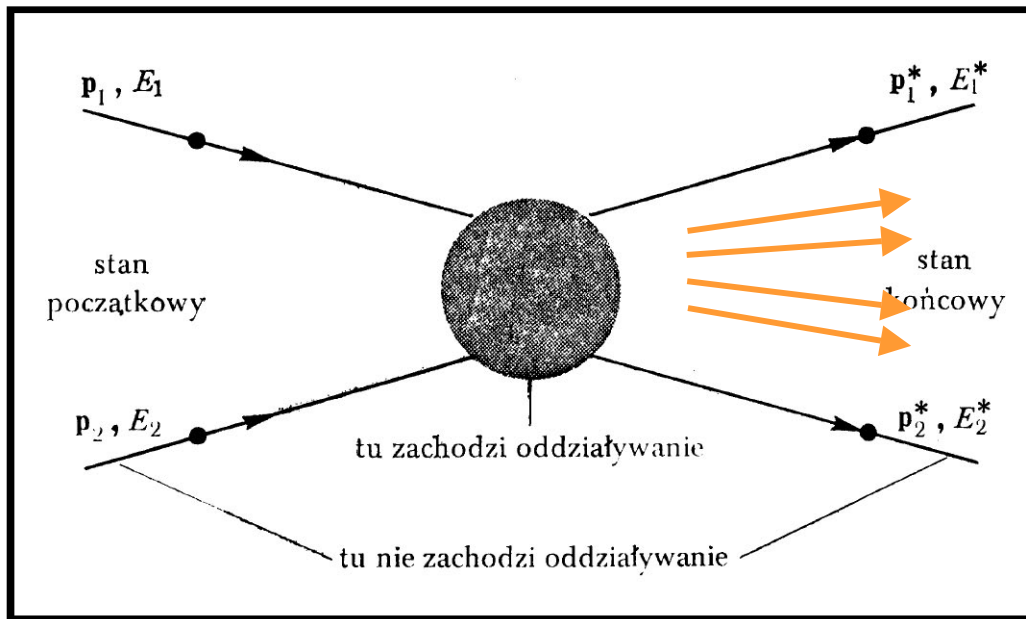


## VI.5 Zderzenia i rozpraszanie. Przekrój czynny. Wzór Rutherforda i odkrycie jądra atomowego

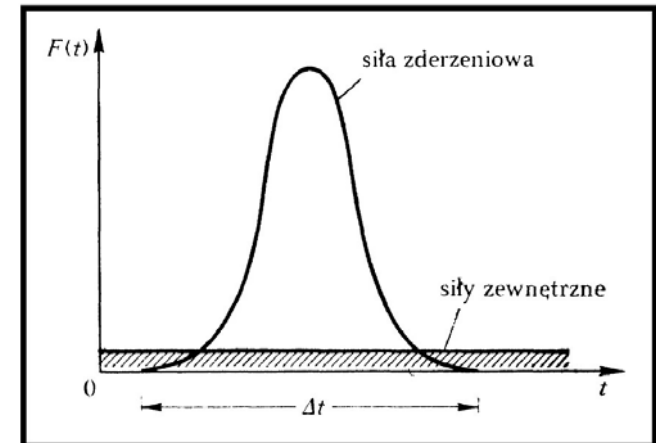
# Przekrój czynny

# Zderzenia

Oddziaływania dwóch (lub więcej) ciał siłami krótkozasięgowymi, w wyniku których te ciała zmieniają swoje czterościany i/lub pojawiają się inne ciała w stanie końcowym nazywamy zderzeniami.



## Krótkozasięgowe siły zderzeniowe



## Zderzenia cd.

**Zderzenia cząstek przyspieszanych w akceleratorach są podstawowymi sposobami zdobywania informacji o materii na małych odległościach w fizyce jądrowej i fizyce cząstek elementarnych**

## Zderzenia cd.

Jeżeli czas zderzenia jest mały, cząstki w nim uczestniczące możemy traktować jako układ odosobniony.

Do opisu procesu możemy użyć układu ŚM, w którym spełnione są (relatywistyczne) prawa zachowania pędu, energii i momentu pędu:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \sum_{i=1}^N \vec{p}'_i$$

$$E_1 + E_2 = \sum_{i=1}^N E'_i; \quad E = E_k + E_p + mc^2$$

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \sum_{i=1}^N \vec{L}'_i$$

## Zderzenia cd. masa niezmiennicza

W wyniku zderzenia zachowany jest wprowadzony wcześniej niezmiennik  $s$  ( $c=1$ ):

$$s = (\mathbf{p}^\mu_1 + \mathbf{p}^\mu_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$$

$$= s' = \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{p}'^\mu \right)^2 = \left( \sum E'_i \right)^2 - \left( \sum \vec{p}'_i \right)^2$$

Masą niezmienniczą nazywamy:

$$M = \frac{\sqrt{s}}{c^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{s'}}{c^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\left( \sum E'_i \right)^2 - \left( \sum \vec{p}'_i \right)^2}$$

## Zderzenia cd. Ciepło reakcji $Q$

Innym użytecznym niezmiennikiem jest ciepło reakcji  $Q$ .  
Zasada zachowania energii przed i po zderzeniu, gdy cząstki wyszły już z obszaru krótkozasięgowych oddziaływań:

$$E = E'$$

$$E_{k1} + E_{k2} + m_1 + m_2 = \sum E'_{ki} + \sum m'_i$$

$$\sum E'_{ki} - E_{k1} + E_{k2} = Q = E'_k - E_k =$$

$$= (m_1 + m_2) - \sum m'_i = \text{inv}$$

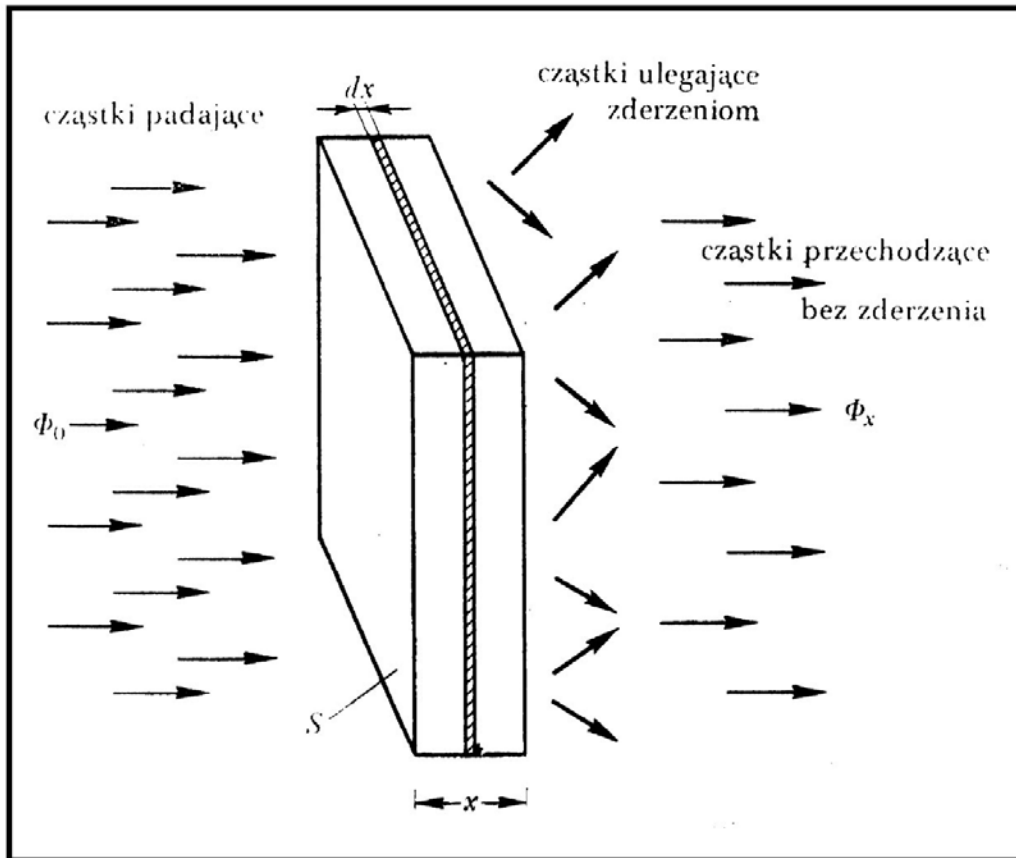
## Zderzenia cd. Klasyfikacja zderzeń

Zderzenia klasyfikujemy ze względu na ciepło reakcji  $Q$  na:

- Elastyczne  $Q=0$ , zachowuje się osobno  $E_k$  i  $E_p$
- Nieelastyczne I rodzaju (endoenergetyczne)  $Q<0$ , energia kinetyczna produktów jest mniejsza od energii kinetycznej cząstek początkowych, zwiększa się zaś energia potencjalna (w tym energia spoczynkowa). Zderzenia te mogą zachodzić tylko powyżej pewnej energii- energii progowej (masy cząstek są skwantowane).
- Nieelastyczne II rodzaju (egzoenergetyczne)  $Q>0$ , energia kinetyczna produktów jest większa od energii kinetycznej cząstek początkowych kosztem ich energii potencjalnej (w tym energii spoczynkowej).  
Mogą zachodzić dla wszystkich energii.

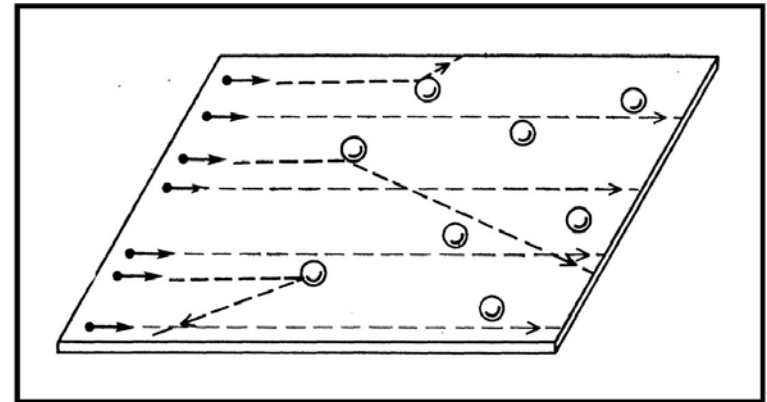


# Jak często zachodzą zderzenia? Pojęcie przekroju czynnego

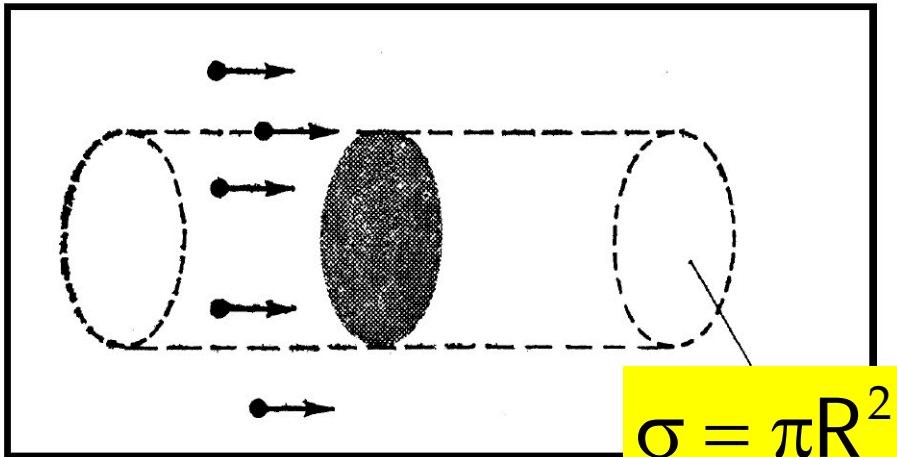


Idea: rozpraszamy małe pociski na dużych centrach.

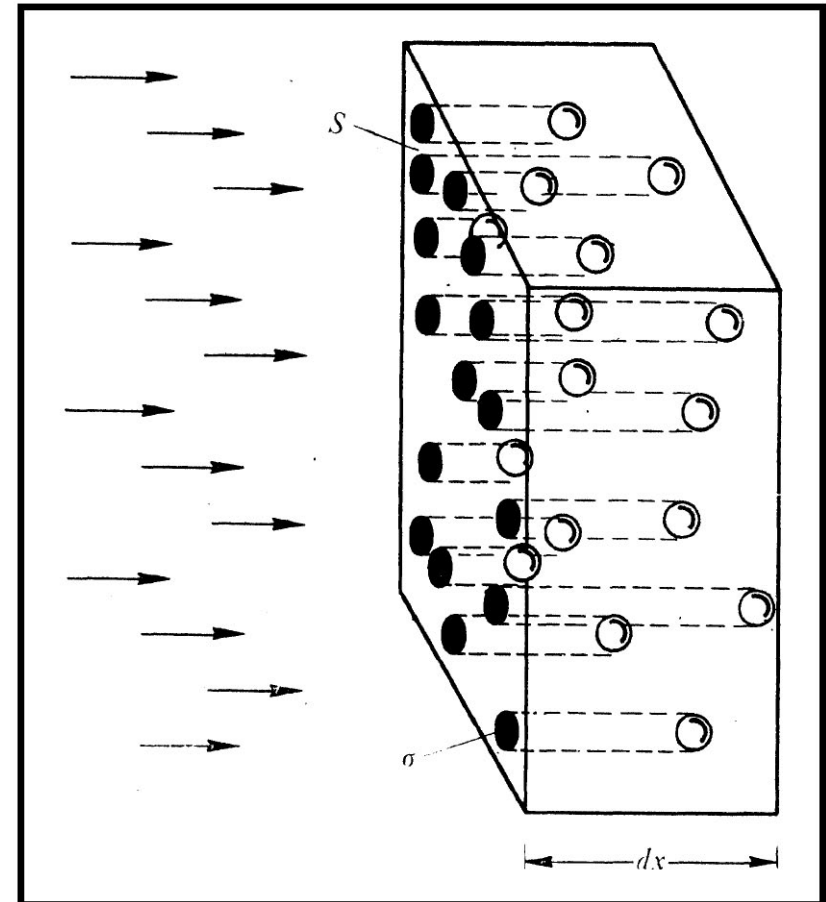
Czy możemy wyznaczyć rozmiary (promienie) centrów?



## cd. Całkowity Przekrój Czynny



Musimy uwzględnić strumień padających pocisków  $\Phi_0$  i liczbę centrów rozpraszających na jedn. powierzchni.



cd...

Rozważmy warstwę tarczy o grubości  $dx$  i powierzchni  $A$ . W objętości tarczy  $dV=Adx$  znajduje się  $ndV=nAdx$  centrów rozpraszających. Niech gęstość centrów wynosi  $n$ .

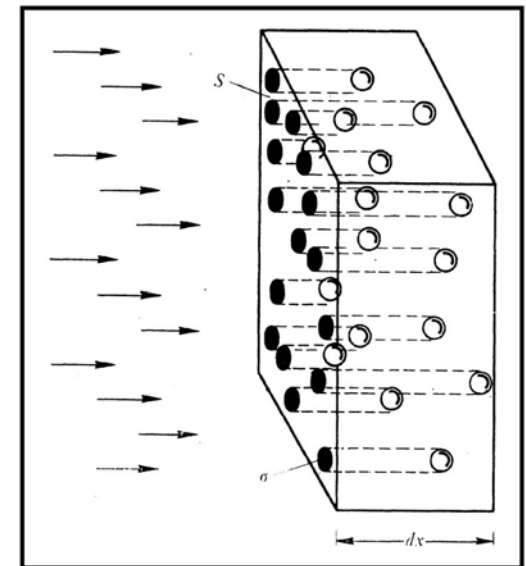
Niech strumień cząstek padających na warstwę  $dx$  wynosi  $\Phi$  cząstek na jednostkę powierzchni na jednostkę czasu.

Liczba rozproszonych cząstek, jeżeli centra mają powierzchnie  $\sigma$  wynosi:

$$d\Phi = -\frac{\Phi \cdot n \cdot \sigma A dx}{A}; \quad \frac{d\Phi}{\Phi} = -n\sigma \cdot dx$$

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-n\sigma \cdot x} = \Phi_0 e^{-x/\lambda}; \quad \lambda = \frac{1}{n\sigma}$$

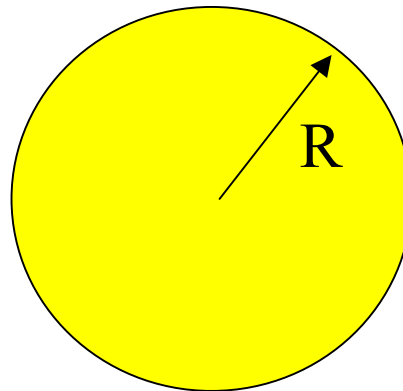
$\lambda$ - średnia droga swobodna



## Przekrój czynny- wymiary i jednostki

$$[\sigma] = \text{m}^2;$$

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 100 \text{ fm}^2$$

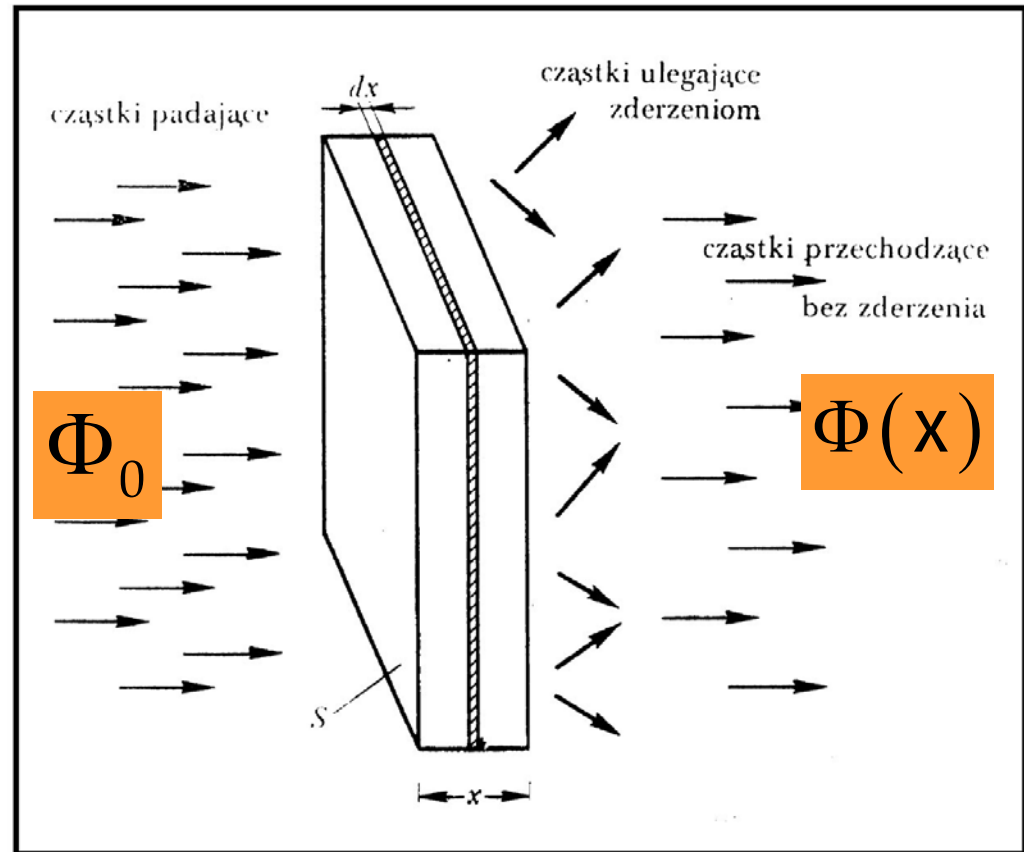


$$\sigma = 1 \text{ barn} \Leftrightarrow R = 5.64 \text{ fm}$$

# Pomiar przekroju czynnego przez pomiar strumienia przechodzącego dla cienkich tarcz

Zachodzi oczywisty wzór dla cienkich tarcz:

$$\sigma = \frac{\Phi_0 - \Phi(x)}{\Phi_0 n x}$$



## Rozkład kątowy i różniczkowy przekrój czynny

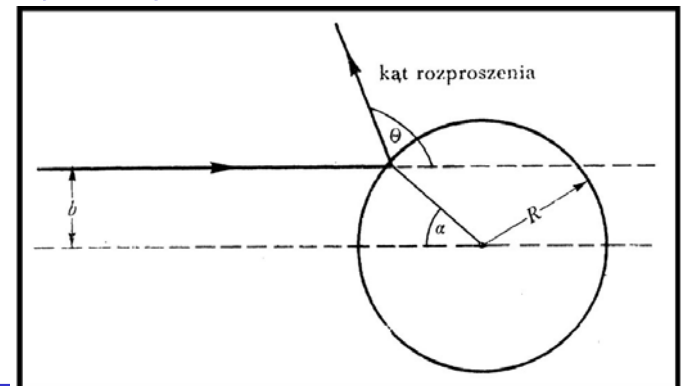
Całkowity przekrój czynny opisuje prawdopodobieństwo zderzenia pocisku z centrum.

Można zadać bardziej szczegółowe pytania np. :

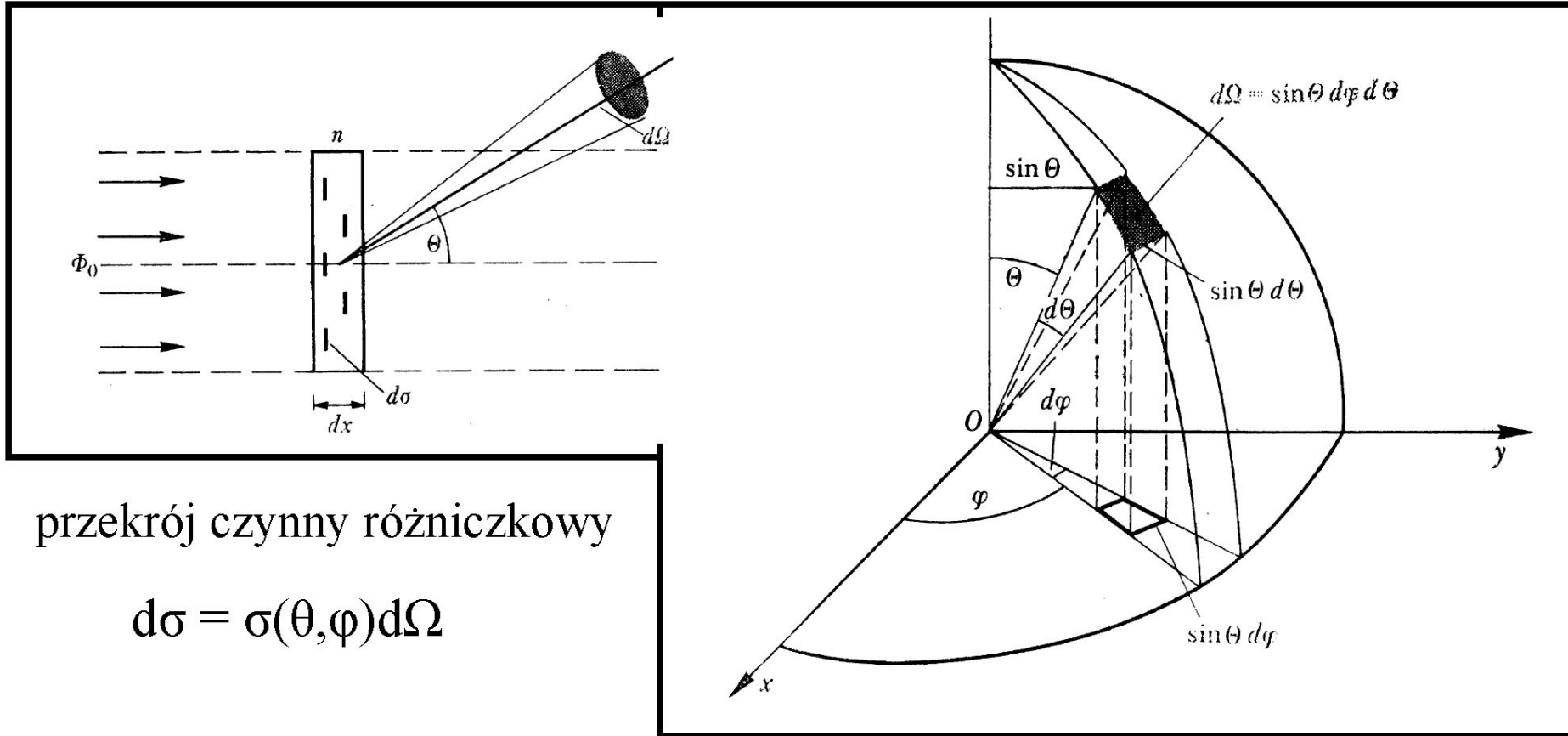
- Jakie jest prawdopodobieństwo rozproszenia pocisku pod określonym kątem?
- Jakie jest prawdopodobieństwo określonej straty energii pocisku w zderzeniu nieelastycznym? Itp.

Wielkościami, które wykorzystujemy w odpowiedziach na te i podobne pytania są różniczkowe przekroje czynne.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}; \quad \frac{d\sigma}{d(E-E')}$$



## Różniczkowy przekrój czynny cd.



Zwykle mamy symetrię osiową:

$$\sigma(\phi, \theta) = \sigma(\theta); \quad d\Omega = 2\pi d(\cos\theta)$$

## Różniczkowy przekrój czynny cd.

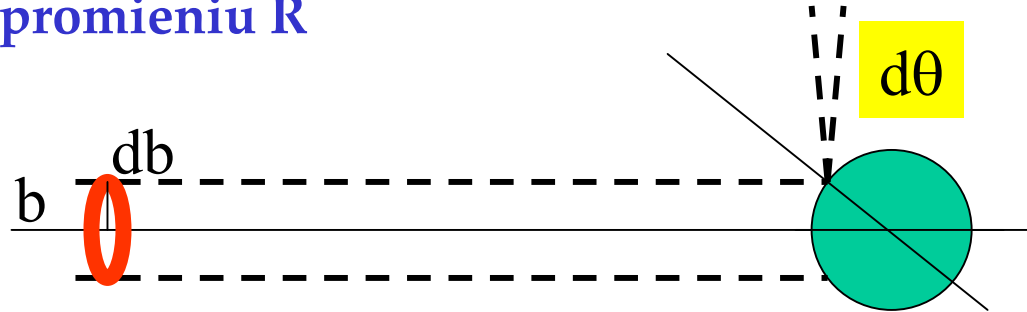
Całkowity przekrój czynny otrzymujemy całkując różniczkowy przekrój czynny po całym kącie bryłowym:

$$\sigma = \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta$$



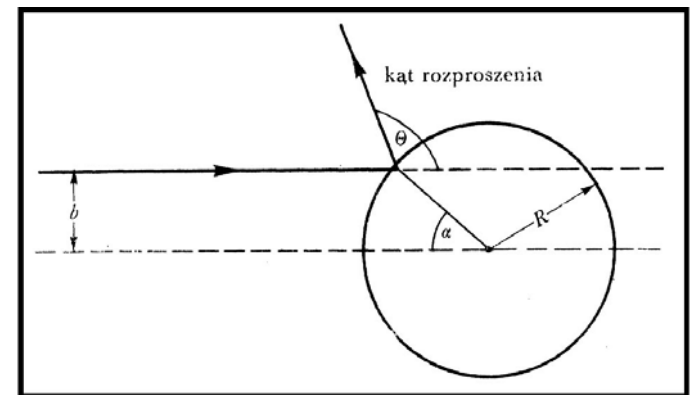
## Różniczkowy przekrój czynny cd.

Przykład: rozpraszanie małej kulki (punktu materialnego) na sprężystej kuli o promieniu  $R$



Wszystkie cząstki padające przechodzące przez pierścień o parametrach zderzenia pomiędzy  $b$  a  $b+db$  rozpraszają się do kąta  $\langle \theta, \theta+d\theta \rangle$ . Związek między Kątem a parametrem zderzenia:

$$b = R \sin \alpha = R \sin \left( \frac{\pi - \theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2}$$



## cd... Rozpraszanie na kuli

Niech strumień padających punktów materialnych wynosi  $N$ .

Wtedy:

$$dN = 2\pi b N db$$

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = 2\pi b |db| = 2\pi R \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{R}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} \sin \theta d\theta = \frac{R^2}{4} d\Omega; \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} = \text{const}$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi d \cos \theta = \frac{\pi R^2}{2} 2 = \pi R^2$$

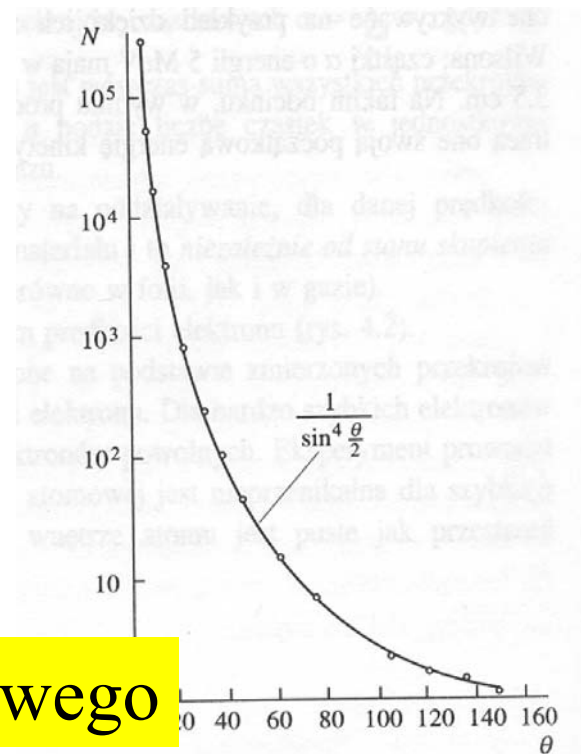
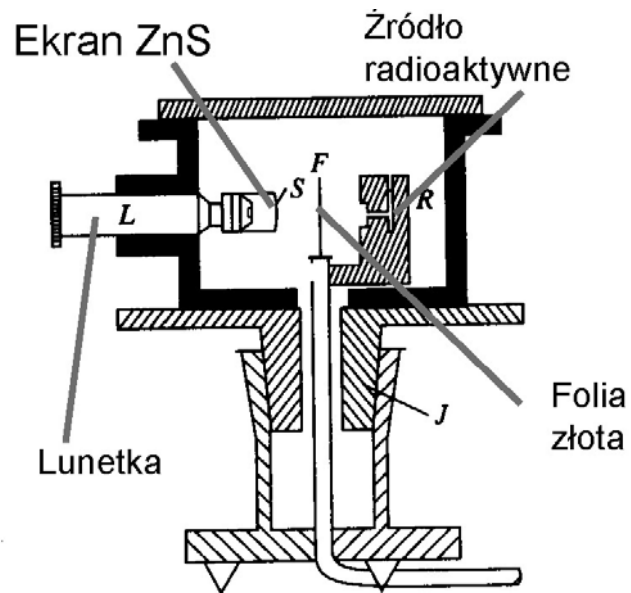
Rozkład  
kątowy jest  
izotropowy

Całkowity przekrój czynny jest, zgodnie z intuicją, przekrojem poprzecznym kuli

## Rozpraszanie w polu siły centralnej $+k/r^2$

Doświadczenie Rutherforda, Geigera i Marsdena 1911,  
rozpraszanie czastek alfa na cienkiej folii złotej.

Oddziaływania kulombowskie, odpychająca siła centralna  $+k/r^2$



Odkrycie jądra atomowego

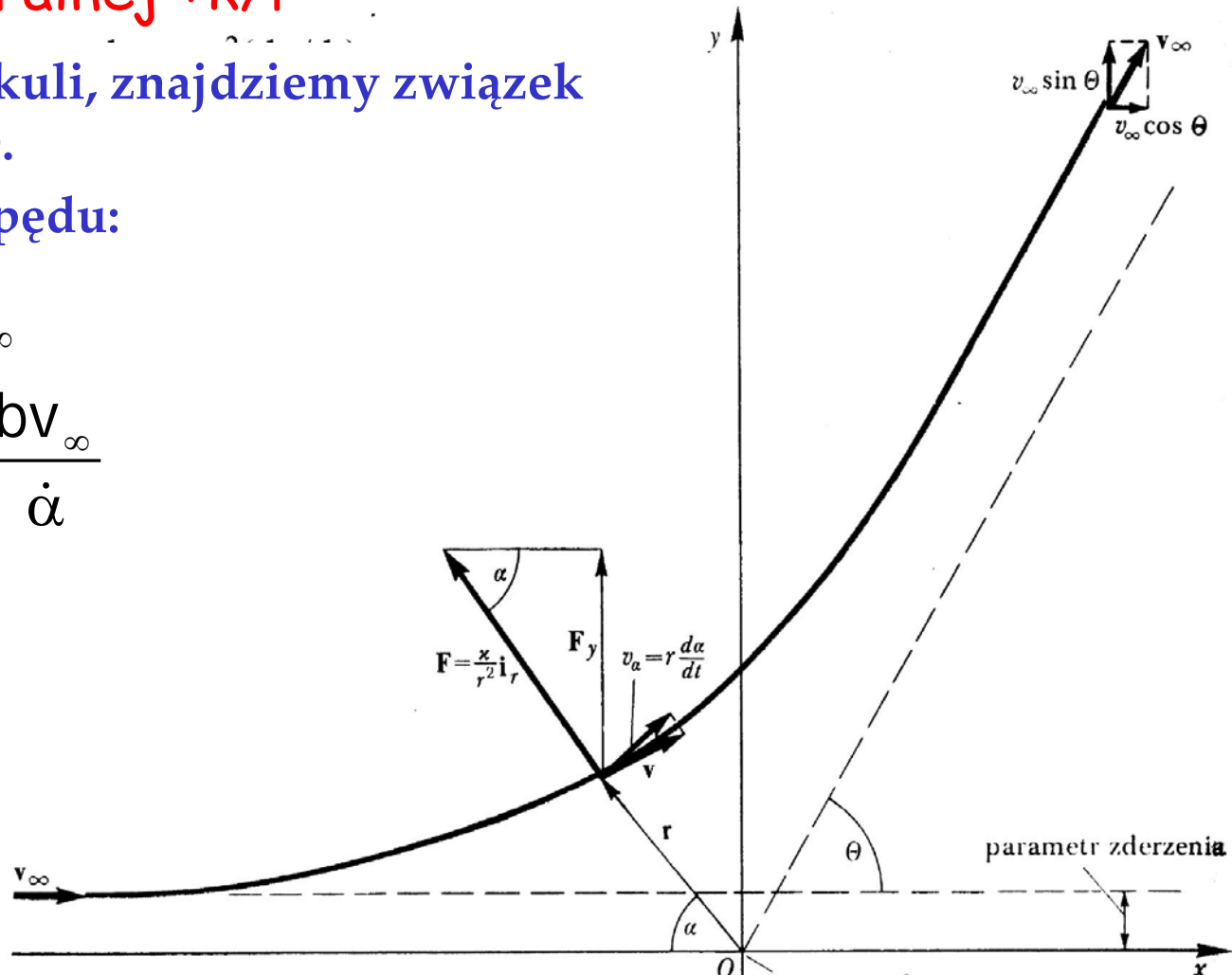
## Rozpraszanie w polu siły centralnej $+k/r^2$

Podobnie jak dla kuli, znajdziemy związek między  $db$  i  $d\cos\theta$ .

Z całki momentu pędu:

$$L = \mu r^2 \dot{\alpha} = \mu b v_{\infty}$$

$$b = \frac{r^2 \dot{\alpha}}{v_{\infty}}; \quad r^2 = \frac{b v_{\infty}}{\dot{\alpha}}$$



cd...

Związek kąta rozproszenia z parametrem zderzenia znajdujemy całkując pionową składową siły  $F_y$  w granicach od 0 do  $v_\infty \sin \alpha$ :

$$\mu \frac{dv_y}{dt} = F_y = \frac{k \sin \alpha}{r^2} = \frac{k \dot{\alpha} \sin \alpha}{v_\infty b}$$

$$\theta = \pi - \alpha(\infty)$$

$$\int_0^{v_\infty \sin \theta} dv_y = \frac{k}{\mu v_\infty b} \int_0^{\pi - \theta} d\alpha \sin \alpha$$

$$v_\infty \sin \theta = \frac{k}{\mu v_\infty b} [-\cos \alpha]_0^{\pi - \theta} = \frac{k}{\mu v_\infty b} (1 + \cos \theta)$$

$$\frac{\mu v_\infty^2}{k} b = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

$$F = k/r^2 \text{ cd...}$$

Niech gęstość jąder atomowych w folii wynosi  $n$ . W tarczy o grubości  $x$  znajduje się  $nx$  jąder na jednostkę powierzchni.

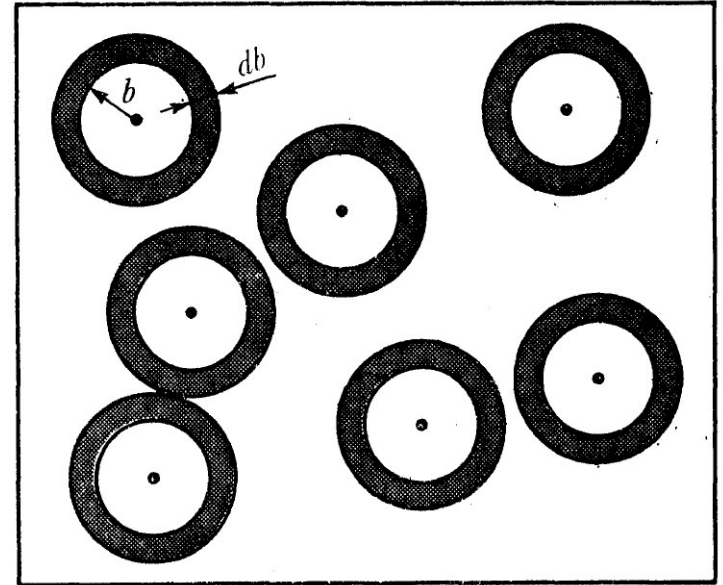
Strumień cząstek padających na folię:  $N$ .  
Mamy:

$$\frac{dN}{N} = \frac{nx \cdot 2\pi b |db|}{1}; \quad |db| = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \frac{1}{\sin^2 \theta/2} d\theta$$

$$dN = Nnx \cdot 2\pi \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \frac{1}{\sin^2 \theta/2} d\theta =$$

$$= \left( \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 Nnx \frac{2\pi}{4 \sin^4 \theta/2} d\cos \theta$$

$$\frac{dN}{d\Omega} = \left( \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{Nnx}{4 \sin^4 \theta/2}; \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \theta/2}$$



## Ile wynosi stała?

$$\left( \frac{k}{\mu v^2} \right) = \frac{q_\alpha q_{\text{Au}}}{4\pi\epsilon_0 2E_{k,\alpha}} = \frac{2 \cdot 79 \cdot \alpha \hbar c}{2E_{k,\alpha}} =$$

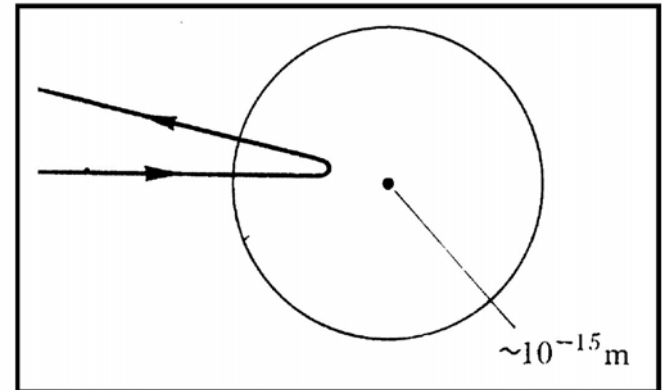
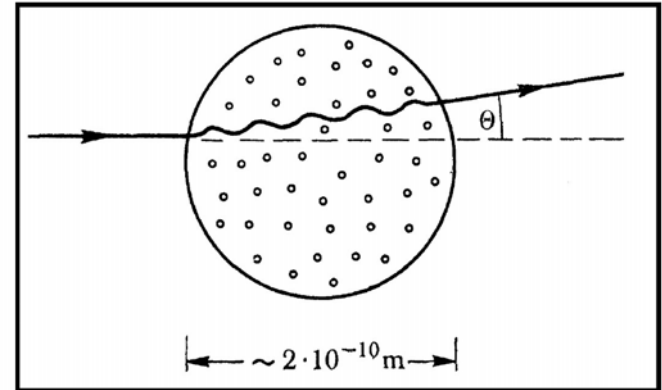
$$\approx \frac{\sim 227.6 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{11.2 \text{ MeV}} = 20.3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$\left( \frac{k}{\mu v^2} \right)^2 = \sim 4.13 \cdot b =$$

Dostajemy rząd wielkości rozmiarów jądra atomowego  $\sim 1\text{fm}$ .

## Model atomu Thomsona i jądrowy model atomu Rutherforda

Na pocz. XX w. uważano, że atomy zbudowane są z dodatnio naładowanej cieczy, w której jak rodzyнки tkwią elektrony (model atomu Thomsona). Rozmiary atomu oceniano na  $10^{-10}$  m. Prawdopodobieństwo zaobserwowania rozproszenia do tyłu cząstki alfa w tym modelu jest  $10^{16}$  za małe, żeby wytłumaczyć wyniki GMR, dlatego w 1911 Rutherford postulował istnienie jądra atomowego o rozmiarach  $10^{-15}$  m. Policzymy pole elektryczne w obu modelach:





cd.

**W modelu Thomsona  
maksymalne pole:**

$$E_{\text{Th}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{\text{Au}}e}{r^2} = (9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}) \frac{79 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{(1 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} = 1.1 \cdot 10^{13} \text{ N/C}$$

$$E_{\text{Ru}} = E_{\text{th}} \frac{(1 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2}{(1 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = 2.3 \cdot 10^{21} \text{ N/C}$$

**Pole elektryczne na  
pow. jądra jest  $2 \cdot 10^8$   
razy silniejsze niż pole  
na pow. atomu  
Thomsona!**

