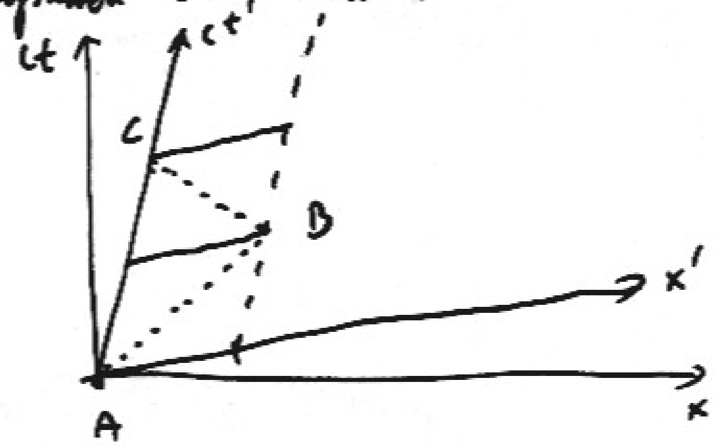
## Zadanie 2 (A)

Rysunek do zadania:




ZDARZENIA

A - wysłanie światła przez źródło

B - odbicie światła przez lustro

C - powrót światła do źródła

UKŁADY: $U$ - związany z obserwatorem, $U'$ - związany z pętem

| | $U'$ | $U$ |
|---|---|---|
| A | $(ct'_A, x'_A) = (0,0)$ | $(ct_A, x_A) = (0,0)$ |
| B | $(ct'_B, x'_B) = (L,L)$ | $(ct_B, x_B) = (\gamma L(1+\beta), \gamma L(1+\beta))$ |
| C | $(ct'_C, x'_C) = (2L,0)$ | $(ct_C, x_C) = (2\gamma L, 2\gamma\beta L)$ |

ODSTĘPY CZASU:

$c\Delta t'_{BA} = c(t'_B - t'_A) = L$ $\qquad$ $c\Delta t_{BA} = \gamma L(1+\beta)$

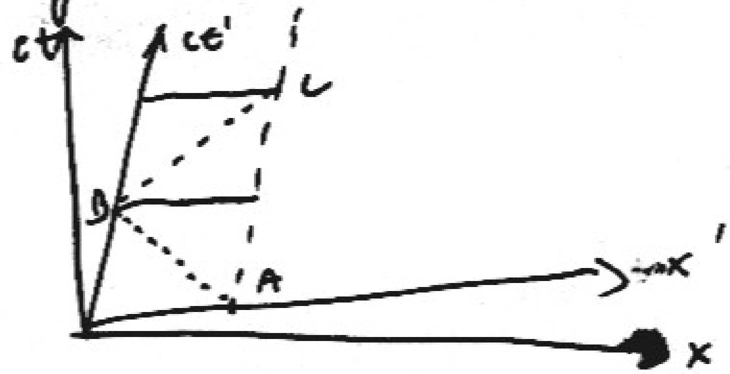
$c\Delta t'_{CB} = c(t'_C - t'_B) = L$ $\qquad$ $c\Delta t_{CB} = \gamma L(1-\beta)$

CAŁKOWITA DROGA W $U$:

$$S_U = c\cdot(t_C - t_A) = 2\gamma L \xrightarrow[\gamma\to 1]{} 2L$$

## Zadanie 2 (B)

Rysunek do zadania:




ZDARZENIA

A - wysłanie światła przez źródło

B - odbicie światła przez lustro

C - powrót światła do źródła

UKŁADY: $\mathcal{U}$ - związany z obserwatorem, $\mathcal{U}'$ - związany z prętem

| | $\mathcal{U}'$ | $\mathcal{U}$ |
|---|---|---|
| A | $(ct'_A, x'_A) = (0, L)$ | $(ct_A, x_A) = (\gamma\beta L, \gamma L)$ |
| B | $(ct'_B, x'_B) = (L, 0)$ | $(ct_B, x_B) = (\gamma L, \gamma\beta L)$ |
| C | $(ct'_C, x'_C) = (2L, L)$ | $(ct_C, x_C) = (\gamma L(2+\beta), \gamma L(2\beta+1))$ |

ODSTĘPY CZASU:

$c\Delta t'_{BA} = c(t'_B - t'_A) = L$ $\qquad$ $c\Delta t_{BA} = \gamma L(1-\beta)$

$c\Delta t'_{CB} = c(t'_C - t'_B) = L$ $\qquad$ $c t_{CB} = \gamma L(1+\beta)$

CAŁKOWITA DROGA W U:

$$S_U = c(t_C - t_A) = 2\gamma L \xrightarrow[\gamma \to 1]{} 2L$$

## Zad 3A

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{bt} + e^{-bt}\right) \qquad y(t) = \frac{1}{4}\left(e^{bt} - e^{-bt}\right) \quad ; \; b>0$$

a) tor ruchu:

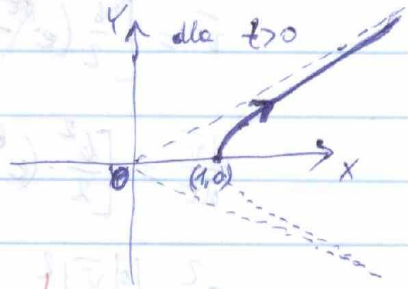
$$2x = e^{bt} + e^{-bt} \quad ; \quad 4y = e^{bt} - e^{-bt}$$

$$(2x)^2 = e^{2bt} + 2 + e^{-2bt} \quad ; \quad (4y)^2 = e^{2bt} - 2 + e^{-2bt}$$

odejmując stronami: $(2x)^2 - (4y)^2 = 4$

$$\boxed{x^2 - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \qquad x^2 - (2y)^2 = 1}$$ — równanie przedstawia hiperbolę

1pkt




b) składowa $\bar{V}$ styczna do toru: $\boxed{\bar{V} = V_t \bar{e}_t}$

$$V_t = |\bar{V}|$$

$$\bar{V} = [\dot{x}, \dot{y}] \qquad \dot{x}(t) = \frac{b}{2}\left(e^{bt} - e^{-bt}\right) = 2b \cdot y(t)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{b}{4}\left(e^{bt} + e^{-bt}\right) = \frac{b}{2} \cdot x(t)$$

$$\bar{V} = \left[\frac{b}{2}\left(e^{bt} - e^{-bt}\right); \frac{b}{4}\left(e^{bt} + e^{-bt}\right)\right] \quad , \quad \bar{V} = \frac{b}{2}[4y, x]$$

$$|\bar{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(2b)^2 \cdot y^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot x^2} = b \cdot \sqrt{(2y)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= b \cdot \sqrt{\underbrace{x^2 - 1}_{(2y)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = b\sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 1} = b \cdot \sqrt{\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4}\left(e^{bt} + e^{-bt}\right)^2 - 1}$$

$$\boxed{V_t = |\bar{V}| = b \cdot \sqrt{\frac{5}{16}\left(e^{bt} + e^{-bt}\right)^2 - 1} = \frac{b}{4}\sqrt{5e^{2bt} + 5e^{-2bt} - 6}}$$ 1pkt

wersor styczny:
$$\boxed{\bar{e}_t = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|} = \frac{\left[\frac{1}{2}\left(e^{bt} - e^{-bt}\right), \frac{1}{4}\left(e^{bt} + e^{-bt}\right)\right]}{\sqrt{\frac{5}{16}\left(e^{bt} + e^{-bt}\right)^2 - 1}}}$$ 1pkt

(można też liczyć z definicji:
$$\bar{e}_t = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\bar{V}}{V}\Bigg)$$

c) promień krzywizny toru: $\qquad \frac{d\bar{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{e}_n$

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\bar{e}_t}{ds}\right| = \left|\frac{\frac{d\bar{e}_t}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right| = \frac{1}{V} \cdot \left|\frac{d\bar{e}_t}{dt}\right|$$

Zad 3A - c.d.

c) - metoda z definicji $\rho = \frac{1}{\left|\frac{d\bar{e}_t}{ds}\right|}$

$$\bar{e}_t = \frac{[\dot{x}, \dot{y}]}{v} = \frac{[2b\cdot y\,;\, \frac{b}{2}\cdot x]}{v} = \frac{b}{2}\cdot\frac{[4y, x]}{v}$$

$$\dot{\bar{e}}_t = \frac{b}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{4y}{v}; \frac{x}{v}\right] = \frac{b}{2}\cdot\left[\frac{4\dot{y}\cdot v - 4y\cdot\dot{v}}{v^2}; \frac{\dot{x}\cdot v - \dot{v}\cdot x}{v^2}\right]$$

$$v = \frac{b}{2}\cdot\sqrt{16y^2 + x^2} = \frac{b}{2}\sqrt{e^{2bt} + e^{-2bt} - 2 + \frac{1}{4}e^{2bt} + \frac{1}{4}e^{-2bt} + \frac{1}{2}} = \frac{b}{4}\cdot\sqrt{5e^{2bt} + 5e^{-2bt} - 6}$$

$\bar{v} = \frac{b}{2}[4y, x]$

$\dot{x} = 2by$

$\dot{y} = \frac{b}{2}x$

$$\dot{v} = \frac{b}{2}\cdot\frac{16\cdot 2y\cdot\dot{y} + 2x\cdot\dot{x}}{2\cdot\sqrt{16y^2 + x^2}} =$$

$$= \frac{b}{2}\cdot\frac{32\cdot y\cdot \frac{b}{2}x + 2x\cdot 2by}{2\cdot\sqrt{16y^2 + x^2}} = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{16xy + 4xy}{2\sqrt{16y^2 + x^2}} =$$

$$= b^2\cdot\frac{5xy}{\sqrt{16y^2 + x^2}}$$

$$\dot{\bar{e}}_t = \frac{b}{2}\cdot\left[\frac{4\cdot\frac{b}{2}\cdot x\cdot\frac{b}{2}\sqrt{\phantom{x}} - 4y\cdot\frac{5xyb^2}{\sqrt{\phantom{x}}}}{\frac{b^2}{4}(16y^2+x^2)}\ (\times 2); \frac{2by\cdot\frac{b}{2}\cdot\sqrt{\phantom{x}} - \frac{b^2\cdot 5xy}{\sqrt{\phantom{x}}}\cdot x}{\frac{b^2}{4}(16y^2+x^2)}\ (\times 2)\right] =$$

$$= \frac{1}{(16y^2+x^2)^{3/2}}\cdot\left[2bx\cdot(16y^2+x^2) - 40xy^2b\,;\, 2by\cdot(16y^2+x^2) - 10bx^2y\right] =$$

$$= \frac{1}{(16y^2+x^2)^{3/2}}\cdot\left[2bx\,(16y^2+x^2-20y^2)\,;\, 2by\,(16y^2+x^2-5x^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{(16y^2+x^2)^{3/2}}\cdot\left[2bx\cdot\underbrace{(x^2-4y^2)}_{=1}\,;\, 2by\cdot(-4)\cdot\underbrace{(x^2-4y^2)}_{=1}\right] = \frac{2b}{(16y^2+x^2)^{3/2}}\cdot[x, -4y] \quad \perp \bar{e}_t$$

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\bar{e}_t}{ds}\right| = \left|\frac{\dot{\bar{e}}_t}{\dot{s}}\right| = \frac{|\dot{\bar{e}}_t|}{v} = \frac{2b}{(16y^2+x^2)^{3/2}}\cdot\cancel{\sqrt{x^2+16y^2}}\cdot\frac{1}{\frac{b}{2}\cancel{\sqrt{16y^2+x^2}}} = \frac{4}{(16y^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{(16y^2+x^2)^{3/2}}{4}}$$

$$\lim_{t\to\infty}\rho(t) = \lim_{x,y\to\infty}\rho = \infty$$

1 pkt

$4y^2 = x^2 - 1$ $\qquad \rho = \frac{(5x^2-4)^{3/2}}{4}$

– w granicy $t\to\infty$ ruch odbywa się po prostej

1 pkt

Zad 3A – c.d.

c) metoda ze wzorem $a_n = \frac{v^2}{\varrho}$

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{\varrho}\bar{e}_n \quad , \quad a_n^2 = a^2 - a_t^2 \quad , \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right|$$

$$\bar{v} = [\dot{x}, \dot{y}] = \left[2by, \frac{b}{2}x\right] = \frac{b}{2}[4y, x]$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{b}{2}\cdot[4\dot{y}, \dot{x}] = \frac{b}{2}\cdot\left[4\cdot\frac{b}{2}x, 2by\right] = b^2\cdot[x, y]$$

$$a^2 = b^4(x^2+y^2) = b^4\cdot\left[\frac{1}{4}\left(e^{2bt}+2+e^{-2bt}\right)+\frac{1}{16}\left(e^{2bt}-2+e^{-2bt}\right)\right] = \frac{b^4}{16}\left(5e^{2bt}+5e^{-2bt}+6\right)$$

$$v = \frac{b}{2}\sqrt{16y^2+x^2} \;; \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{b}{2}\cdot\frac{16\cdot 2y\dot{y}+2x\dot{x}}{2\sqrt{16y^2+x^2}} =$$

$$= \frac{b}{2}\cdot\frac{16\cdot 2y\cdot\frac{b}{2}x + 2x\cdot 2by}{2\cdot\sqrt{16y^2+x^2}} = \frac{b}{4}\cdot\frac{16bxy+4bxy}{\sqrt{16y^2+x^2}} =$$

$$= \frac{5b^2xy}{\sqrt{16y^2+x^2}}$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = b^4(x^2+y^2) - \frac{25b^4x^2y^2}{16y^2+x^2} = b^4\,\frac{(x^2+y^2)(16y^2+x^2)-25x^2y^2}{16y^2+x^2} =$$

$$= b^4\cdot\frac{16x^2y^2+16y^4+x^4+x^2y^2-25x^2y^2}{16y^2+x^2} = \frac{b^4}{16y^2+x^2}\cdot\left(x^4+16y^4-8x^2y^2\right) =$$

$$= \frac{b^4}{16y^2+x^2}\cdot\underbrace{\left(x^2-4y^2\right)^2}_{=1} = \frac{b^4}{16y^2+x^2}$$

$$\boxed{\varrho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\frac{b^2}{4}\cdot\left(16y^2+x^2\right)}{b^2\cdot\left(\sqrt{16y^2+x^2}\right)^{-1}} = \frac{\left(16y^2+x^2\right)^{3/2}}{4}}$$

1pkt

$$\lim_{t\to\infty}\varrho(t) = \lim_{x,y\to\infty}\varrho = \infty$$ – w granicy $t\to\infty$ ruch jest po prostej

1pkt

Rachunki są prostsze przy skorzystaniu z funkcji hiperbolicznych.

Zad 3B

$$x(t)=\frac{1}{3}\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right), \quad y(t)=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right); \quad \alpha>0$$

a) tor ruchu

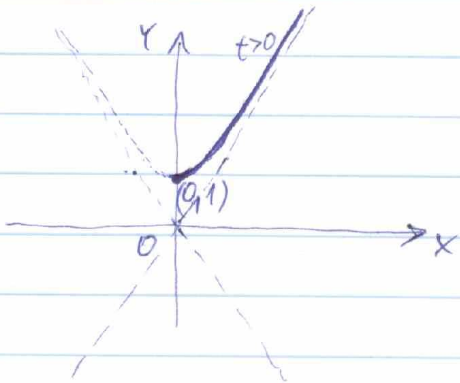
$$3x = e^{\alpha t}-e^{-\alpha t} \qquad 2y = e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}$$

$$(3x)^2 = e^{2\alpha t}-2+e^{-2\alpha t} \qquad (2y)^2 = e^{2\alpha t}+2+e^{-2\alpha t}$$

odejmując stronami: $9x^2-4y^2=-4$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{9}{4}x^2-y^2&=-1\\ \frac{x^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}-y^2&=-1\end{aligned}}$$

– równanie przedstawia hiperbolę




1pkt

Inna metoda:

$$x=\frac{2}{3}\sinh\alpha t \quad , \quad y=\cosh\alpha t$$

z tożsamości $\cosh^2 A-\sinh^2 A=1$ mamy $y^2-\frac{x^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$

b) składowa $\vec{V}$ styczna do toru: $\bar{V}=V_t\bar{e}_t$, $V_t=|\bar{V}|$

$$|\bar{V}|=\left|[\dot{x},\dot{y}]\right| \qquad \dot{x}=\frac{\alpha}{3}\cdot\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right)=\frac{2}{3}\alpha\cdot y$$

$$\dot{y}=\frac{\alpha}{2}\cdot\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)=\frac{3}{2}\alpha\cdot x$$

$$V_t=|\bar{V}|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\underline{\alpha\cdot\sqrt{\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2}}=\underline{\frac{2}{3}\alpha\sqrt{y^2+\left(\frac{9}{4}x\right)^2}}=$$

$$=\frac{2}{3}\alpha\cdot\sqrt{\frac{9}{4}x^2+1+\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}x^2}=\frac{2}{3}\alpha\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x^2+\frac{4}{9}+\frac{9}{4}x^2}=\underline{\alpha\cdot\sqrt{\frac{13}{4}x^2+\frac{4}{9}}}=$$

$$=\alpha\cdot\sqrt{\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{9}\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)^2+\frac{4}{9}}=\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{13}{4}\left(e^{2\alpha t}+e^{-2\alpha t}\right)-\frac{5}{2}}=$$

$$=\underline{\frac{\alpha}{6}\cdot\sqrt{13e^{2\alpha t}+13e^{-2\alpha t}-10}}=\underline{\frac{\alpha}{3}\cdot\sqrt{\frac{13}{2}\cosh 2\alpha t-\frac{5}{2}}}$$

1pkt

– rozwiązanie można pozostawić np. w każdej z podkreślonych postaci

wersor styczny:
$$\boxed{\bar{e}_t=\frac{\bar{V}}{|\bar{V}|}=\frac{\left[\frac{1}{3}\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right);\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)\right]}{\frac{1}{6}\sqrt{13e^{2\alpha t}+13e^{-2\alpha t}-10}}}$$

1pkt

$\boxed{2013B - c.d.1}$

c) promień krzywizny toru

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\bar{e}_t}{ds}\right| = \left|\frac{\frac{d\bar{e}_t}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right| = \frac{1}{V}\cdot\left|\frac{d\bar{e}_t}{dt}\right|$$

$$\bar{e}_t = \frac{[\dot{x}, \dot{y}]}{V} = \alpha\cdot\frac{[\frac{2}{3}y, \frac{3}{2}x]}{V}$$

$$\dot{\bar{e}}_t = \alpha\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{2y}{3V}; \frac{3x}{2V}\right] = \alpha\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{\dot{y}V - y\dot{V}}{V^2}; \frac{3}{2}\cdot\frac{\dot{x}V - x\dot{V}}{V^2}\right]*$$

$$V = \alpha\cdot\sqrt{\frac{4}{9}y^2 + \frac{9}{4}x^2}$$

$$\dot{V} = \alpha\cdot\frac{\frac{4}{9}\cdot 2y\dot{y} + \frac{9}{4}\cdot 2x\dot{x}}{2\sqrt{\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2}} = \alpha\cdot\frac{\frac{4}{9}\cdot 2y\cdot\frac{3}{2}\alpha x + \frac{9}{4}\cdot 2x\cdot\frac{2}{3}\alpha y}{2\sqrt{\phantom{x}}} =$$

$$= \alpha\cdot\frac{\frac{4}{3}\alpha xy + 3\alpha xy}{2\cdot\sqrt{\phantom{x}}} = \frac{13}{6}\frac{\alpha^2 xy}{\sqrt{\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2}} = \frac{13}{6}\cdot\frac{\alpha^3 xy}{V}$$

$$\dot{\bar{e}}_t = \alpha\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}\alpha x\cdot V - y\cdot\frac{13}{6}\frac{\alpha^3 xy}{V}}{V^2}; \frac{3}{2}\frac{\frac{2}{3}\alpha y\cdot V - x\cdot\frac{13}{6}\frac{\alpha^3 xy}{V}}{V^2}\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{V^3}\cdot\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\alpha x V^2 - \frac{13}{6}\alpha^3 xy^2\right); \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\alpha y V^2 - \frac{13}{6}\alpha^3 x^2 y\right)\right] =$$

$$= \frac{\alpha^4}{V^3}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}x\cdot\left(\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2\right) - \frac{13}{6}xy^2\right); \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}y\cdot\left(\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2\right) - \frac{13}{6}x^2y\right)\right] =$$

$$= \frac{\alpha^4}{V^3}\cdot\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}xy^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}x^3 - \frac{13}{6}xy^2\right); \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}y^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}yx^2 - \frac{13}{6}x^2y\right)\right] =$$

$$= \frac{\alpha^4}{V^3}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}xy^2 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{13}{9}xy^2; \frac{4}{9}y^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}yx^2 - \frac{13}{4}x^2y\right] =$$

$$= \frac{\alpha^4}{V^3}\cdot\left[x\cdot\left(\frac{4}{9}y^2 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{13}{9}y^2\right); y\left(\frac{4}{9}y^2 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{13}{4}x^2\right)\right] =$$

$$= \frac{\alpha^4}{V^3}\cdot\left[x\cdot\underbrace{\left(\frac{9}{4}x^2 - y^2\right)}_{=-1}; y\cdot\underbrace{\left(\frac{4}{9}y^2 - x^2\right)}_{=\frac{4}{9}\cdot 1}\right] = \frac{\alpha^4}{V^3}\cdot\left[-x; \frac{4}{9}y\right] \perp \bar{e}_t$$

Zad 3B – c.d. 2

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v}\cdot\left|\frac{d\bar{e}_t}{dt}\right| = \frac{1}{v}\cdot\frac{\alpha^4}{v^3}\cdot\sqrt{x^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2 y^2} = \frac{\alpha^4}{v^4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}x^2+\frac{4}{9}y^2} =$$

$$= \frac{\alpha^4}{\alpha^4\left(\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2\right)^2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}x^2+\frac{4}{9}y^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2\right)^{3/2}}$$

$$\rho = \underline{\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2\right)^{3/2}} = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(e^{2\alpha t}+2+e^{-2\alpha t}\right)+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{9}\left(e^{2\alpha t}-2+e^{-2\alpha t}\right)\right]^{3/2} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right)\left(e^{2\alpha t}+e^{-2\alpha t}\right)+\frac{2}{9}-\frac{2}{4}\right]^{3/2} = \frac{3}{2}\left(\frac{13}{36}\left(e^{2\alpha t}+e^{-2\alpha t}\right)-\frac{10}{36}\right)^{3/2} =$$

$$= \underline{\frac{3}{2}\cdot\frac{\left[13\left(e^{2\alpha t}+e^{-2\alpha t}\right)-10\right]^{3/2}}{6^3}}$$

Inne wyrażenia: $\rho = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2\right)^{3/2} = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\cosh^2\alpha t+\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{9}\sinh^2\alpha t\right)^{3/2} =$

$$= \underline{\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\cosh^2\alpha t+\sinh^2\alpha t\right)^{3/2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\cosh^2\alpha t+\cosh^2\alpha t-1\right)^{3/2} =$$

$$= \underline{\frac{3}{2}\left(\frac{13}{9}\cosh^2\alpha t-1\right)^{3/2}}$$

1 pkt – można było pozostawić wynik w np. każdej z podkreślonych postaci

Można było także liczyć $\rho$ korzystając ze wzorów:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2-a_t^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{\left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right|^2-\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}$$

lub ze wzoru: $\rho = \frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}$ (zb. zadań Hennel, Krzyżanowski, Szuszkiewicz, Wódkiewicz cz. 1, str 12)

$$\lim_{t\to\infty}\rho = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}y^2+\frac{9}{4}x^2\right)^{3/2} = \infty$$

– oznacza to, że asymptotycznie (w granicy $t\to\infty$) ruch odbywa się po prostej

1 pkt

Rachunki są prostsze przy skorzystaniu z funkcji hiperbolicznych.

Zad. 4 | Grupa A | Przykładowe rozwiązanie zadania.

- 

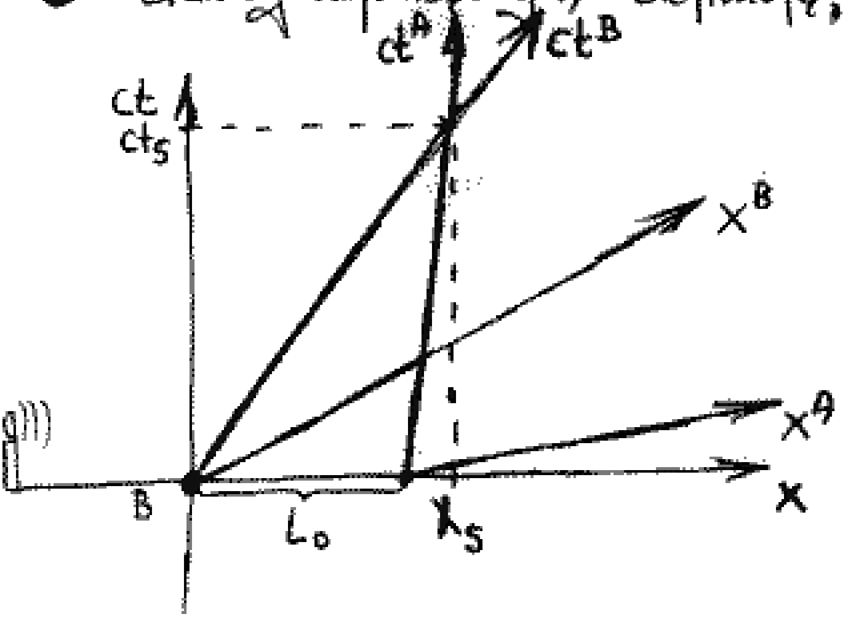

Zgodnie ze wzorem opisującym efekt Dopplera,

$$f_{A,B} = f_0\sqrt{\frac{1-\beta_{A,B}}{1+\beta_{A,B}}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f_{A,B}}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{f_{A,B}}{f_0}\right)^2\beta_{A,B} = 1-\beta_{A,B}$$

$$\Rightarrow \underline{\beta_{A,B} = \frac{f_0^2 - f_{A,B}^2}{f_0^2 + f_{A,B}^2}} \qquad (1\ \text{pkt})$$

- Układy współrzędnych definiuję, jak na rysunku [UWAGA: istnieje tu pewna dowolność]




gdzie $(ct, x)$ – w układzie latarni
$(ct^A, x^A)$ – w układzie rakiety A
$(ct^B, x^B)$ – w układzie rakiety B
$(ct_S, x_S)$ – zdarzenie spotkania rakiet w ukł. latarni

(dobrze narysowany rysunek: 1 pkt
brak rysunku, ale logiczna ciągłość i dobry opis: 1 pkt)

- Poniżej obliczenia przeprowadzone w układzie latarni.
[można również w układzie rakiety B]
– odcinek przemierzony p/każdą z rakiet w czasie $t \in (0, t_S)$:

$$\beta_B c t_S = L_0 + \beta_A c t_S$$

$$\Rightarrow \underline{t_S = \frac{L_0}{c(\beta_B - \beta_A)}}$$

- Odstęp czasu wg rakiety B:
– wystarczy powołać się na efekt dylatacji czasu, który wynika z tr. Lorentza, np.:

$$ct_S = \gamma_B\left(ct_S^B + \beta_B \underbrace{x_S^B}_{0}\right) = \gamma_B c t_S^B \quad \Rightarrow \quad t_S^B = \frac{1}{\gamma_B} t_S, \quad \text{gdzie } \gamma_B = (1-\beta_B^2)^{-1/2}$$

– i zapisać wynik, np. w takiej formie:

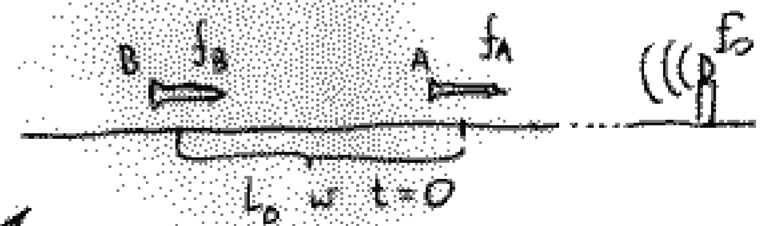
$$\underline{\begin{cases} t_S^B = \dfrac{1}{\gamma_B}\cdot\dfrac{L_0}{c(\beta_B - \beta_A)} \\ \text{gdzie } \gamma_B = (1-\beta_B^2)^{-1/2} \\ \beta_{A,B} = \dfrac{f_0^2 - f_{A,B}^2}{f_0^2 + f_{A,B}^2} \end{cases}}$$

Wynik musi posiadać jedynie wielkości podane w treści zadania

(3 pkt)

K. Rogecki, pok. 329, Hoża 69

Zad. 4 | Grupa B | Przykładowe rozwiązanie zadania | IMIĘ NAZWISKO | GR. #

- 


↙ (przykładowy rysunek)

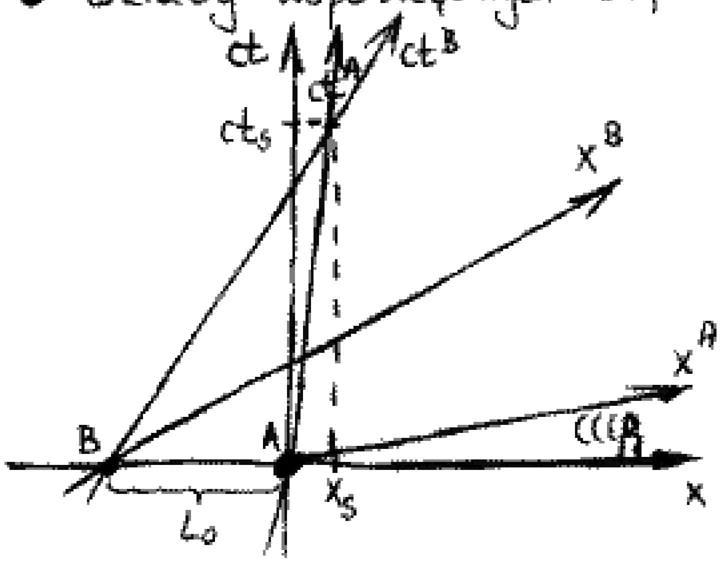
Zgodnie ze wzorem opisującym efekt Dopplera,

$$f_{A,B} = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta_{A,B}}{1-\beta_{A,B}}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f_{A,B}}{f_0}\right)^2 - \left(\frac{f_{A,B}}{f_0}\right)^2 \beta_{A,B} = 1 + \beta_{A,B}$$

$$\Rightarrow \underline{\beta_{A,B} = \frac{f_{A,B}^2 - f_0^2}{f_{A,B}^2 + f_0^2}} \qquad (1\ \text{pkt})$$

- Układy współrzędnych definiuję, jak na rysunku: [UWAGA! Istnieje tu pewna dowolność]




gdzie $(ct, x)$ - w układzie latarni

$(ct^A, x^A)$ - w układzie rakiety A

$(ct^B, x^B)$ - w układzie rakiety B

$(ct_s, x_s)$ - zdarzenie spotkania rakiet (w układzie latarni) współrzędne

(dobrze narysowany rysunek: 1 pkt
brak rysunku, ale logiczna ciągłość i dobry opis: 1 pkt)

- Poniżej obliczenia przeprowadzone w układzie latarni
[można również w układzie rakiety A]
- odcinek przemierzony p/każdą z rakiet w czasie $t \in (0, t_s)$:

$$\beta_B c t_s = L_0 + \beta_A c t_s$$

$$\Rightarrow \underline{t_s = \frac{L_0}{c(\beta_B - \beta_A)}}$$

- Odstęp czasu wg rakiety A:
- wystarczy powołać się na efekt dylatacji czasu, który wynika z tr. Lorentza, np.:

$$ct_s = \gamma_A\left(ct_s^A + \beta_A \underbrace{x_s^A}_{0}\right) = \gamma_A c t_s^A \Rightarrow t_s^A = \frac{1}{\gamma_A} t_s, \quad \text{gdzie } \gamma_A = (1-\beta_A^2)^{-1/2}$$

- i zapisać wynik, np. w takiej formie:

$$\underline{\begin{cases} t_s^A = \dfrac{1}{\gamma_A} \dfrac{L_0}{c(\beta_B - \beta_A)} \\ \text{gdzie } \gamma_A = (1-\beta_A^2)^{-1/2} \\ \beta_{A,B} = \dfrac{f_{A,B}^2 - f_0^2}{f_{A,B}^2 + f_0^2} \end{cases}}$$

Wynik musi posiadać jedynie wielkości podane w treści zadania.

K. Rusek, Hoża 69, pok. 329 (3 pkt)