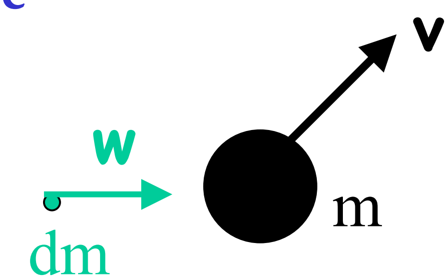
VI.5 Ruch ciała o zmiennej masie

Uogólnione równanie ruchu i prawo zachowania pędu

Cząstka P o masie m i prędkości $\mathbf{v}$ w układzie inercjalnym.

Do cząstki przyłącza się druga cząstka o Znikomo małej masie dm i prędkości $\mathbf{w}$.



Zmiana pędu układu w czasie dt:

$$d\vec{p} = \left[\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)\right]dt = (m+dm)\left(\overrightarrow{v+dv}\right) - m\vec{v} - dm\vec{w} =$$

$$\approx m d\vec{v} + dm(\vec{v} - \vec{w})$$

Siła odrzutu

Równanie ruchu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \quad m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}; \qquad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

cd.

Aby rozwiązać problem takiego ruchu musimy dodatkowo podać zależność masy od czasu m(t) oraz prędkości u od czasu u(t).

Na ogół, technika rozwiązywania r.r ciała o zmiennej masie polega na zastąpieniu różniczkowania po czasie przez różniczkowanie po masie:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dm}{dt}\frac{d}{dm} = \dot{m}\frac{d}{dm}$$

Przykład1: Ruch rakiety w stałym polu *g*

Rakieta porusza się pionowo do góry. Gazy wylatują z jej dyszy ze stałą prędkością u i w stałej ilości: dm/dt=-a.

$$\frac{dm}{dt} = -a$$

$$m(t) = m_0 - at$$

R. Ruchu w kierunku pionowym:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{au}{m}$$

$$\frac{dz}{dt} = -a\frac{dz}{dm}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = a^2\frac{d^2z}{dm^2} = -g + \frac{au}{m}$$

$$\frac{d^2z}{dm^2} = -\frac{g}{a^2} + \frac{u}{am}$$

Rakieta cd.

Całkujemy dwukrotnie względem m:

$$\frac{dz}{dm} = -\frac{g}{a^2}m + \frac{u}{a}\ln m + C_1$$

$$z(m) = -\frac{g}{2a^2}m^2 + \frac{u}{a}(m\ln m - m) + C_1 m + C_2$$

$$\text{dla } t = 0 : m(0) = m_0; z(0) = 0; v_{z0} = v_0 \neq 0$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_0 = v_0 = -a\left.\frac{dz}{dm}\right|_{m_0}; \qquad \left.\frac{dz}{dm}\right|_{m_0} = -\frac{v_0}{a}$$

$$C_1 = -\frac{v_0}{a} + \frac{g}{a^2}m_0 - \frac{u}{a}\ln m_0$$

$$C_2 = \frac{g}{2a^2}m_0{}^2 - \frac{u}{a}(m_0\ln m_0 - m_0) + C_1 m - m_0\left(-\frac{v_0}{a} + \frac{g}{a^2}m_0 - \frac{u}{a}\ln m_0\right)$$

Rakieta cd.

Wstawiając warunki początkowe:

$$\frac{dz}{dt} = v_z = v_0 + \frac{g}{a}(m - m_0) - u\ln\frac{m}{m_0}$$

$$z(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{u}{a}\left[(m_0 - at)\ln\left(1 - \frac{a}{m_0}t\right) + at\right]$$

Przykład 2: spadająca kropla

Zmiana masy kropli następuje w wyniku kondensacji bądź parowania wody z/ do otoczenia.

Badania doświadczalne pokazują, że prawo zmiany masy silnie zależy od warunków:

1. W próżni kropla odparowuje masę proporcjonalnie do swojej powierzchni ($\sim R^2$).

2. W ośrodku dla małych prędkości względnych zmiana masy jest proporcjonalna do promienia kropli R, a przy większych prędkościach proporcjonalnie do $R^{3/2}u^{1/2}$.

Dodatkowo zazwyczaj należy uwzględnić siłę oporu ośrodka.

Przyjmiemy, że przed kondensacją lub po odparowaniu para spoczywa w układzie inercjalnym tj. u=v. Zaniedbamy siłę oporu. Oś OZ kierujemy zgodnie z g.

Warunki początkowe w t=0: $z(0)=0; \quad \dot{z}(0)=0; \quad m(0)=\mu^3; \quad u=v$

Kropla cd.

Równanie ruchu:

$$\dot{v} + \frac{\dot{m}}{m} v = g$$

Pochodną logarytmiczną oznaczymy przez f(t):

$$\frac{d}{dt}\ln m = \frac{\dot{m}}{m} = f(t)$$

$$F(t) := \exp\left[\int f(t)dt\right] = m(t)$$

$$\frac{dF}{dt} = F\frac{d}{dt}\left[\int f(t)dt\right] = Ff(t) = F\frac{\dot{m}}{m}$$

Rozwiązaniem jest:

$$v(t) = \frac{g}{F}\int_0^t F(t')dt'$$

Kropla cd.

Bo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g\int F}{F}\right) = -\frac{g}{F^2}\frac{dF}{dt}\int F + \frac{gF}{F} = -\frac{gf}{F}\int F + g$$

$$+fv \quad = \qquad\qquad = \frac{gf}{F}\int F$$

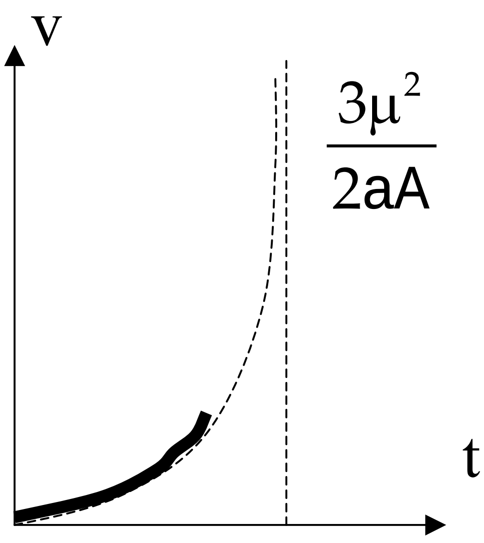
$$= \qquad\qquad g$$

Kropla cd.

a) Przyjmijmy, ze kropla paruje proporcjonalnie do powierzchni:

$$\dot{m} = -a4\pi R^2; \quad R = Am^{1/3}(t) = \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/3} m^{1/3}(t);$$

$$m(t) = \left(\mu - 4\pi a\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3} t\right)^3$$



Całka z m(t):

$$\int F(t')dt' = \int m(t')dt' = -\frac{\left(\mu - 4\pi a\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3} t\right)^4}{\left(16\pi a\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3}\right)}$$

Prowadzi do prędkości:

$$v(t) = -\frac{g}{16\pi aA^2}\left[\mu - 4\pi aA^2 t - \frac{\mu^4}{\left(\mu - 4\pi aA^2 t\right)^3}\right]$$

Kropla cd.

b) Przyjmijmy, ze na kropli następuje kondensacja proporcjonalna do promienia:

$$\dot{m} = +aR$$

Całkując masę względem czasu dostajemy:

$$m(t) = \left(\mu^2 + \frac{2}{3}aAt\right)^{3/2}$$

$$\int m = \frac{3}{5aA}\left(\mu^2 + \frac{2}{3}aAt\right)^{5/2}$$

Prędkość wynosi:

$$v(t) = \frac{3g}{5aA}\left[\mu^2 + \frac{2}{3}aAt - \frac{\mu^5}{\left(\mu^2 + \frac{2}{3}aAt\right)^{3/2}}\right] \to \frac{2gt}{5}$$