VI.1 Redukcja ruchu dwóch ciał w polu siły centralnej do ruchu jednego ciała w zewnętrznym polu siły
VI.2 Grawitacyjna energia potencjalna powłoki kulistej i kuli

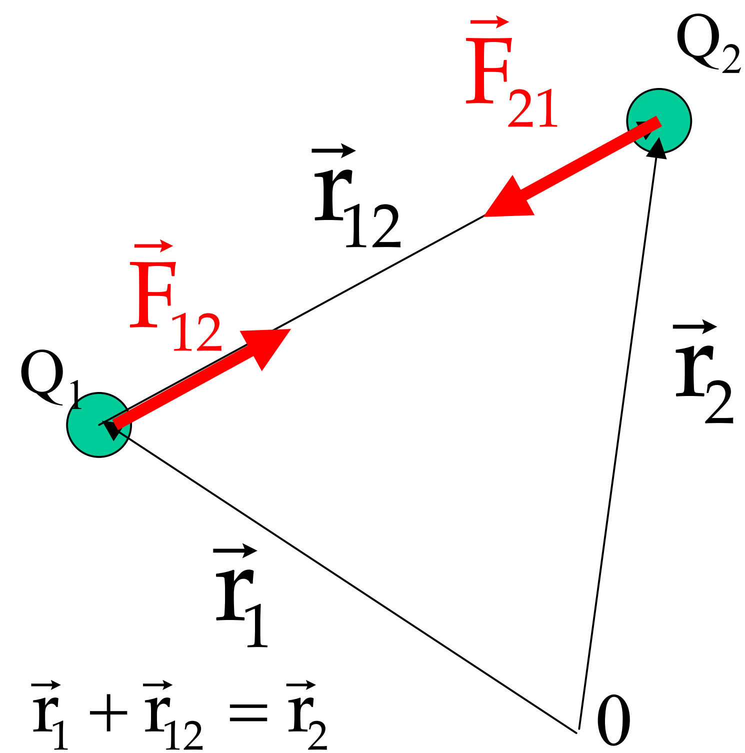
VI.1

Siła kulombowska

Siła działająca na ładunek Q_2 ze strony ładunku Q_1:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^{\ 2}}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



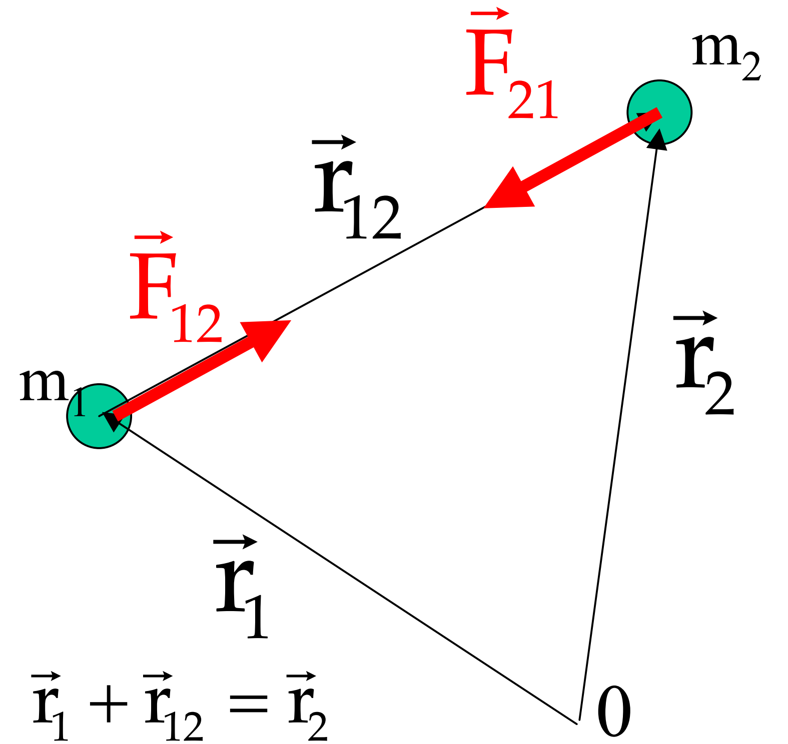
Siła powszechnego ciążenia Newtona

Siła grawitacji działająca na ciało 2 ze strony ciała 1:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^{\ 2}} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \qquad \vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$$



$$\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2$$

Równania ruchu środka masy

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}\left(r_{12}\right)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_{12}\left(r_{12}\right)$$

Dodając stronami uzyskujemy równanie ruchu środka masy:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 r_2}{M}$$

$$M\ddot{\vec{R}} = 0$$

Równanie ruchu względnego

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}(r_{12}) \Big| \cdot m_2$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_{12}(r_{12}) \Big| \cdot m_1$$

daje nam po odjęciu stronami:

$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (m_1 + m_2)\vec{F}_{12}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_{21} = \mu \ddot{\vec{r}}_{21} = \vec{F}_{12}$$

Ruch względny jest to ruch ciała o masie zredukowanej μ **w zewnętrznym polu siły**

Równanie toru jest stożkową w zmiennej $r=r_{21}$

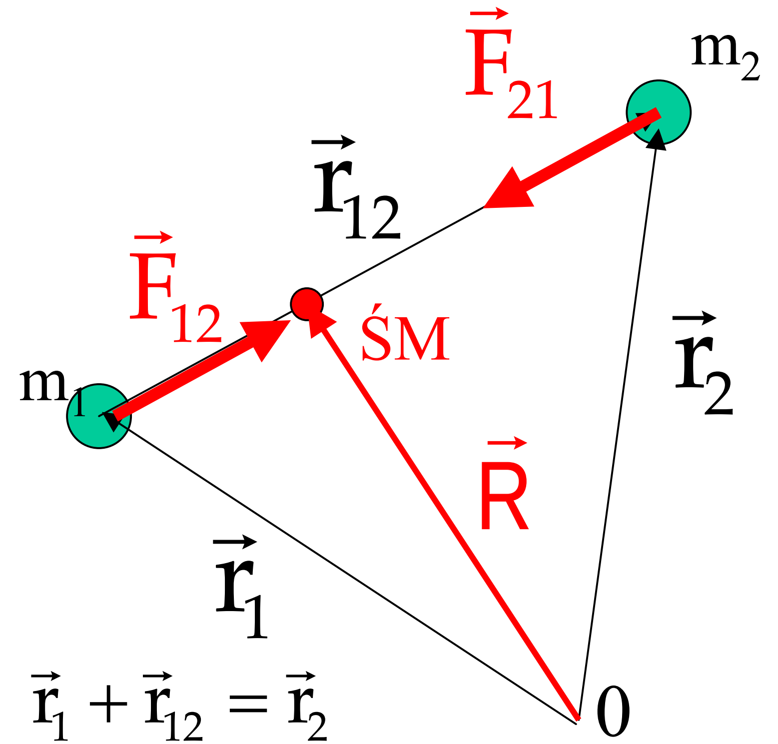
Z Cz. V.4 wiemy, ze równanie toru w polu siły grawitacyjnej jest stożkową:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{p}\cos\left(\phi-\phi_0\right)$$

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\left(\phi-\phi_0\right)}$$

Ognisko stożkowej znajduje się w Środku Masy układu dwóch ciał.

$$\vec{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_{21};\qquad \vec{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_{21}$$



$$\vec{r}_1+\vec{r}_{12}=\vec{r}_2$$

Całkowanie wzoru Bineta dla siły grawitacyjnej

Mamy:

$$F(r) = -\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{GmM}{r^2}$$

Wzór Bineta:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu\alpha}{L^2} = \frac{1}{p}$$

Ma rozwiązanie w postaci krzywej stożkowej ogniskiem w centrum siły:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\phi - \phi_0)$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)}$$

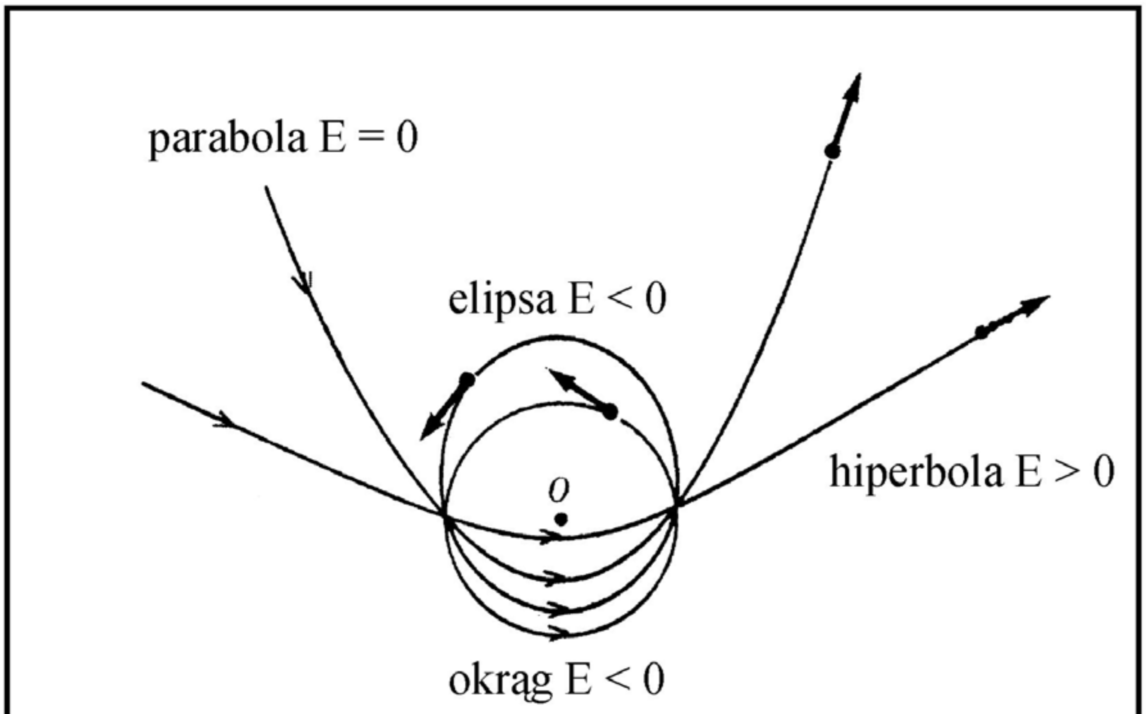
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\mu\alpha^2}E} = \sqrt{1 + \frac{2pE}{\alpha}}$$

Charakter stożkowej zależy od wartości mimośrodu ε:

1. **$\varepsilon < 1$- elipsa**
2. **$\varepsilon = 1$ parabola- krzywa zmierza do nieskończoności dla $\phi = \phi_0 + \pi$**
3. **$\varepsilon > 1$- hiperbola- krzywa zmierza do nieskończoności dla $\phi = \phi_0 + \arccos(1/\varepsilon)$**

Stożkowe

Problem Keplera: ruch w ŚM dla ciała o różnych E ale tym samym L

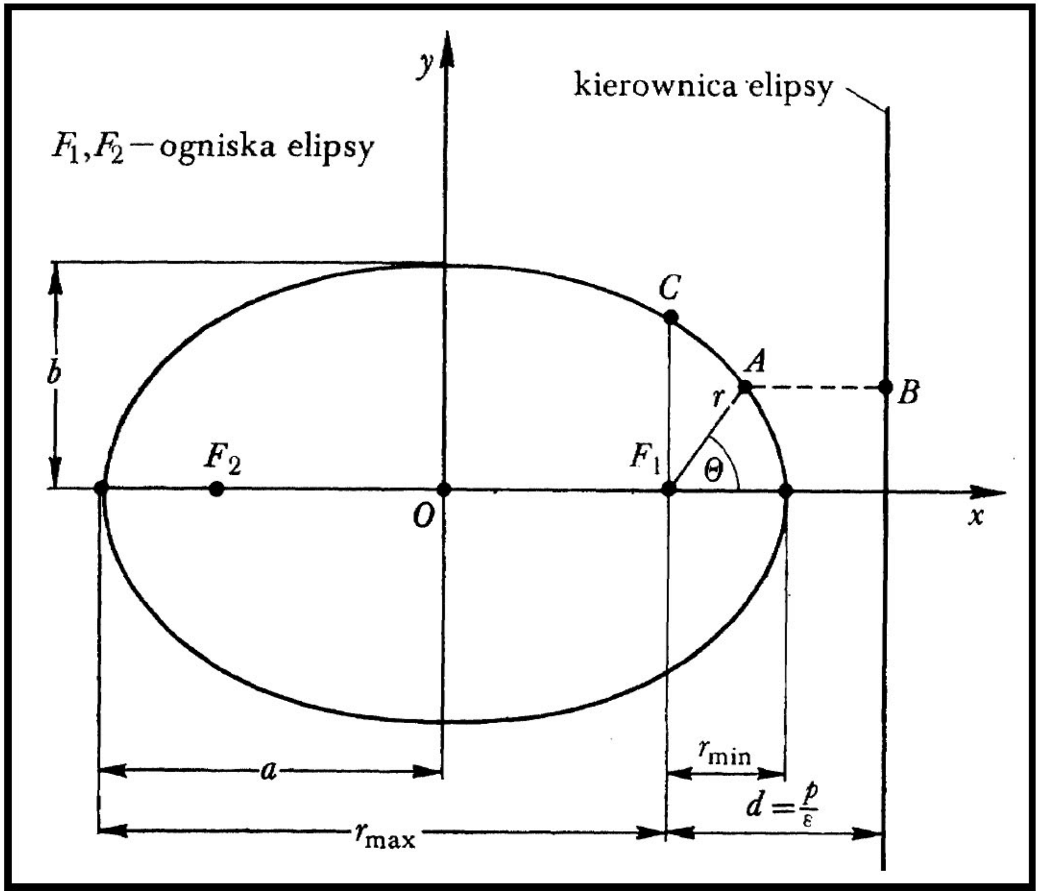


Elipsa E<0

$$\varepsilon = \frac{r}{AB}$$

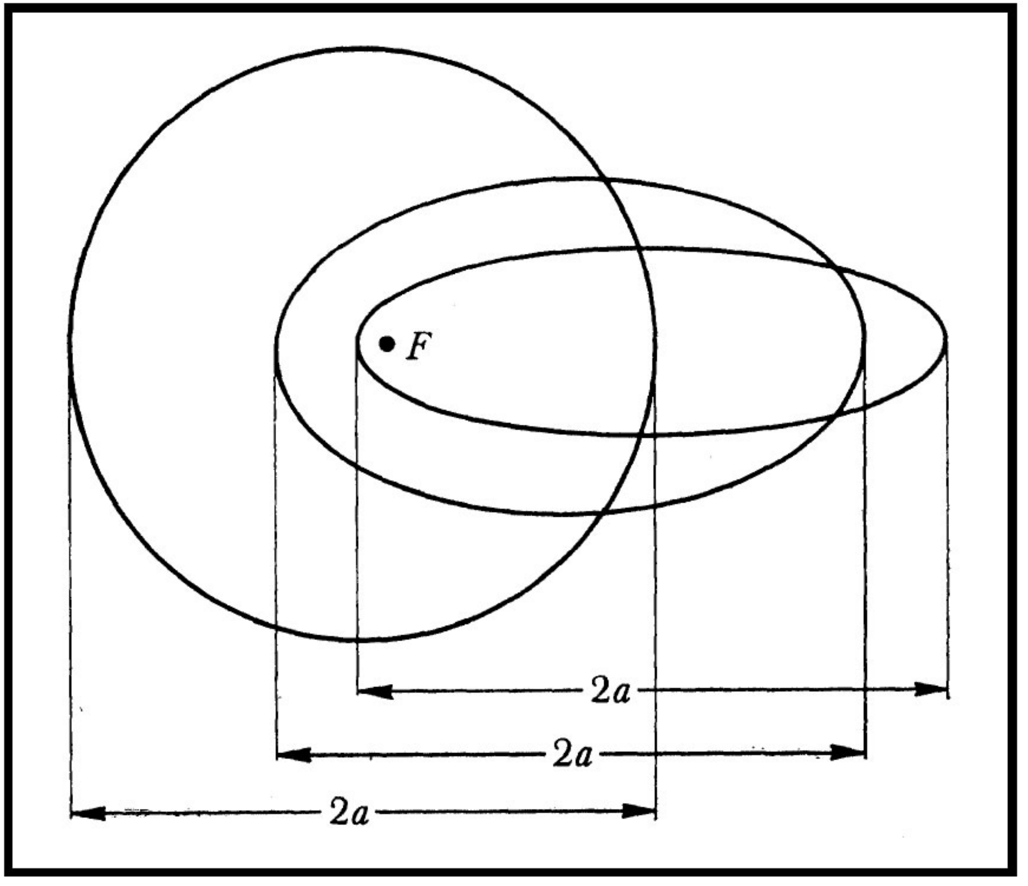
$$2a = r_{max} + r_{min} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} = \frac{Gm_1m_2}{2|E|}$$

$$2b = \frac{2p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2\mu|E|}}$$



Elipsa cd.

Duża półoś elipsy zależy tylko od |E|.



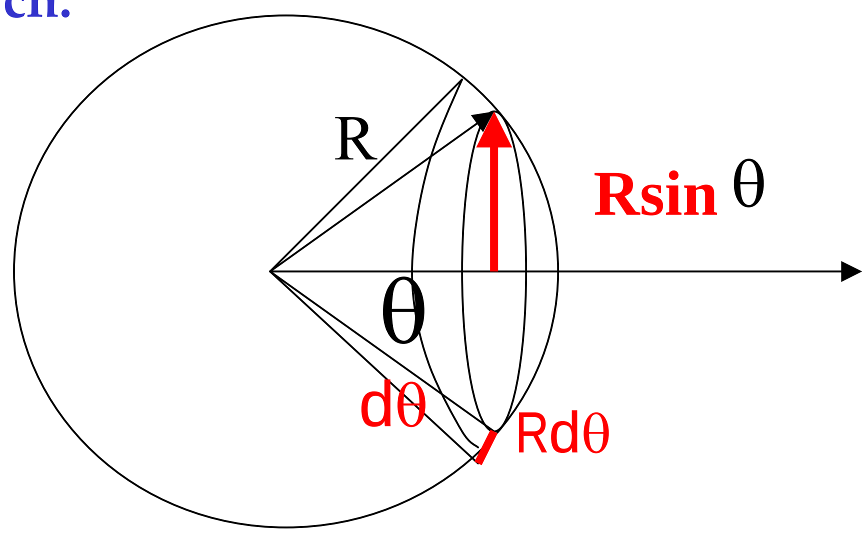
VI.2

Pokażemy, że siła grawitacyjna pochodzącą od jednorodnej powłoki kulistej lub kuli jest na zewnątrz powłoki taka sama jak pochodząca od punktu materialnego o masie powłoki lub kuli umieszczonego w środku.

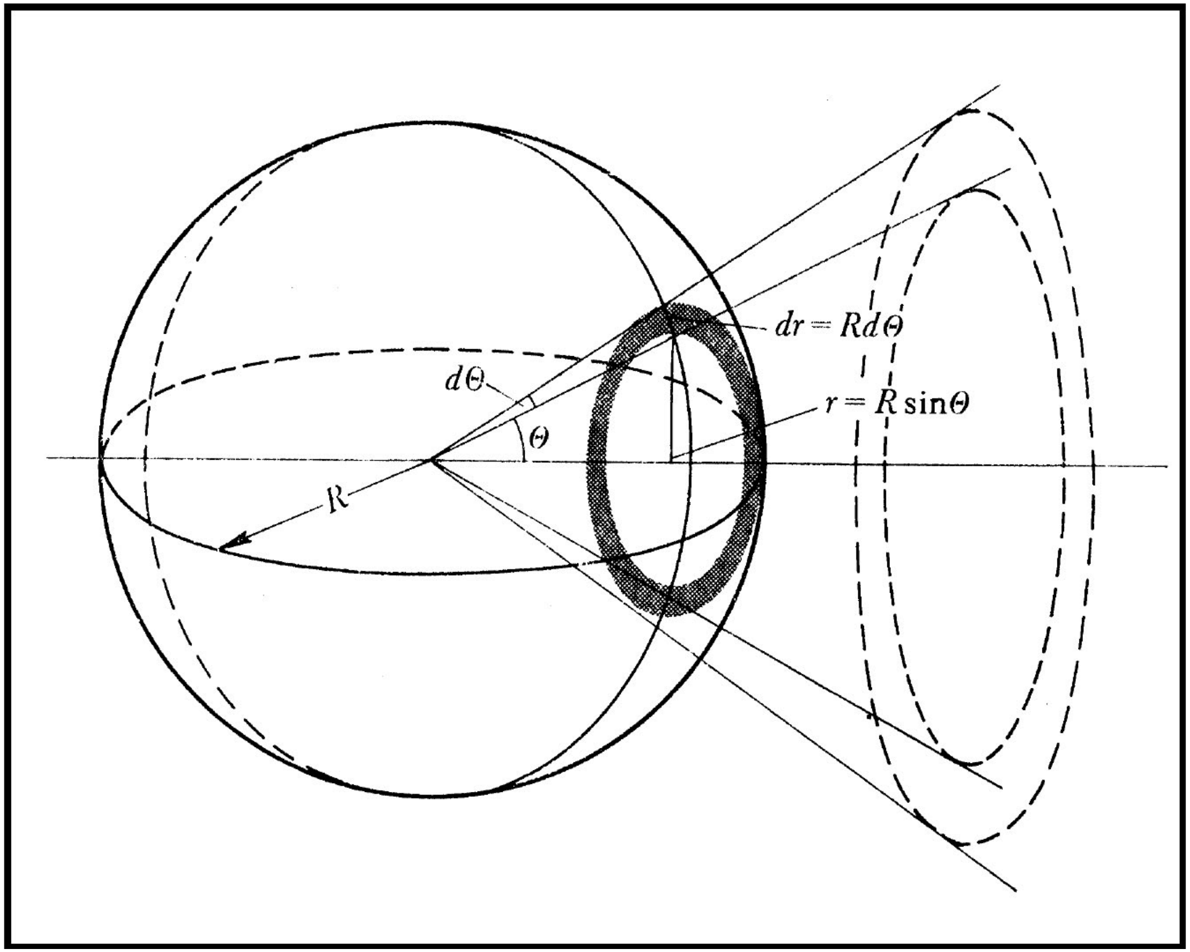
Obliczymy grawitacyjną energię potencjalną dla powłoki/ kuli.

Rachunki będziemy prowadzili

we współrzędnych sferycznych.



Kąt bryłowy



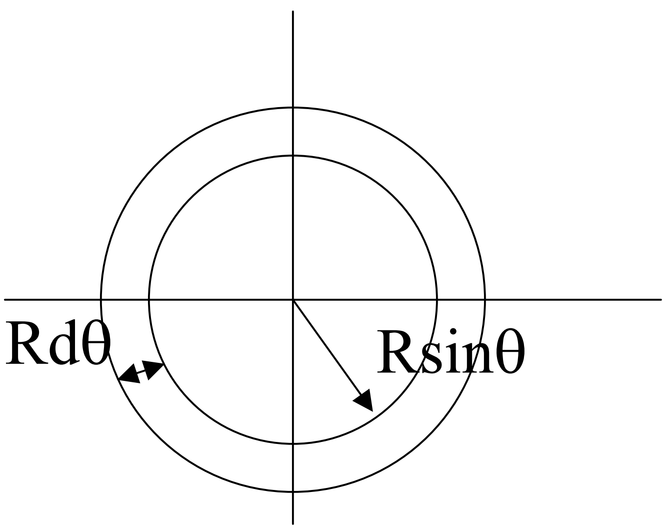
cd

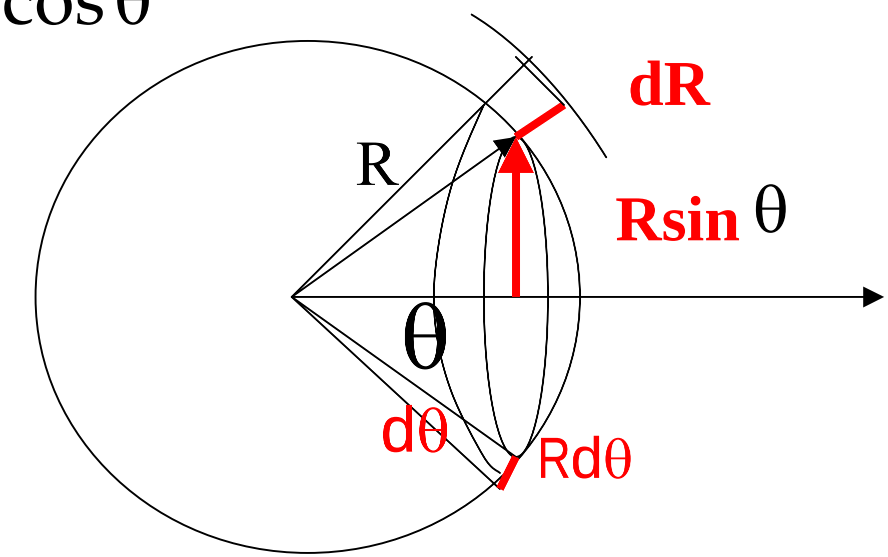
Powierzchnia pierścienia pomiędzy kątami biegunowymiθ a θ+dθ wynosi:

$$dA = 2\pi \cdot R\sin\theta \cdot Rd\theta = 2\pi \cdot R^2 \sin\theta d\theta = 2\pi \cdot R^2 d\cos\theta$$

Zaś objętość powłoki o grubości dR jest:

$$dV = dA \cdot dR = 2\pi R^2 dR \cdot d\cos\theta$$

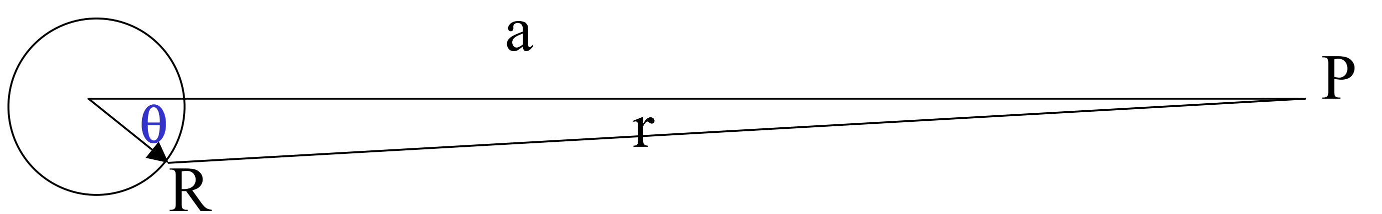




cd

Będziemy obliczać energię potencjalną w punkcie P odległym od środka powłoki o promieniu R o a. W P umieszczamy masę m. Masa powłoki $M=4\pi R^2\sigma$, gdzie σ jest gęstością powierzchniową masy.
Punkt na powłoce umieszczony pod kątem θ od linii OA znajduje się w odległości r od P; z tw. cosinusów:

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}$$



Rachunki trzeba przeprowadzić osobno wewnątrz i na zewnątrz powłoki.

cd. Na zewnątrz powłoki

Wkład do energii potencjalnej elementu powierzchni dA wynosi:

$$dE_p = -Gm\frac{\sigma dA}{r} = -\frac{Gm\sigma 2\pi R^2 d\cos\theta}{\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta}}$$

$$E_p(a) = -\int_0^{2\pi}\frac{Gm\sigma 2\pi R^2 d\cos\theta}{\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta}} =$$

$$= -2\pi R^2 Gm\sigma\int_1^{-1}\frac{dx}{\sqrt{a^2+R^2-2aRx}} = -2\pi R^2 Gm\sigma\frac{2}{a} = -\frac{4\pi R^2\sigma}{a}Gm$$

$$= -\frac{GMm}{a}$$

$$V(a) = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{a}$$

Pole jest takie jak od punktu materialnego o masie M w początku układu

cd. Wewnątrz powłoki

Dostajemy bardzo podobne wyrażenie tylko całka po kątach wynosi nie 2/a, a 2/R. Potencjał wewnątrz powłoki jest więc stały i wynosi:

$$V(a) = -\frac{GM}{R}$$

Oznacza to, że siła przyciągania grawitacyjnego wewnątrz jednorodnej powłoki kulistej znika!