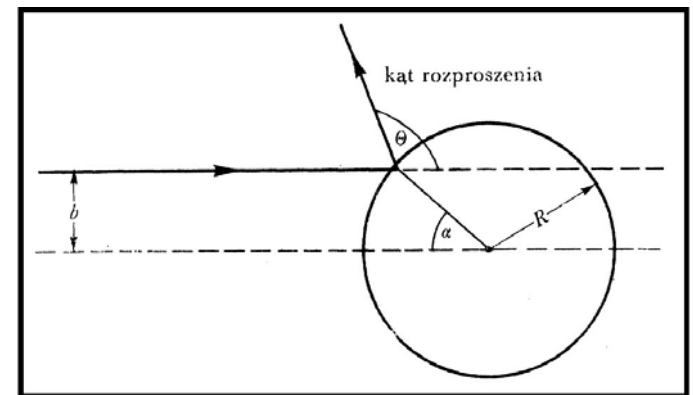
Różniczkowy przekrój czynny cd.

Przykład: rozpraszanie małej kulki (punktu materialnego) na sprężystej kuli o promieniu R



Wszystkie cząstki padające przechodzące przez pierścień o parametrach zderzenia pomiędzy b a $b+db$ rozpraszają się do kąta $\langle \theta, \theta+d\theta \rangle$. Związek między Kątem a parametrem zderzenia:

$$b = R \sin \alpha = R \sin \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2}$$



cd... Rozpraszanie na kuli

Niech strumień padających punktów materialnych wynosi N .

Wtedy:

$$dN = 2\pi b N db$$

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = 2\pi b |db| = 2\pi R \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{R}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} \sin \theta d\theta = \frac{R^2}{4} d\Omega; \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} = \text{const}$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi d \cos \theta = \frac{\pi R^2}{2} 2 = \pi R^2$$

Rozkład
kątowy jest
izotropowy

Całkowity przekrój czynny jest, zgodnie z intuicją, przekrojem poprzecznym kuli

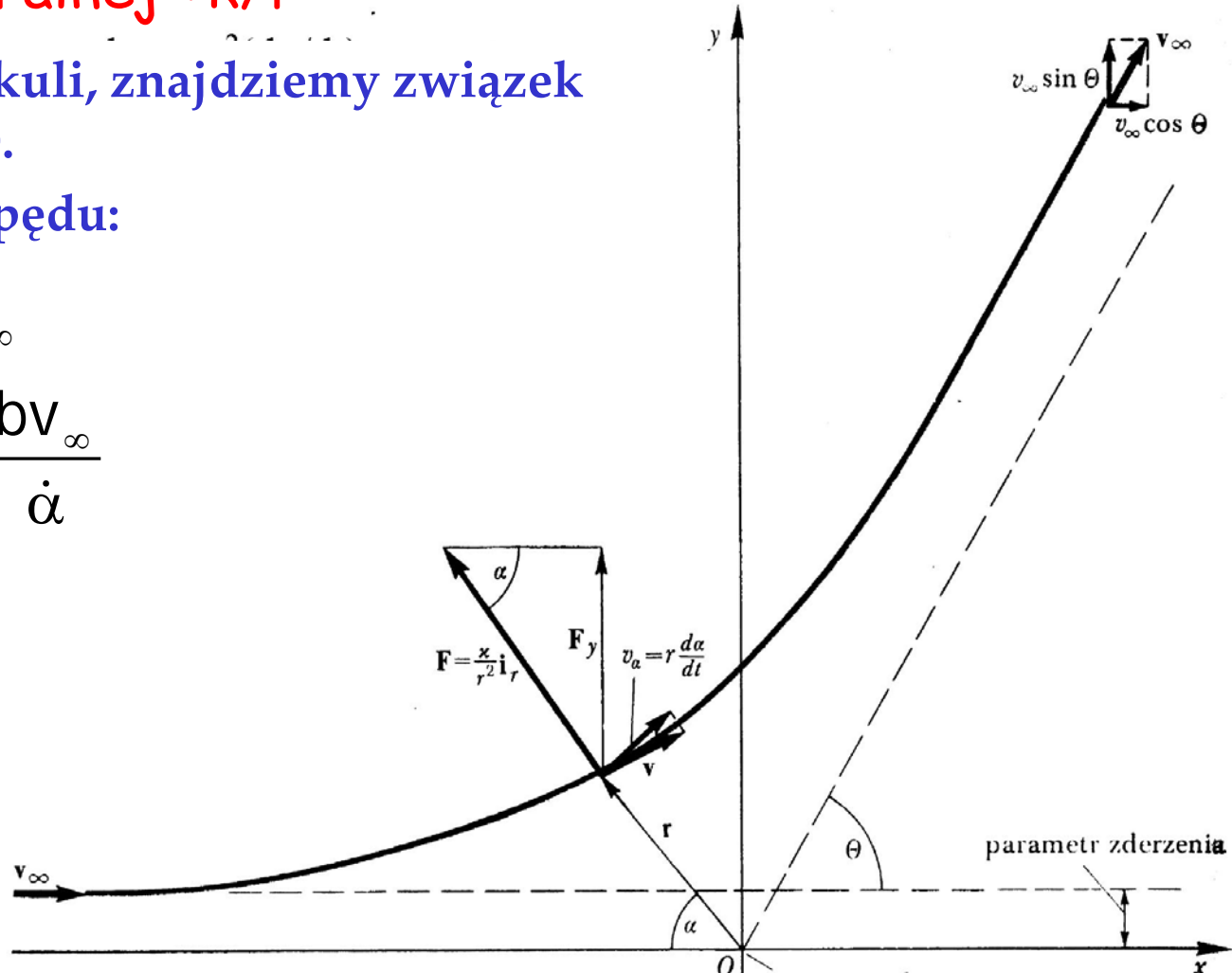
Rozpraszanie w polu siły centralnej $+k/r^2$

Podobnie jak dla kuli, znajdziemy związek między db i $d\cos\theta$.

Z całki momentu pędu:

$$L = \mu r^2 \dot{\alpha} = \mu b v_{\infty}$$

$$b = \frac{r^2 \dot{\alpha}}{v_{\infty}}; \quad r^2 = \frac{b v_{\infty}}{\dot{\alpha}}$$



$$F = k/r^2 \text{ cd...}$$

Niech gęstość jąder atomowych w folii wynosi n . W tarczy o grubości x znajduje się nx jąder na jednostkę powierzchni.

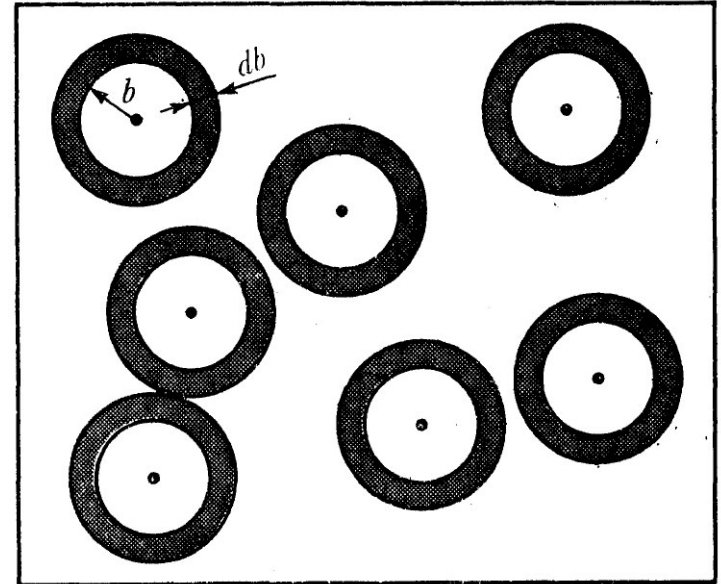
Strumień cząstek padających na folię: N .
Mamy:

$$\frac{dN}{N} = \frac{nx \cdot 2\pi b |db|}{1}; \quad |db| = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \frac{1}{\sin^2 \theta/2} d\theta$$

$$dN = Nnx \cdot 2\pi \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \text{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \frac{1}{\sin^2 \theta/2} d\theta =$$

$$= \left(\frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 Nnx \frac{2\pi}{4 \sin^4 \theta/2} d\cos \theta$$

$$\frac{dN}{d\Omega} = \left(\frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{Nnx}{4 \sin^4 \theta/2}; \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \theta/2}$$



VII Bryła sztywna

1. Pojęcia podstawowe.
2. Obroty bryły sztywnej dookoła ustalonej osi. Moment bezwładności. Twierdzenie o osiach równoległych
3. Równania ruchu bryły sztywnej. Tensor momentu bezwładności
4. Obroty bryły sztywnej dookoła osi swobodnych. Równania Eulera
5. Zastosowania 1: baki (żyroskopy): swobodny i ważki
6. Zastosowania 2: Ziemia jako bak. Precesja osi ziemskiej
7. Zastosowania 3: Żyroskop na obracającej się Ziemi; Żyrokompas
8. Zastosowania 4: Kamień celtycki

Równanie ruchu obrotowego dookoła ustalonej osi

W tym szczególnym przypadku wektory \mathbf{M} , \mathbf{L} i $\boldsymbol{\omega}$ skierowane są wzdłuż jednej prostej- osi obrotu:

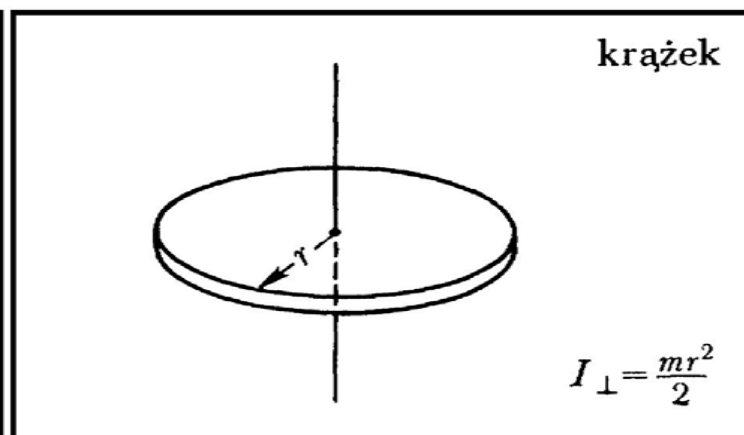
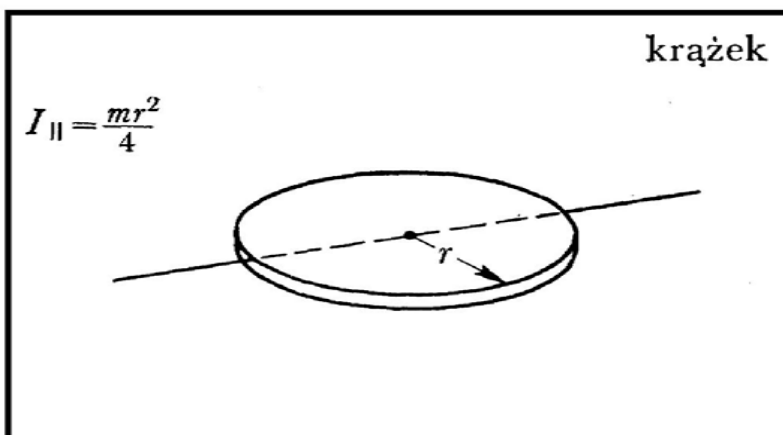
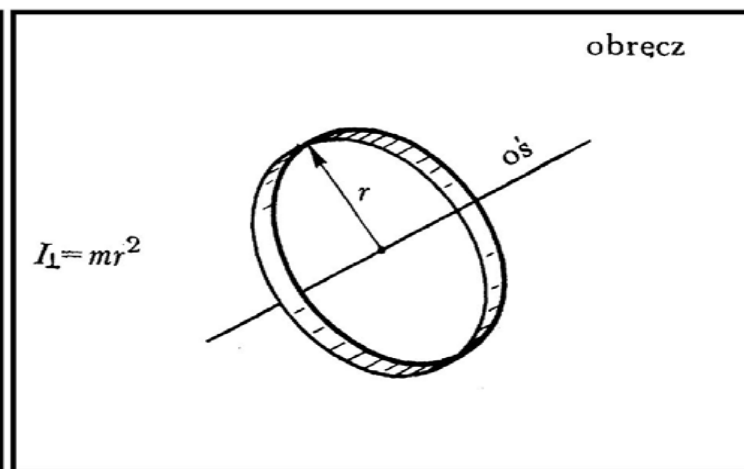
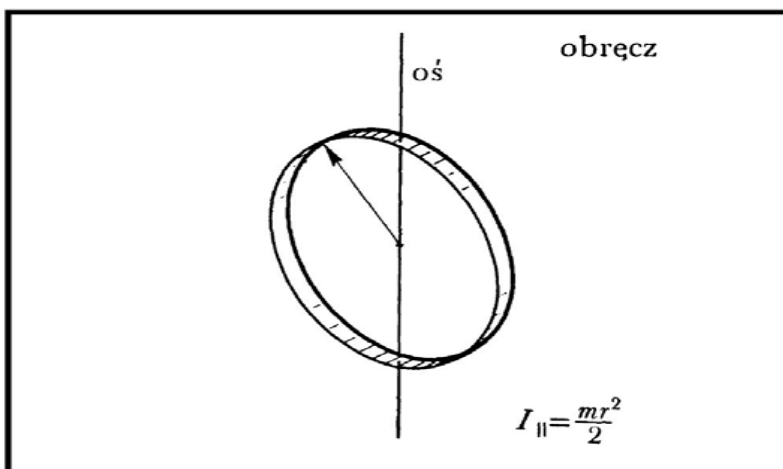
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{L} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \dot{\omega} = I \varepsilon$$

Równanie ruchu postępowego:

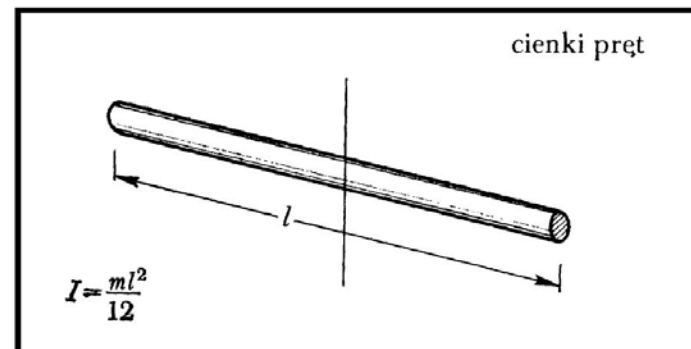
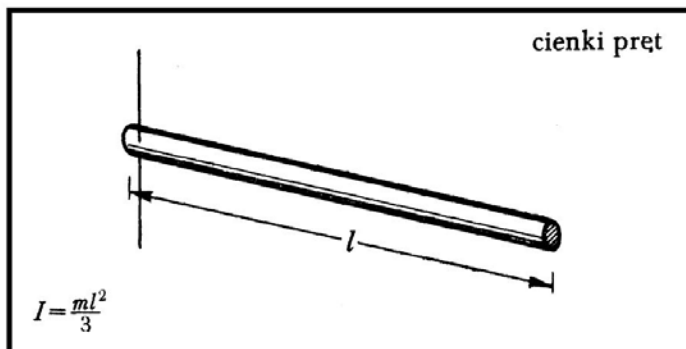
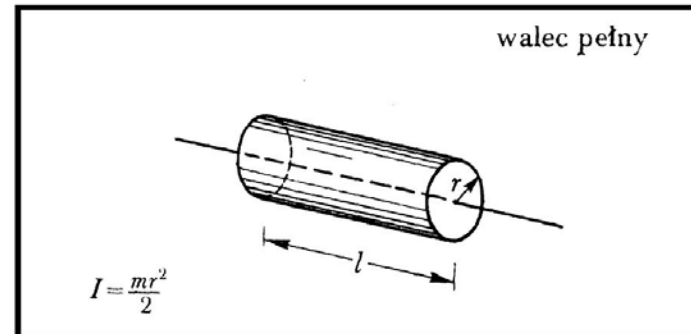
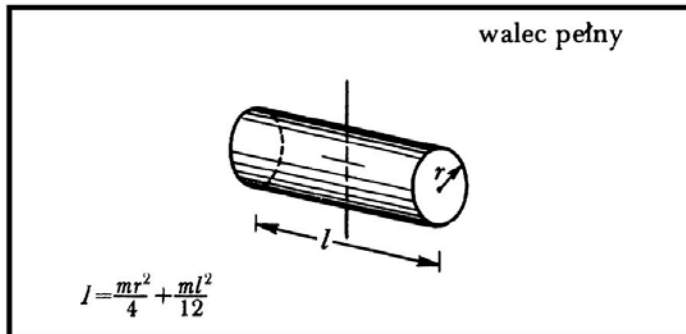
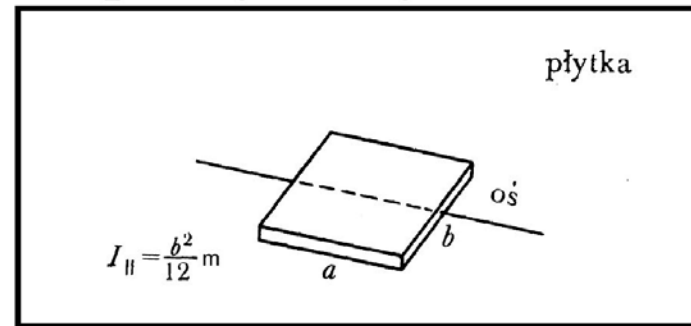
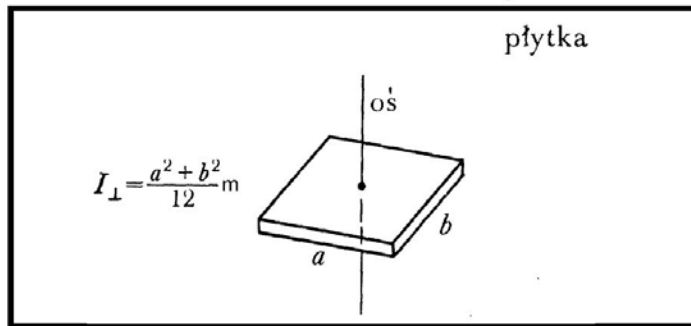
$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Momenty bezwładności

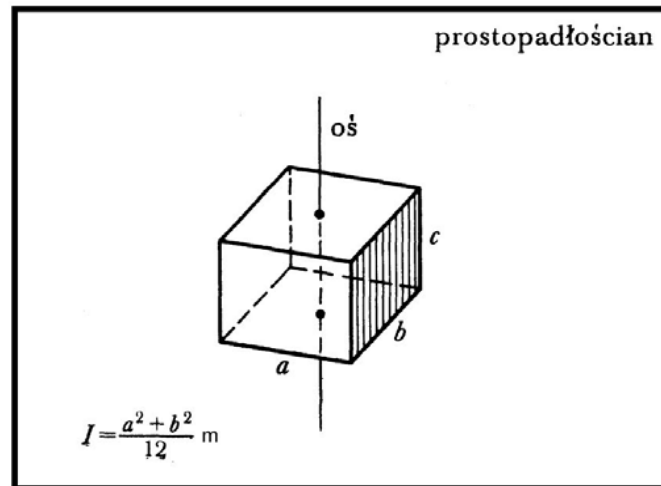
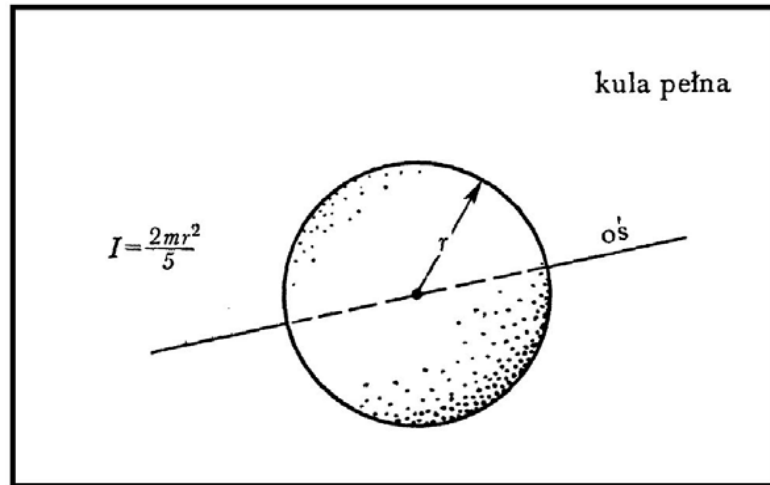
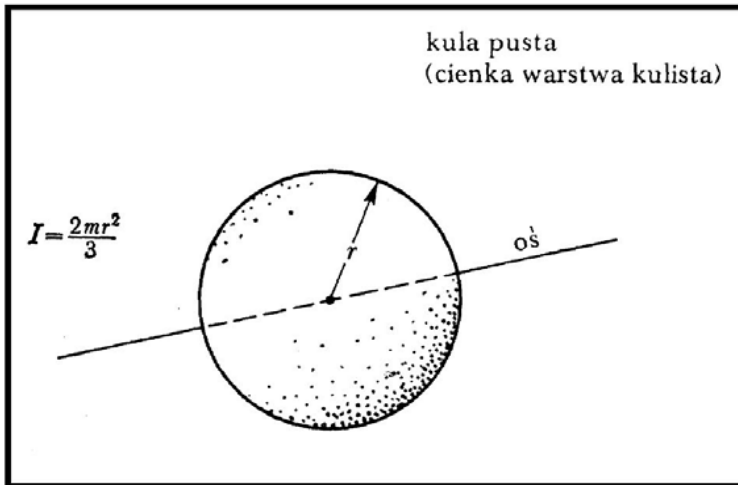
Momenty bezwładności prostych brył



Momenty bezwładności prostych brył



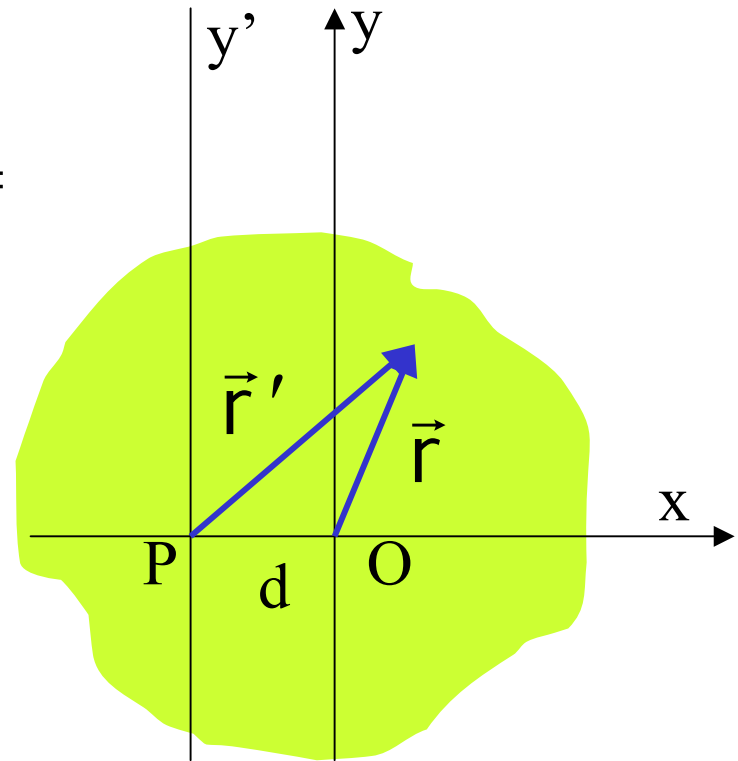
Momenty bezwładności prostych brył



Twierdzenie o osiach równoległych

Twierdzenie Steinera pozwala przeliczać momenty bezwładności względem dwóch równoległych osi odległych o d . Niech O będzie środkiem masy.

$$\begin{aligned}
 I^P &= \iiint dm x'^2 = \iiint dm (x + d)^2 = \\
 &= I^O + 2d \iiint dm \cdot x + d^2 \iiint dm = \\
 &= I^O + md^2
 \end{aligned}$$



Równanie ruchu bryły sztywnej

Środek masy bryły sztywnej:

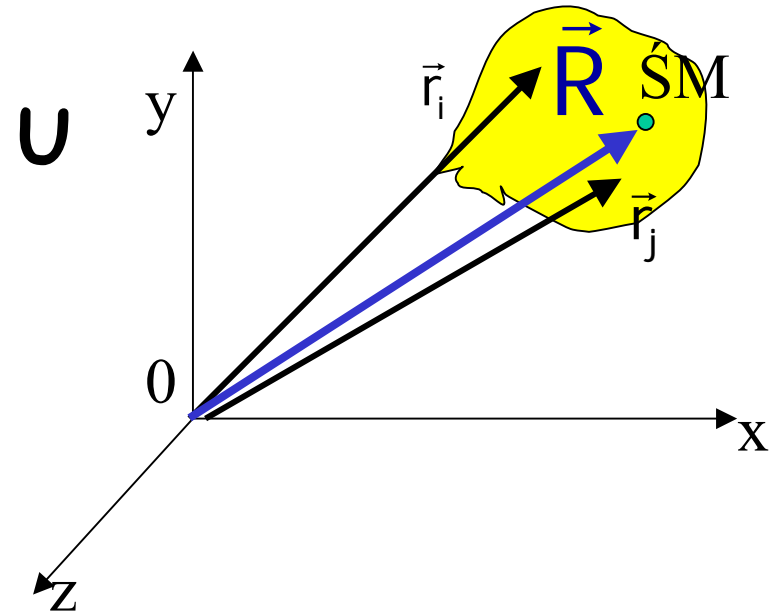
$$\vec{R} = \frac{\iiint_V \vec{r} dm}{m} = \frac{\iiint_V \vec{r} \rho(\vec{r}) d_3r}{m}$$

Całkowity pęd bryły sztywnej:

$$\vec{P} = \iiint_V \dot{\vec{r}} dm = m\dot{\vec{R}} = m\vec{V}$$

bo

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{R}; \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{R}) + \dot{\vec{R}} = \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{V} \\ \iiint_V \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) dm &= 0 \end{aligned}$$



Tensor bezwładności

W ogólnym przypadku moment pędu bryły sztywnej nie jest równoległy do wektora prędkości kątowej:

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}; \quad L_k = I_{kj}\omega_j$$

Składowe tensora bezwładności obliczone w pewnym układzie odniesienia:

$$L_k = \left[\iiint_V dm (r^2 \delta_{kj} - r_k r_j) \right] \omega_j$$

$$I_{kj} = \iiint_V dm (r^2 \delta_{kj} - r_k r_j)$$

$$I_{11} = \iiint_V dm (y^2 + z^2); I_{22} = \iiint_V dm (x^2 + z^2);$$

$$I_{33} = \iiint_V dm (x^2 + y^2)$$

$$I_{12} = -\iiint_V dm xy; \quad I_{13} = -\iiint_V dm xz; \quad I_{23} = -\iiint_V dm yz$$

cd.

Tensor bezwładności jest tensorem symetrycznym:

$$I_{kj} = I_{jk}$$

Ma 6 niezależnych składowych:

Momenty dewiacyjne

$$I = \begin{bmatrix} \iiint_V dm (y^2 + z^2) & -\iiint_V dmxy & -\iiint_V dmxz \\ -\iiint_V dmxy & \iiint_V dm (x^2 + z^2) & -\iiint_V dmyz \\ -\iiint_V dmxz & -\iiint_V dmyz & \iiint_V dm (x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

Momenty główne

Zdiagonalizowany tensor bezwładności

Tensor w postaci diagonalnej:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

Wielkości I_x , I_y , I_z nazywamy głównymi momentami bezwładności, a odpowiednie osie układu współrzędnych osiami głównymi.

Dla ciał o symetrii sferycznej wszystkie główne m.b. są sobie równe.

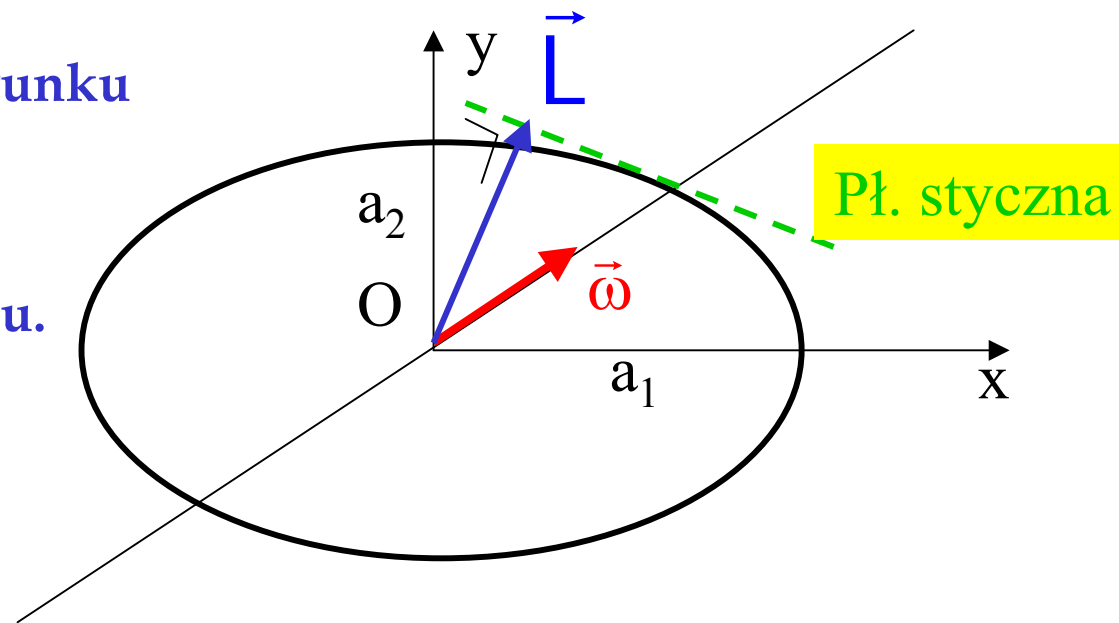
Dla ciał o symetrii obrotowej dwa z głównych m.b. są sobie równe.

Elipsoida bezwładności

Obliczmy i zdiagonalizujmy tensor m.b w układzie środka masy bryły. W tym układzie zbudujemy elipsoidę o półosiach:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{I_x}}; \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{I_y}}; \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{I_z}}$$

Sposób znajdowania kierunku wektora \mathbf{L} gdy dany jest kierunek wektora $\boldsymbol{\omega}$ jest przedstawiony na rysunku.



cd.

Ostatecznie dostajemy następujące równania ruchu w układzie U' :

$$I_{x'} \dot{\omega}_{x'} + (I_{z'} - I_{y'}) \omega_{y'} \omega_{z'} = M_{x'}$$

$$I_{y'} \dot{\omega}_{y'} + (I_{x'} - I_{z'}) \omega_{x'} \omega_{z'} = M_{y'}$$

$$I_{z'} \dot{\omega}_{z'} + (I_{y'} - I_{x'}) \omega_{x'} \omega_{y'} = M_{z'}$$

Są to równania Eulera

VIII Oddziaływania bardzo wielu ciał Elementy fizyki statystycznej

1. Pojęcia mikrostanu i makrostanu układu N punktów materialnych. Prawdopodobieństwo termodynamiczne. Entropia
2. Równowaga: rozkład Boltzmannna
3. Twierdzenie o wiriale i jego zastosowania: ciśnienie gazu i ruchy Browna
4. **Strzałka czasu w fizyce statystycznej: twierdzenie H Boltzmannna**