VII.7 Zastosowania 3. Bąki na obracającej się Ziemi

Materiał przedstawiony w tej części zawdzięcza bardzo wiele dyskusjom z prof. Andrzejem Szymachą

Postawienie problemu

1.W układzie inercjalnym U równanie ruchu obrotowego bryły mającej tensor bezwładności I:

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{I}(t)\vec{\omega}(t)\right)=\vec{M}$$

2.W kładzie U′ rotującym razem z bryłą równanie ruchu obrotowego (primy przypominają nam, że wielkości wyrażamy w bazie układu U′):

$$\frac{d'}{dt}\left(\hat{I}'\vec{\omega}'(t)\right)+\vec{\omega}'\times\left(\hat{I}\vec{\omega}'(t)\right)=\vec{M}'$$

3. Jak będzie wyglądało r. ruchu obrotowego na obracającej się Ziemi?

cd.

Załóżmy, że bąk w mechaniźmie Cardana spoczywa na powierzchni Ziemi w układzie U''. Wektor prędkości kątowej Ziemi wynosi Ω. Na początku rozważymy bąk swobodny.

W układzie U'' na wszystkie punkty materialne bąka działają siły bezwładności: Coriolisa i odśrodkowa, których momenty musimy uwzględnić w równaniach ruchu. Musi zachodzić:

$$\frac{d\vec{L}''}{dt} = \vec{M}_C + \vec{M}_{ods}$$

$$\vec{M}_C = -\iiint_V dm \cdot 2\left[\vec{r}'' \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{v}''\right)\right] =$$

$$= -\int 2 \cdot \left(\vec{r}'' \bullet \vec{v}''\right)\vec{\Omega} + \int 2 \cdot \left(\vec{r}'' \bullet \vec{\Omega}\right)\vec{v}'' = \left|\vec{r}'' \bullet \vec{v}'' = 0\right| =$$

$$= \int 2 \cdot \left(\vec{r}'' \bullet \vec{\Omega}\right)\vec{v}'' =$$

$$= \int \left(\vec{r}'' \bullet \vec{\Omega}\right)\vec{v}'' - \int \left(\vec{\Omega} \bullet \vec{v}''\right)\vec{r}'' + \int \left(\vec{r}'' \bullet \vec{\Omega}\right)\vec{v}'' + \int \left(\vec{\Omega} \bullet \vec{v}''\right)\vec{r}''$$

$$= -\vec{\Omega} \times \int \left(\vec{r}'' \times \vec{v}''\right) + \frac{d}{dt}\left(\int \left(\vec{r}'' \bullet \vec{\Omega}\right)\vec{r}''\right)$$

$$\vec{M}_{ods} = -\iiint_V dm\left[\vec{r}'' \times \left(\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}''\right)\right)\right] =$$

$$= -\vec{\Omega} \times \left[\int \vec{r}'' \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}''\right)\right]$$

cd...

Dostajemy więc równanie ruchu:

$$\frac{d'\vec{L}''}{dt} = -\vec{\Omega}\times\int\left(\vec{r}''\times\vec{v}''\right)+\frac{d'}{dt}\left(\int\left(\vec{r}''\bullet\vec{\Omega}\right)\vec{r}''\right)-\vec{\Omega}\times\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}''\right)\right]=$$

$$=-\vec{\Omega}\times\int\left(\vec{r}''\times\vec{v}''\right)-\vec{\Omega}\times\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}''\right)\right]+\frac{d'}{dt}\left[\int\left(\vec{r}''\bullet\vec{\Omega}\right)\vec{r}''-\int\left(\vec{r}''\bullet\vec{r}''\right)\vec{\Omega}\right]$$

$$\frac{d'}{dt}\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\omega}''\times\vec{r}''\right)\right]=-\vec{\Omega}\times\int\left(\vec{r}''\times\vec{v}''\right)-\vec{\Omega}\times\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}''\right)\right]-\frac{d'}{dt}\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}''\right)\right]$$

$$\frac{d'}{dt}\left\{\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\omega}''\times\vec{r}''\right)\right]+\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}''\right)\right]\right\}=-\vec{\Omega}\times\int\left(\vec{r}''\times\vec{v}''\right)-\vec{\Omega}\times\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}''\right)\right]$$

$$\frac{d'}{dt}\left\{\left[\int\vec{r}''\times\left(\left(\vec{\omega}''+\vec{\Omega}\right)\times\vec{r}''\right)\right]\right\}=\frac{d'\vec{L}}{dt}=-\vec{\Omega}\times\left[\int\left(\vec{r}''\times\left(\left(\vec{\omega}+\vec{\Omega}\right)\times\vec{r}''\right)\right)\right]=-\vec{\Omega}\times\vec{L}$$

$$\frac{d'\vec{L}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{L}=0$$

cd.

Ostatnie równanie można rozpatrywać na 2 sposoby:

1. **Jest to pełna pochodna wektora momentu pędu L'', a więc oznacza ona stałość momentu pędu w układzie inercjalnym U, a więc względem sfery gwiazd stałych.**
2. **W układzie nieinercjalnym U'' równanie to oznacza precesję L'' z prędkością kątową $-\vec{\Omega}$, „odkręcającą" obrót Ziemi.**

Momenty sił pozornych.
W układzie obracającym się U″ obowiązuje

wyprowadzone powyżej równanie ruchu uwzględniające tylko momenty sił pozornych:

$$\frac{d'\vec{L}''}{dt} = -\vec{\Omega}\times\int\left(\vec{r}''\times\vec{v}''\right) + \frac{d'}{dt}\left(\int\left(\vec{r}''\bullet\vec{\Omega}\right)\vec{r}''\right) - \vec{\Omega}\times\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}''\right)\right] + \vec{M}_{dodatkowe}$$

Jeżeli bąk nie jest swobodny tj. oprócz sił pozornych działają nań dodatkowe rzeczywiste siły zewnętrzne to ich momenty należy po prostu <u>dodać</u>. Na razie ten człon pominiemy.

Pierwszy człon po prawej stronie to $-\vec{\Omega}\times\vec{L}''$

Wyraźmy 2 środkowe człony równania przez (zmienny w czasie) tensor bezwładności I′′ i wektor Ω:

$$+\frac{d'}{dt}\int\vec{r}''\left(\vec{r}''\bullet\vec{\Omega}\right) - \vec{\Omega}\times\left[\int\vec{r}''\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}''\right)\right] = -\frac{d'}{dt}\left(\hat{I}''\vec{\Omega}\right) - \vec{\Omega}\times\left(\left(\hat{I}''\vec{\Omega}\right)\right)$$

Cd...

Dyskusja tego wyrażenia:

1. Dla bąka kulistego wyrażenie znika.

2. Dla bąka symetrycznego tak ustawionego, że wektor Ω jest wzdłuż osi głównej , a oś symetrii jest stale do Ω prostopadła lub równoległa wyrażenie to także znika.

W tych obydwu szczególnych przypadkach z sił bezwładności Coriolisa i odśrodkowej pozostaje jedynie moment

$$-\vec{\Omega} \times \vec{L}''$$

I równanie ruchu wygląda podobnie jak pełne wyrażenie na moment pędu:

$$\frac{d\vec{L}''}{dt} - \vec{\Omega} \times \vec{L}'' = 0$$

cd.

3.**W przypadku bąka szybkiego także możemy te człony zaniedbać gdy oś obrotu żyroskopu tworzy dowolny kąt z wektorem Ω.**

- Człon odśrodkowy jest mały, gdyż zawiera małe wyrażenie ~ Ω^2.
- Człon –d/dt(I′′ Ω): jest tego samego rzędu co $-\vec{\Omega}\times\vec{L}''$

Interesują nas całki po czasie z obydwu wyrażeń, bo one określają zmianę wektora L′′ w czasie.

Możemy zastosować tw. o wartości średniej.

$$\int_o^T \frac{d}{dt}\left(\hat{I}''\vec{\Omega}\right)dt = \left(\hat{I}''(T)-\hat{I}''(0)\right)\vec{\Omega} = \frac{t}{T}T\left.\frac{\left(\hat{I}''(T)-\hat{I}''(0)\right)\vec{\Omega}}{t}\right| t \sim \frac{\pi}{\omega} << T/2$$

$$\int_0^{T'}\left(-\vec{\Omega}\times\vec{L}''\right) = T'\left\langle -\vec{\Omega}\times\vec{L}''\right\rangle$$

Człon możemy wyeliminować, gdy T′>>T>>t.

cd.

Dla szybkiego żyroskopu poddanemu ew. dodatkowym momentom sił zewnętrznych dostajemy więc:

$$\frac{d\vec{L}''}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L}'' = \vec{M}_{dodatkowe}$$

Niech $\vec{L}'' = \sim I''_3\, \vec{\omega}_0 = I''_3\, \omega_0 \vec{k}'; \quad \vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$

Równanie ruchu możemy zapisać więc jako:

$$I''_3\, \omega_0 \frac{d\vec{k}'}{dt} = -I''_3\, \omega_0 \Omega \left(\vec{k} \times \vec{k}'\right) + \vec{M}_{dodatkowe}$$

Formalnie podobne do równania bąka ciężkiego z z Cz. VII.5

$$I''_3\, \omega_0 \frac{d\vec{k}'}{dt} = -mgr\left(\vec{k} \times \vec{k}'\right) + M_{dodatkowe}$$

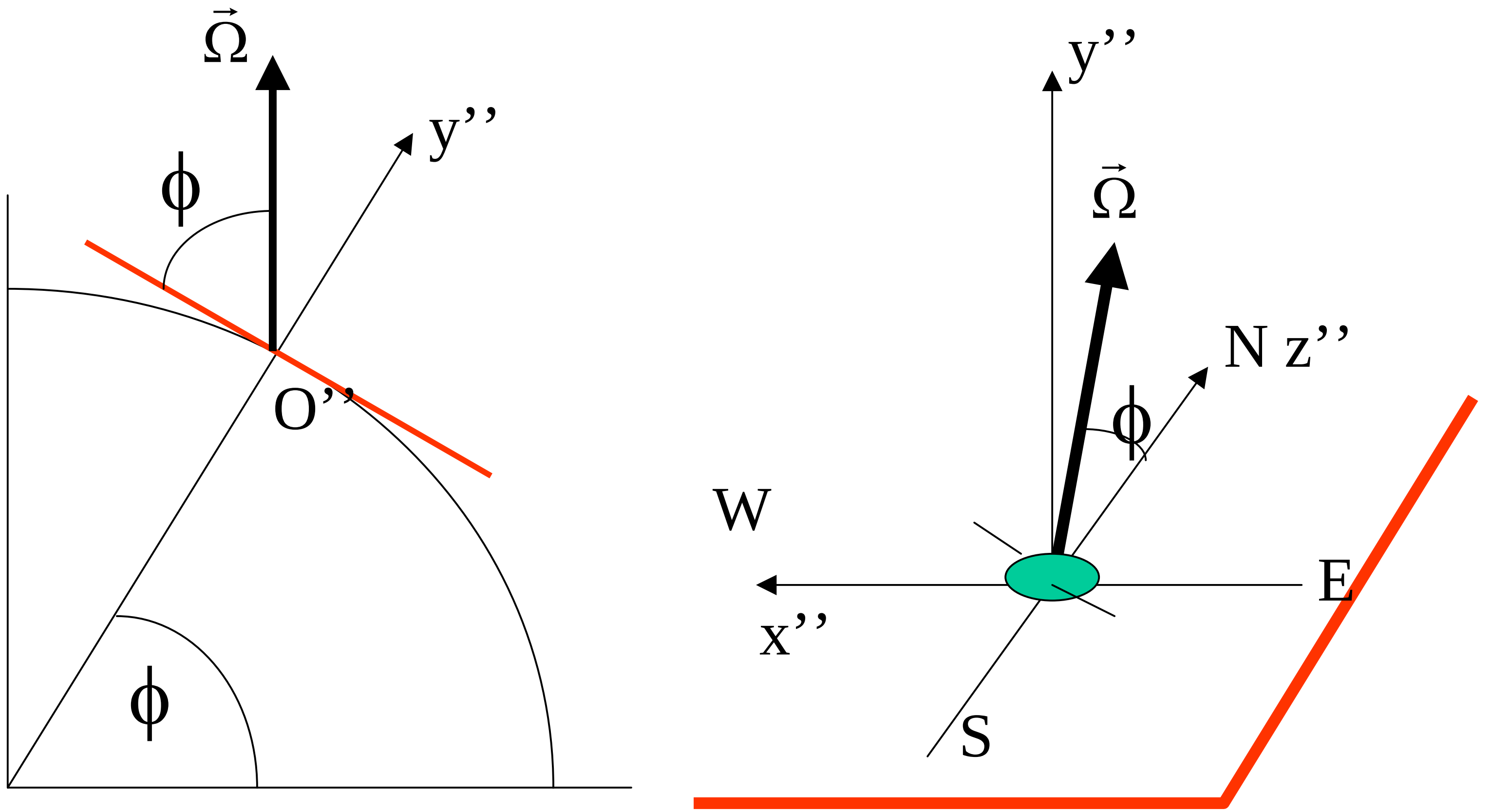
Wnioski

Formalne podobieństwo tych równań prowadzi nas do wniosku, że swobodny bąk szybki na obracającej się Ziemi będzie precesował z okresem precesji jednej doby niezależnym od swojej prędkości kątowej ω_0.

Bąk szybki poddany dodatkowym momentom sił (więzy w pewnej płaszczyźnie, siły oporów zawieszenia) będzie zachowywał się podobnie jak bąk ciężki w takiej sytuacji.

W szczególności w obecności sił oporu w zawieszeniu bąka musi nastąpić ustanie precesji. Wektory prędkości kątowej bąka i Ziemi będą starały ustawić się antyrównolegle.

Żyrokompas- bąk symetryczny w płaszczyźnie horyzonty na Ziemi



W płaszczyźnie horyzontu, w układzie bąka U′

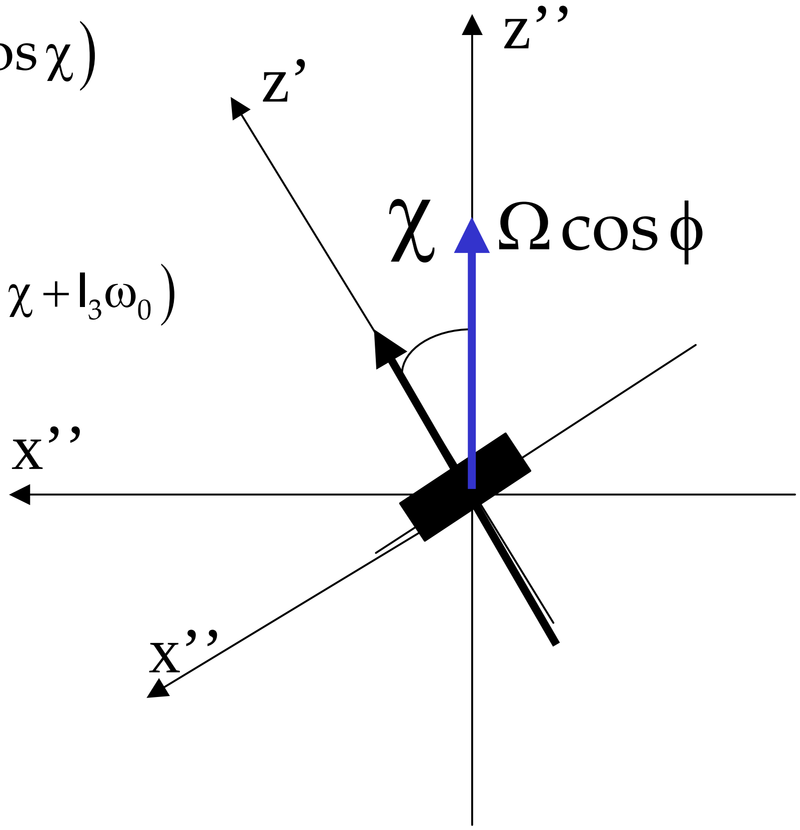
Wektor prędkości kątowej U′ względem U:

$$\vec{\omega}' = \left(-\Omega\cos\phi\sin\chi,\quad \Omega\sin\phi + \dot{\chi},\quad \Omega\cos\phi\cos\chi\right)$$

Wektor momentu pędu:

$$\vec{L}' = \left(-\Omega I_1\cos\phi\sin\chi,\quad I_1\Omega\sin\phi + I_1\dot{\chi}\quad \Omega I_3\cos\phi\cos\chi + I_3\omega_0\right)$$

Obrót dookoła OY′=OY″.



cd

Dzięki więzom utrzymującym bąka w płaszczyźnie horyzontu wolna precesja (24h) szybkiego bąka zmienia się na szybkie drgania dookoła kierunku N.

Więzy powodują powstanie momentów sił w pł. horyzontu, natomiast swoboda obrotu dookoła osi prostopadłej OY′=OY′′ do tej płaszczyzny powoduje maksymalizowanie rzutu wektora Ω na oś symetrii bąka.

Tego typu bąk związany w pł. Horyzontu jest żyrokompasem, niezwykle przydatnym np. w łodziach podwodnych, ekranowanych od ziemskiego pola magnetycznego.

Podobnie bąk związany w płaszczyźnie południka ustawi się równolegle do wektora Ω.

cd...

Obrót dookoła OY′=OY″ prowadzi do równania oscylatora (w przybliżeniu małych drgań):

$$M_{y'} = 0 = \frac{dL_{y'}}{dt} + \left(\vec{\Omega} \times L_{y'}\right)_{y'} =$$

$$= I_1\ddot{\chi} + \left(I_1 - I_3\right)\left(-\Omega^2\right)\cos^2\phi\sin\chi\cos\chi + I_3\Omega\omega_0\cos\phi\sin\chi =$$

$$\approx I_1\ddot{\chi} + I_3\Omega\omega_0\cos\phi\sin\chi$$

$$\ddot{\chi} + \left(\frac{I_3}{I_1}\Omega\omega_0\cos\phi\right)\sin\chi = 0 \quad \Rightarrow \sim \ddot{\chi} + f^2\chi = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{I_3\Omega\omega_0\cos\phi}}$$