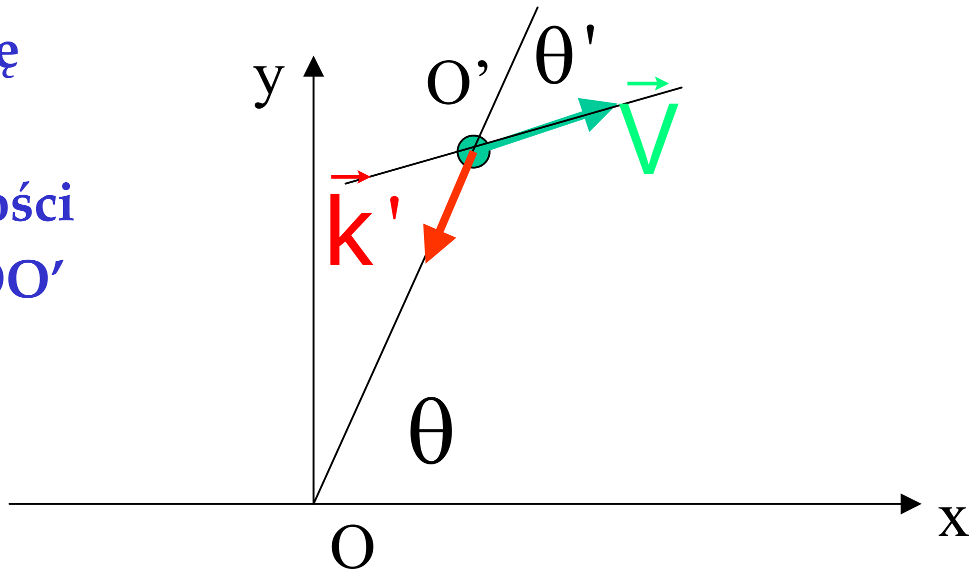
V.6.6 Pęd i energia przy prędkościach bliskich c. Zastosowania

1. **Ogólne wyrażenia na aberrację światła**
2. **Rozpad cząstki o masie M na dwie cząstki o masach m_1 i m_2**
3. **Rozpraszanie fotonów z lasera GaAs na wiązce wysokoenergetycznych elektronów z akceleratora LEP**

1. Ogólne wyrażenia na aberrację światła

Źródło światła O′ porusza się względem obserwatora O z prędkością V. Wektor prędkości tworzy kąt θ′ z kierunkiem OO′ w układzie źródła.
W układzie O′ czteropęd fotonu k'^{μ} wynosi:



$$k'^{\mu} = \left(k'_0, \vec{k}'c\right); \; k' = \left|\vec{k}\right| = k'_0 / c = h\nu' / c$$

Wektor *k′* możemy rozłożyć na składowe || i prostopadłe do wektora *V*:

$$k'_{||} = -k'\cos\theta'; \quad k_{\perp} = -k'\sin\theta'$$

cd.

Obliczymy teraz składowe czterowektora k^{μ} w układzie obserwatora O stosując transformację Lorentza do k'^{μ} :

$$k_0 = \gamma_V \left(k'_0 - \frac{V}{c} k' c \cos\theta' \right)$$

$$k_{||} c = -\gamma_V \left(k' c \cos\theta' + \frac{V}{c} k_0 \right)$$

$$k_{\perp} c = -k' c \sin\theta'$$

Prowadzi to do wyrażenia na częstość:

$$h\nu = h\nu' \gamma_V \left(1 - \frac{V}{c} \cos\theta' \right)$$

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma_V \left(1 - \frac{V}{c} \cos\theta' \right)}$$

Transformacja kąta obserwacji w O jako funkcji kąta emisji fotonu w O′ jest skomplikowana i nie będzie dyskutowana.

2. Rozpad cząstki o masie M w locie na dwie cząstki o masach m_1 i m_2

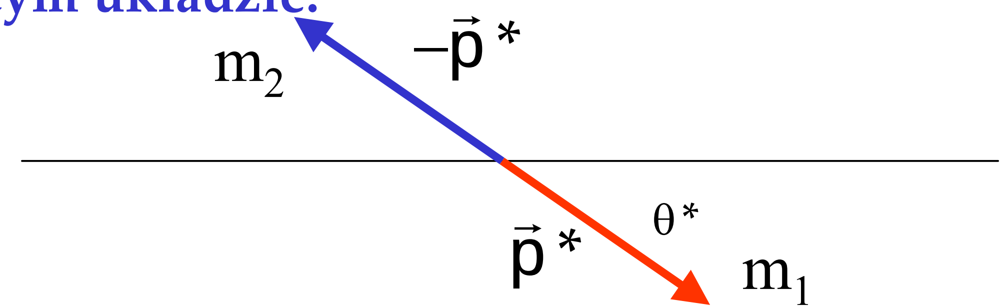
Przypuśćmy, że cząstka M ma w pewnym układzie inercjalnym pęd P skierowany wzdłuż osi OZ. Wektor czteropędu tej cząstki wynosi:

$$P^{\mu} = \left(E = \sqrt{P^2 + M^2}, 0, 0, P \right)$$

Cząstka rozpada się dwuciałowo na cząstki o masach m_1 i m_2.

Ile wynoszą energie E_1 i E_2 produktów w układzie spoczynkowym cząstki M?

Układ spoczynkowy cząstki M jest układem ŚM produktów jej rozpadu. W tym układzie:



cd...

Wektory czteropędów w układzie ŚM:

$$P^{*\mu} = (M,0,0,0);\quad p^{*}{}_{1}{}^{\mu} = \left(\sqrt{m_1{}^2 + p^2},0,0,p^*\right); p^{*}{}_{2}{}^{\mu} = \left(\sqrt{m_2{}^2 + p^2},0,0,-p^*\right)$$

Niezmiennik s:

$$s = E^{*2} = M^2 = \left(p_1{}^{*\mu} + p_2{}^{*\mu}\right)^2 = E_1{}^{*2} + E_2{}^{*2} + 2E_1{}^{*}E_2$$

Mamy także związek między energiami:

$$E^{*}{}_2{}^2 = E^{*}{}_1{}^2 + m_2{}^2 - m_1{}^2$$

co daje nam:

$$M^2 - E^{*}{}_1{}^2 - E^{*}{}_1{}^2 - m_1{}^2 + m_2{}^2 = 2E_1{}^{*}E_2$$

$$\left(M^2 - m_1{}^2 + m_2{}^2\right) - 2E^{*}{}_1{}^2 = 2E_1{}^{*}E_2$$

cd...

Podnosząc stronami do kwadratu i upraszczając dostajemy symetryczne wyrażenia energie obu produktów :

$$E^*_1 = \frac{\left(M^2 + m_1{}^2 - m_2{}^2\right)}{2M}$$

$$E^*_2 = \frac{\left(M^2 + m_2{}^2 - m_1{}^2\right)}{2M}$$

Wyrażenie na pęd produktów w układzie spoczynkowym M:

$$p^* = \frac{\sqrt{\left[M^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[M^2 - (m_1 - m_2)^2\right]}}{2M}$$

3. Rozpraszanie fotonów z lasera IR na wiązce wysokoenergetycznych elektronów z akceleratora LEP.

Zjawisko Comptona (A. Compton, Phys. Rev. 22, 409, (1923)) **:** **rozpraszanie nieelastyczne fotonów rentgenowskich na niemal swobodnych elektronach atomowych.**

W tym zjawisku zderzenie następuje w układzie LAB- elektrony są tarczami niemal w spoczynku.

Zmiana długości fali fotonów zależy tylko od kąta rozproszenia w tym układzie:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) = \lambda_C(1-\cos\theta)$$

i jest maksymalne do tyłu:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C; \qquad \lambda_C = 0.0024\ \mathrm{nm}$$

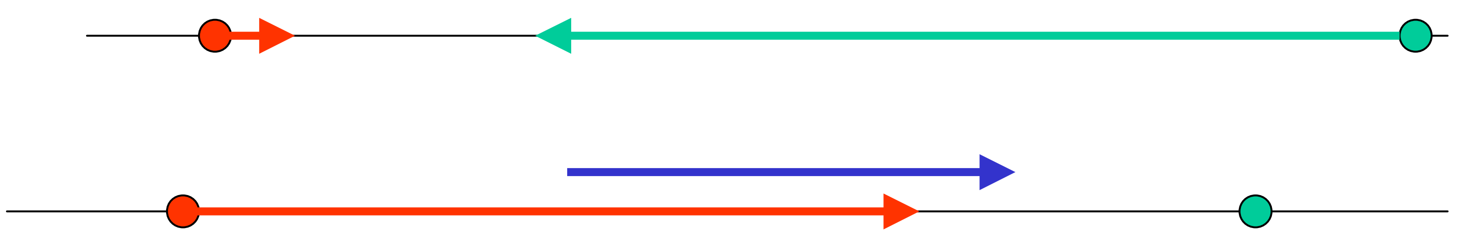
cd.

W doświadczeniu wykonywanym w CERNie czerwone fotony z lasera GaAs o długości fali 700 nm zderzały się z biegnącą im naprzeciw wiązką elektronów z akceleratora LEP o energii E_e= 45 GeV.

W układzie spoczywających elektronów (odpowiednik układu LAB w zjawisku Comptona) fotony były rentgenowskie (zjawisko Dopplera).

Przed zderzeniem:

Układ LEP O

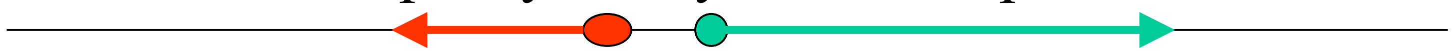


Układ spoczynkowy elektronu O’

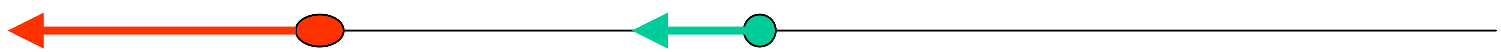
cd.

Po zderzeniu:

Układ spoczynkowy elektronu po zderzeniu



Układ LEP po zderzeniu



Jaka jest energia rozproszonego fotonu w układzie LEP?

Znajdziemy odpowiedź posługując się explicite transformacjami Lorentza.

Energia fotonów z lasera w układzie LEP

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 197.33\,\mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}}{700\mathrm{nm}} = 1.77\,\mathrm{eV}$$

Dwie metody znajdowania energii rozproszonego fotonu

Metoda I:

- Z układu LEP przechodzimy do układu ŚM.
- Obliczamy energię i pęd fotonu po zderzeniu w ŚM, korzystając z niezmiennika s.
- Transformujemy z powrotem do LEP.

Metoda II:

- Z układu LEP przechodzimy do układu spoczynkowego elektronu (odpowiednik układu LAB dla zjawiska Comptona).
- Stosujemy wzór Comptona na rozproszenie pod kątem 180 stopni.
- Transformujemy z powrotem do układu LEP

Metoda I

Czteropędy przed zderzeniem, układ LEP:

$$k^{\mu} = (E,0,0,E); \quad p^{\mu} = \left(e = \sqrt{m^2 + p^2},0,0,-p\right)$$

$$p = 45 \text{ GeV/c}; \quad m{=}0.511 \times 10^{-3} \text{ GeV/c}^2$$

Niezmiennik s:

$$s = \left(k^{\mu} + p^{\mu}\right)^2 = (E+e)^2 - (p-E)^2 = m^2 + 2Ee + 2pE \approx$$

$$\approx\sim m^2 + 4Ee - m^2 \frac{E}{e} \approx m^2 + 4Ee = 5.79721 \cdot 10^{11} \, eV^2$$

$$\sqrt{s} = 761395 \, eV$$

Układ ŚM- czynniki Lorentza:

$$\gamma = \frac{E+e}{\sqrt{s}} \approx \frac{e}{\sqrt{s}} = 59102; \quad \beta = \frac{E-p}{E+e} \approx\sim -1; \quad \gamma\beta = \frac{E-p}{\sqrt{s}} \approx \gamma$$

Metoda I cd.

W ŚM przed zderzeniem:

$$k^{*\mu} = (E',0,0,E'); \quad p^{*\mu} = \left(e' = \sqrt{m^2 + p'^2},0,0,-p'\right)$$

Po zderzeniu:

$$k'^{*\mu} = (E',0,0,-E'); \quad p^{*\mu} = \left(e' = \sqrt{m^2 + E'^2},0,0,E'\right)$$

Metoda I cd.

Niezmiennik s obliczany w ŚM po zderzeniu:

$$s = (E' + e')^2 = E'^2 + 2E'e' + e'^2 = E'^2 + 2E'e' + m^2 + E'^2$$

$$s - \left(2E'^2 + m^2\right) = 2E'e'$$

$$\left[s - \left(2E'^2 + m^2\right)\right]^2 = 4E'^2 e'^2 = 4E'^4 + 4E'^2 m^2$$

$$s^2 + m^4 - 2sm^2 = 4sE'^2$$

$$E'^2 = \frac{\left(s - m^2\right)^2}{4s}; \qquad E' = \frac{1}{2}\frac{s - m^2}{\sqrt{s}} = \left|s = m^2 + 4Ee\right| = \frac{2Ee}{\sqrt{m^2 + 4Ee}}$$

$$\boxed{E' = 209221.2\ \text{eV}}$$

Metoda I cd.

Wracamy ze ŚM do LEP:

$$E'' = \gamma\left(E' + \beta E'\right) = E' \cdot 2\gamma = 2E'\frac{e+E}{\sqrt{s}} \approx \frac{2e}{\sqrt{s}}E' = 24.73\mathrm{GeV}$$

Metoda II. czterowektory energii-pędu przed i po zderzeniu

Przed, układ LEP:

$$k^{\mu} = (E,0,0,E); \quad p^{\mu} = \left(e = \sqrt{m^2 + p^2},0,0,-p\right)$$

$$p = 45 \text{ GeV/c}; \quad m = 0.511 \times 10^{-3} \text{ GeV/c}^2$$

Czynniki Lorentza transformacji do układu spoczynkowego elektronu:

$$\gamma = \frac{e}{m} = 8.81 \cdot 10^4; \quad \beta = +\frac{p}{e} = 1 - O(10^{-7})$$

Istotnie:

$$e' = m = \gamma(e - \beta p) = \frac{e}{m}\left(e - \frac{p}{e}p\right) = \frac{e^2 - p^2}{m}$$

$$p' = 0 = \gamma\left(-p + \frac{p}{e}e\right)$$

Metoda II cd.

Energia fotonu w układzie e:

$$E' = E\gamma(1+\beta) \approx\sim 2E\gamma = \frac{2Ee}{m} = 311.74\,\mathrm{keV}$$

Obliczenie energii rozproszonego do tyłu fotonu ze wzoru Comptona:

$$\Delta\lambda = \lambda'' - \lambda' = \frac{c}{\nu''} - \frac{c}{\nu'} = \frac{c\Delta\nu}{\nu''\nu'} = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$mc^2(E''-E) = E''E'(1-\cos\theta)$$

$$E'' = \frac{mc^2E'}{m^2 + E'(1-\cos\theta)} = \left|(1-\cos\theta) = 2\right| = \frac{E'}{1+\frac{2E'}{mc^2}} = 140.42\,\mathrm{keV}$$

Metoda II cd.

Transformacja do układu LEP:

$$E''' = E''\gamma(1+\beta) = 2E'''\gamma = 24.73\,\mathrm{GeV}$$