VII.1 Pojęcia podstawowe.

Model matematyczny ciała sztywnego

Zbiór punktów materialnych takich, że

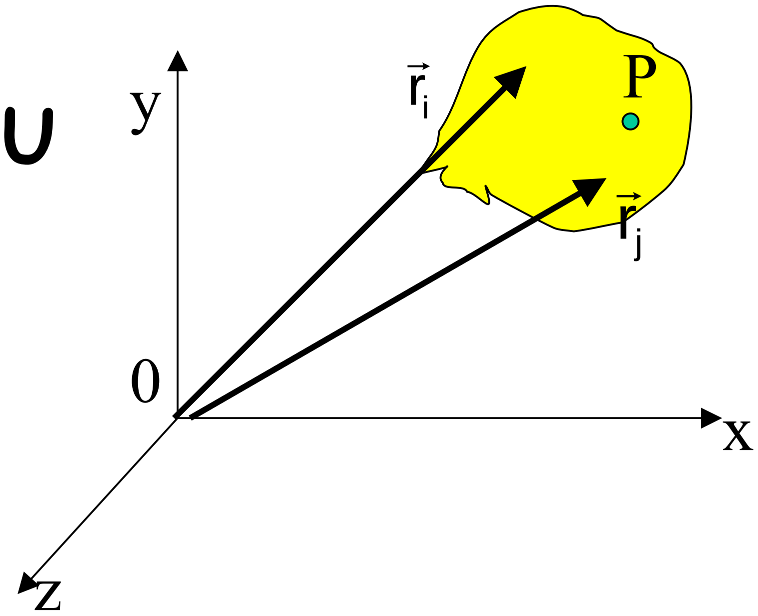
$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = \mathrm{const}; \quad i, j = 1, \ldots .N$$

Ciało sztywne nie ulega odkształceniom w wyniku działania sił.

Swobodne ciało sztywne ma 6 stopni swobody:

•3 translacyjne, opisujące ruch wybranego punktu P np. jego środka masy,

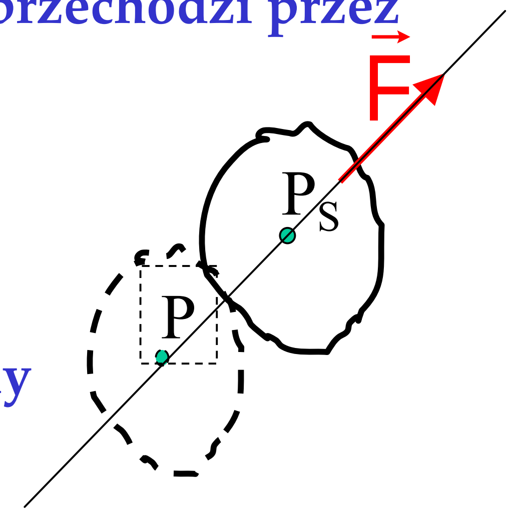
•3 rotacyjne, np. kąty Eulera, opisujące ustawienie ciała względem tego punktu



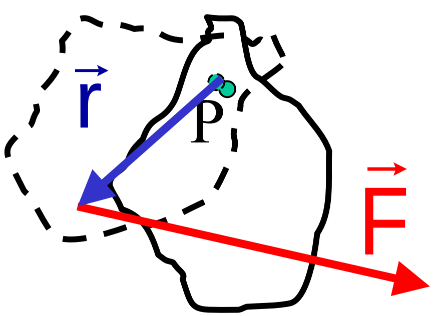
Ruchy ciała sztywnego

Swobodne ciało sztywne ulega przesunięciu w kierunku działania siły zewnętrznej F gdy ten kierunek przechodzi przez środek masy ciała P_S.

W tej konfiguracji znika moment siły.



Gdy dowolny punkt ciała P jest unieruchomiony ciało dokonuje obrotu dookoła niego.



Obrót następuje wskutek działania momentu siły względem P:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

cd.

Na ciało sztywne może działać wiele sił. Wypadkowa siła i wypadkowy moment względem pewnego punktu O dane są jako:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

$$\vec{M} = \sum \vec{M}^O{}_i = \sum \vec{r}^O{}_i \times \vec{F}_i$$

Jeżeli wypadkowa siła i wypadkowy moment dwóch zestawów sił są takie same mówimy o <u>równoważnych układach sił.</u>

Układy równoważne mają jednakowe momenty względem dowolnego punktu.

cd.

Układ sił działających na ciało sztywne możemy zawsze zastąpić przez układ sił równoważnych. Ruch ciała się nie zmieni.

W ogólnym przypadku ruch bryły sztywnej składa się z ruchu postępowego i obrotu.

Twierdzenie o redukcji układu sił

Dowolny układ sił działających na bryłę sztywną można zastąpić siłą wypadkową, równą sumie działających sił i zaczepioną na linii działania tej siły i jedną parą sił o momencie równym momentom sił działających względem punktu zaczepienia siły wypadkowej.

Dowód:

1. Wypadkowa pary sił znika; para sił nie wnosi więc wkładu do ruchu postępowego.

2. Siła wypadkowa ma znikający moment względem swego punktu zaczepienia. Stąd moment całkowity jest równy momentowi pary sił. Tylko para sił zmienia moment pędu bryły.

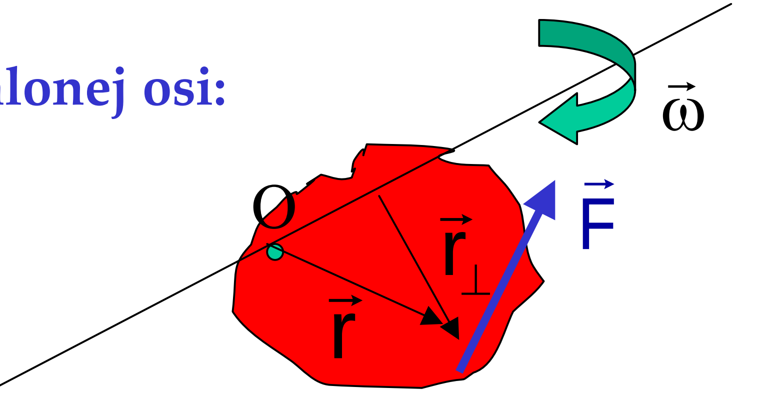
VII.2 Obroty bryły sztywnej dookoła ustalonej osi

Wielkości charakteryzujące obrót bryły sztywnej dookoła ustalonej osi

Masa

$$m = \iiint\limits_V dm = \iiint\limits_V \rho(\vec{r})d_3r$$

Moment bezwładności względem ustalonej osi:



$$I = \iiint\limits_V r^2 dm = \iiint \rho(\vec{r})r_\perp{}^2 d_3r$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego względem ustalonej osi:

$$E_{k,obr} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Moment pędu bryły sztywnej:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Równanie ruchu obrotowego dookoła ustalonej osi

W tym szczególnym przypadku wektory *M*, *L* i ω skierowane są wzdłuż jednej prostej- osi obrotu:

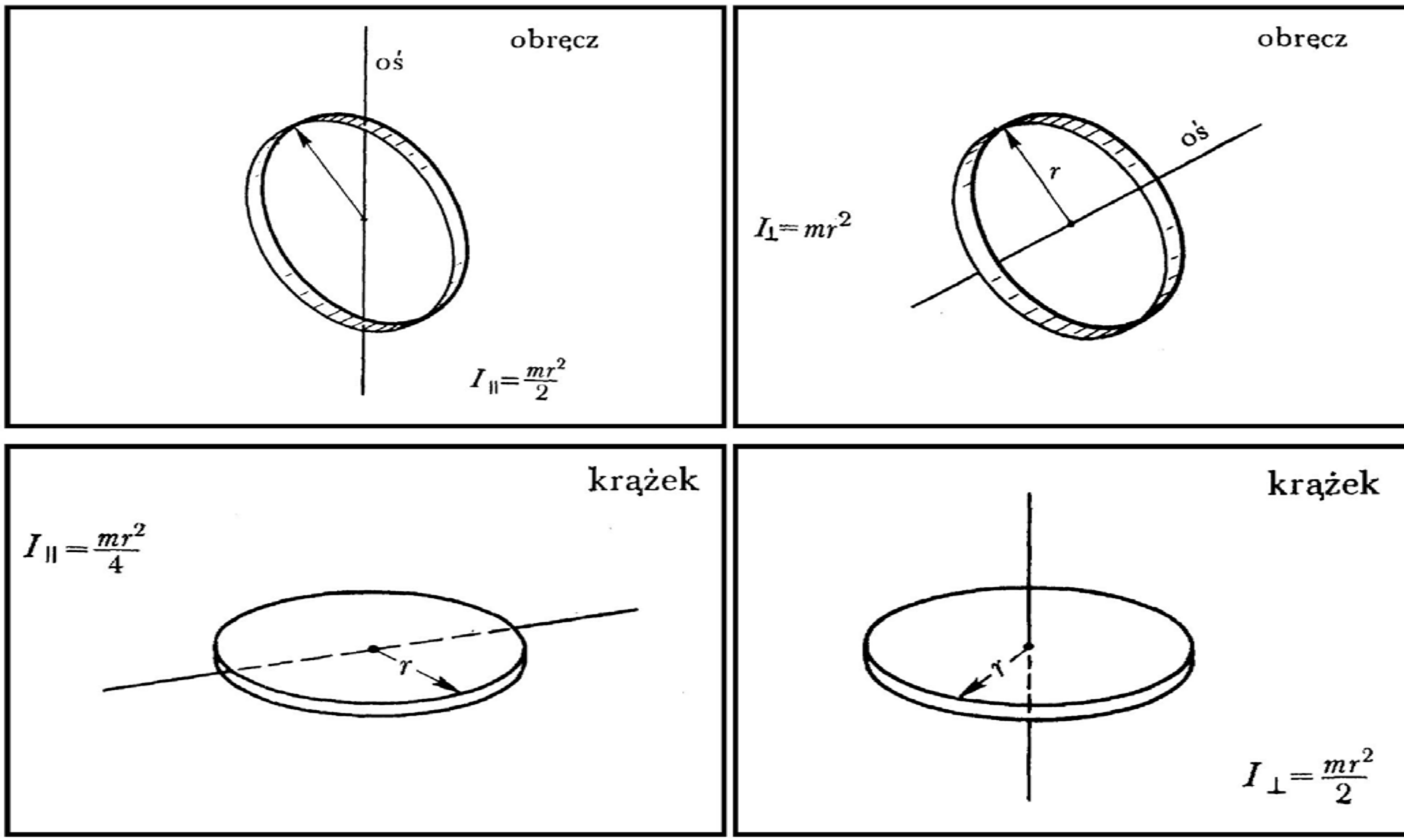
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{L} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\dot{\omega} = I\varepsilon$$

Równanie ruchu postępowego:

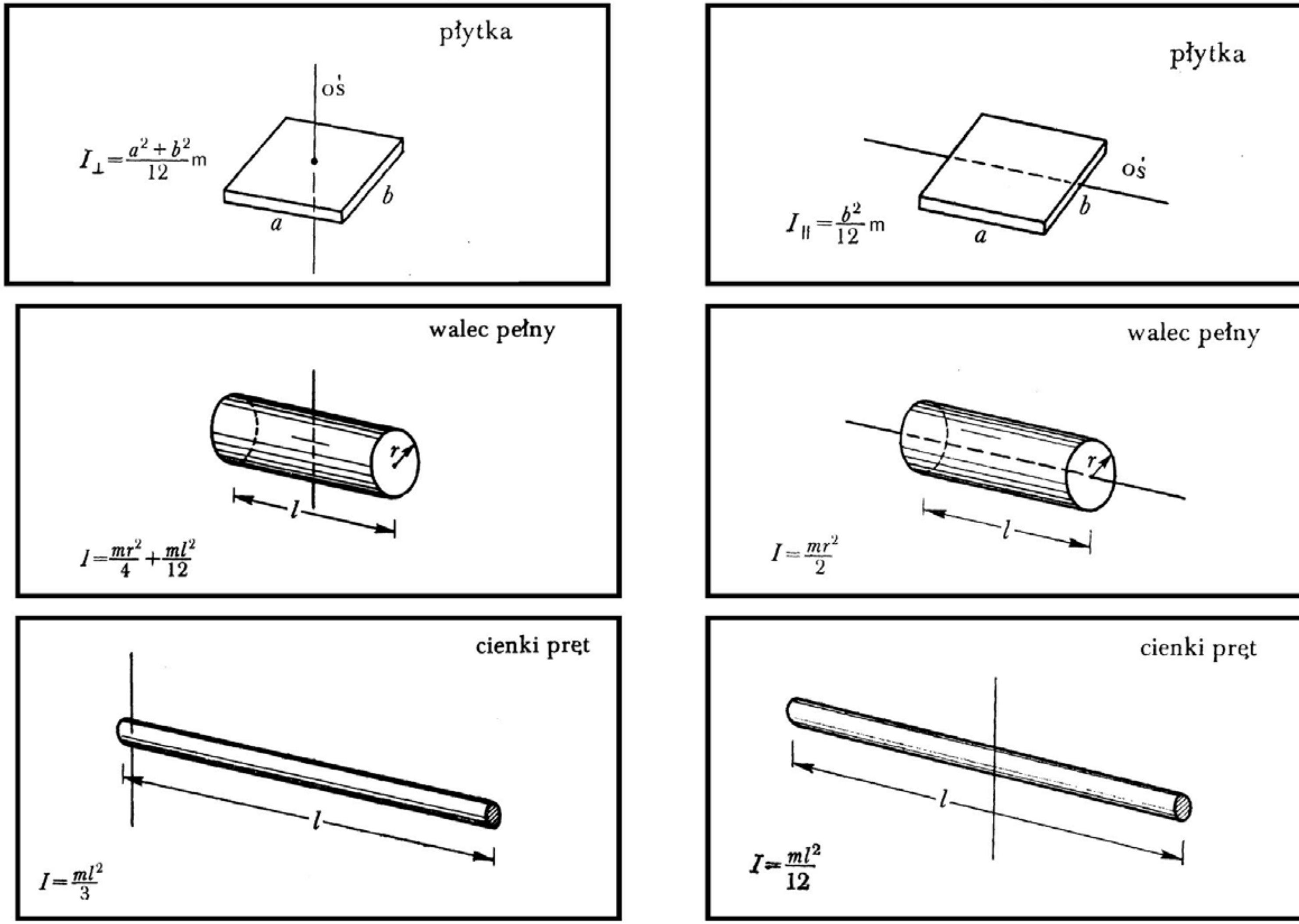
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Momenty bezwładności

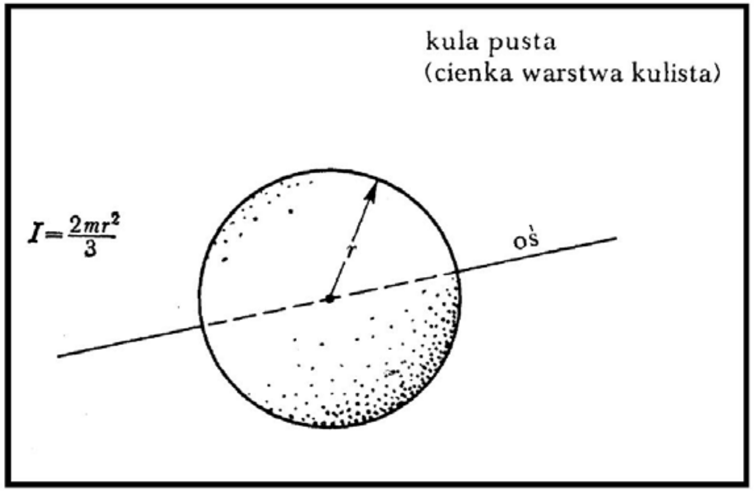
Momenty bezwładności prostych brył

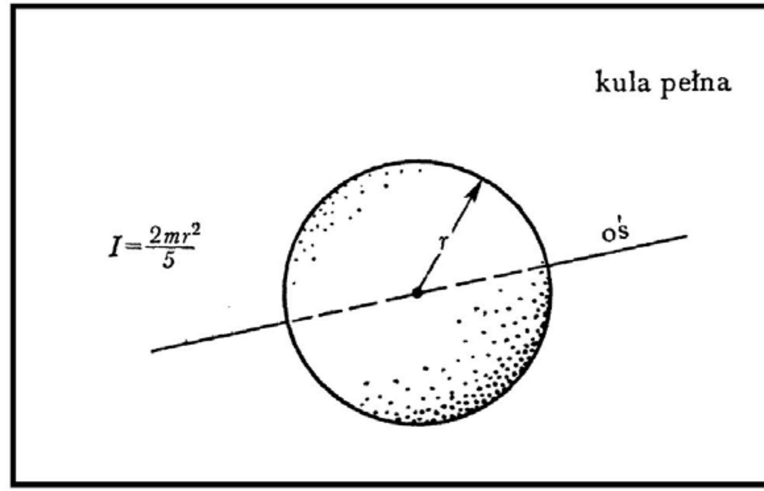


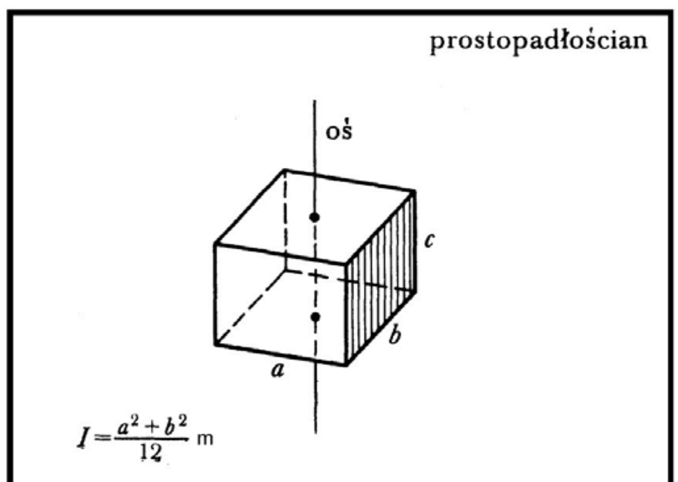
Momenty bezwładności prostych brył



Momenty bezwładności prostych brył







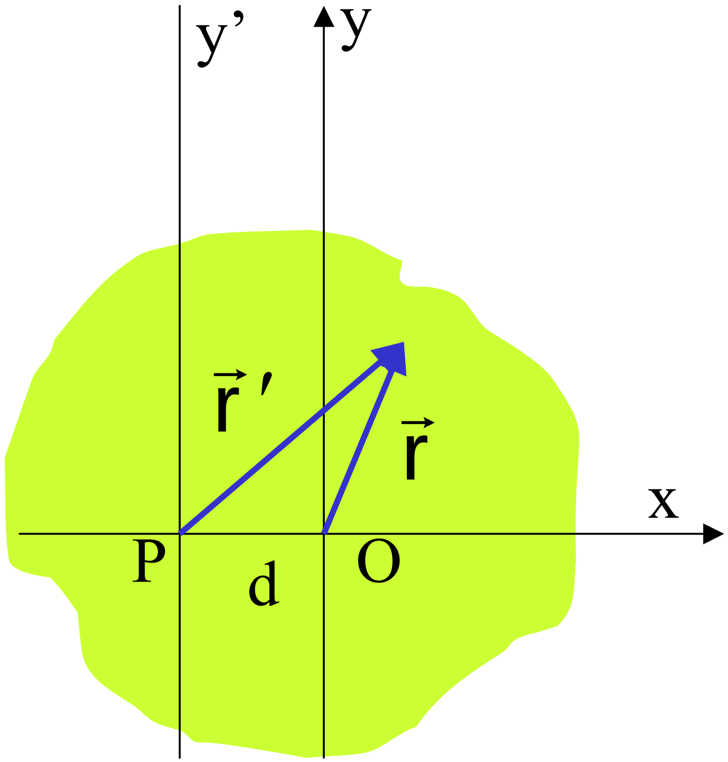
Twierdzenie o osiach równoległych

Twierdzenie Steinera pozwala przeliczać momenty bezwładności względem dwóch równoległych osi odległych o d. Niech O będzie środkiem masy.

$$I^P = \iiint dm x'^2 = \iiint dm (x+d)^2 =$$

$$= I^O + 2d \iiint dm \cdot x + d^2 \iiint dm =$$

$$= I^o + md^2$$



VII.3 Równania ruchu bryły sztywnej. Tensor bezwładności

Równanie ruchu bryły sztywnej

Środek masy bryły sztywnej:

$$\vec{R} = \frac{\iiint\limits_V \vec{r}dm}{m} = \frac{\iiint\limits_V \vec{r}\rho(\vec{r})d_3r}{m}$$

Całkowity pęd bryły sztywnej:

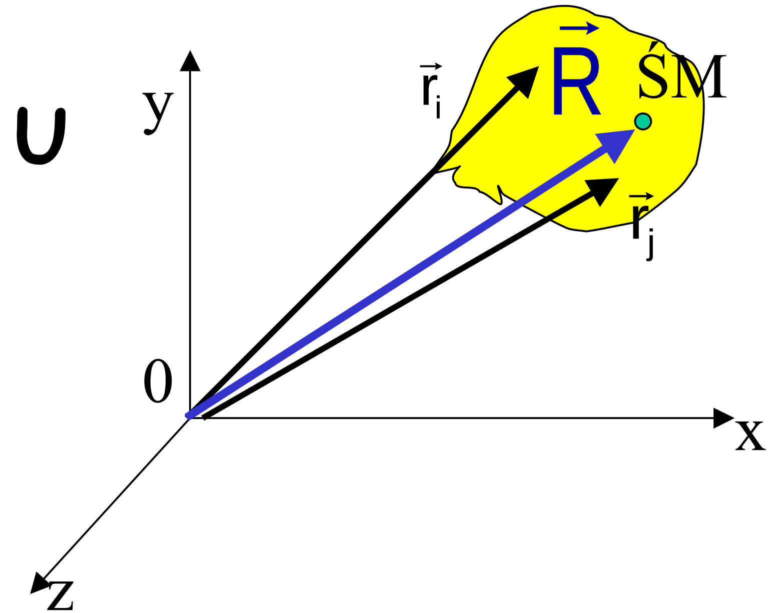
$$\vec{P} = \iiint \dot{\vec{r}}dm = m\dot{\vec{R}} = m\vec{V}$$

bo

$$\vec{r} = (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{R}; \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{R}) + \dot{\vec{R}} =$$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{V}$$

$$\iiint \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) dm = 0$$



cd.

Ruch postępowy:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

Ruch obrotowy: oś obrotu przechodzi przez wybrany punkt w układzie inercjalnym, np. przez O. Prędkość liniowa dowolnego punktu bryły jest dana wzorem: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Obliczamy całkowity moment pędu:

$$\vec{L}(t) = \iiint_V L(\vec{r})dm = \iiint_V \left(r \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right)dm =$$

$$= \iiint r^2 \vec{\omega} dm - \iiint (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r} dm$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$L_k = I_{kj}(t)\omega_j(t)$$

Tensor bezwładności

W ogólnym przypadku moment pędu bryły sztywnej nie jest równoległy do wektora prędkości kątowej:

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}; \quad L_k = I_{kj}\omega_j$$

Składowe tensora bezwładności obliczone w pewnym układzie odniesienia:

$$L_k = \left[\iiint_V dm\left(r^2\delta_{kj} - r_k r_j\right)\right]\omega_j$$

$$I_{kj} = \iiint_V dm\left(r^2\delta_{kj} - r_k r_j\right)$$

$$I_{11} = \iiint_V dm\left(y^2 + z^2\right); I_{22} = \iiint_V dm\left(x^2 + z^2\right);$$

$$I_{33} = \iiint_V dm\left(x^2 + y^2\right)$$

$$I_{12} = -\iiint_V dm\,xy; \quad I_{13} = -\iiint_V dm\,xz; \quad I_{23} = -\iiint_V dm\,yz$$

cd.

Tensor bezwładności jest tensorem symetrycznym:

$$I_{kj} = I_{jk}$$

Ma 6 niezależnych składowych:

Momenty dewiacyjne

$$I = \begin{bmatrix} \iiint_V dm\left(y^2 + z^2\right) & -\iiint_V dmxy & -\iiint_V dmxz \\ -\iiint_V dmxy & \iiint_V dm\left(x^2 + z^2\right) & -\iiint_V dmyz \\ -\iiint_V dmxz & -\iiint_V dmyz & \iiint_V dm\left(x^2 + y^2\right) \end{bmatrix}$$

Momenty główne

cd..

Tensor bezwładności zawsze można zdiagonalizować tj. tak obrócić układ współrzędnych, żeby momenty dewiacyjne znikły i zostały tylko momenty główne. Mówimy, że sprowadzamy tensor bezwładności na osie główne

Tensor bezwładności obliczany w <u>układzie inercjalnym</u> jest na ogół zależny od czasu m.in. dlatego, że bryła się obraca w UI.

W układzie związanym z bryłą np. w jej układzie środka masy tensor bezwładności jest niezależny od czasu ale układ związany z bryłą jest na ogół <u>układem nieinercjalnym</u>.

Zdiagonalizowany tensor bezwładności

Tensor w postaci diagonalnej:

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} \mathsf{I}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{I}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{I}_z \end{pmatrix}$$

Wielkości I_x, I_y, $I_Ż$ nazywamy <u>głównymi momentami bezwładności</u>, a odpowiednie osie układu współrzędnych- <u>osiami głównymi</u>.

Dla ciał o symetrii sferycznej wszystkie główne m.b. są sobie równe.

Dla ciał o symetrii obrotowej dwa z głównych m.b. są sobie równe.

Elipsoida bezwładności

Obliczmy i zdiagonalizujmy tensor m.b w układzie środka masy bryły. W tym układzie zbudujmy elipsoidę o półosiach:

$$a_1 = 1/\sqrt{I_x}; \quad a_2 = 1/\sqrt{I_Y}; \quad a_3 = 1/\sqrt{I_Z}$$

Sposób znajdowania kierunku wektora L gdy dany jest kierunek wektora ω jest przedstawiony na rysunku.