18.2.2008

Zadania z Fizyki 2A, seria 1

(T. Słupiński)

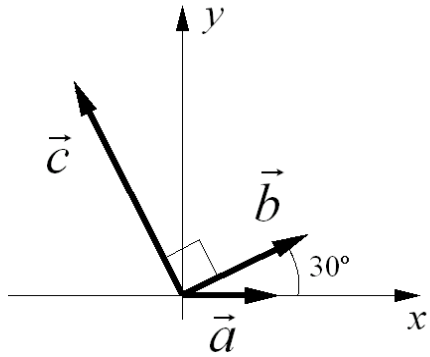
Zad. 1.

(Zad. 37 str. 55 H&R&W, t1)

Trzy wektory pokazane na rysunku mają długości a = 3m, b = 4m i c = 10m. Wyznacz:

a) składowe x, y każdego z tych wektorów,

b) współczynniki p, q rozkładu wektora $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$.



Zad. 2

(Zad 2 i 3 są na podst. Zad. 30 str. 55 H&R&W, t.1)

Iloczyn skalarny dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest definiowany jako liczba $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\gamma$, gdzie γ jest katem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Uzasadnij, że iloczyn skalarny wektorów jest równy iloczynowi liczb: długości jednego z wektorów i składowej drugiego z tych wektorów w kierunku pierwszego (czyli długości rzutu drugiego na kierunek pierwszego wektora wraz z uwzględnieniem znaku zależnego od zwrotów wektorów - znak kosinusa). Korzystając z tego faktu uzasadnij następujące własności iloczynu skalarnego wektorów:

a) $(\vec{b} + \vec{c}) \circ \vec{a} = \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{c} \circ \vec{a}$

b) $(\alpha \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$

c) rzut wektora $\vec{a}$ na kierunek wektora $\vec{b}$ wyraża się wzorem $a_b = \vec{a} \circ \vec{e}_b$, gdzie wektor $\vec{e}_b = \dfrac{\vec{b}}{b}$ jest wektorem jednostkowym w kierunku wektora $\vec{b}$ (czyli wersorem w kierunku $\vec{b}$).

Zad. 3

W kartezjańskim układzie współrzędnych XY na płaszczyźnie wersory osi są oznaczane jako $\vec{e}_x = [1, 0]$ oraz $\vec{e}_y = [0, 1]$. Dowolny wektor $\vec{A} = [A_x, A_y]$ o składowych A_x oraz A_y można więc zapisać jako $\vec{A} = A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y$. Uzasadnij następujące własności związane z iloczynem skalarnym:

a) $\vec{e}_x \circ \vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_x \circ \vec{e}_y = 0$ i podobnie dla pozostałych par wersorów

b) $A_x = \vec{A} \circ \vec{e}_x$ (i podobnie $A_y = \vec{A} \circ \vec{e}_y$)

c) $\vec{A} \circ \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$

Zad. 4.

(na podst. Zad. 32 i 35 str. 55 H&R&W, t.1)

Iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$ dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest definiowany jako wektor $\vec{c}$ który ma długość $|\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin\gamma$ (γ jest mniejszym z kątów między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$) oraz kierunek prostopadły do płaszczyzny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ z uwzględnieniem reguły śruby prawoskrętnej. W kartezjańskim układzie współrzędnych (prawoskrętnym) XYZ z wersorami osi $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ iloczyn wektorowy można także definiować wzorami dotyczącymi wersorów $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$, $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$, $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$ wraz z wymaganiami: antysymetrii $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, rozdzielności iloczynu wektorowego względem dodawania wektorów $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ oraz własności $(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ dotyczącej mnożenia przez liczbę. Wykazać bezpośrednim rachunkiem, że druga definicja jest równoważna pierwszej, to znaczy wykazać, że dla dowolnych wektorów $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$ i $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$ długość, kierunek i zwrot wektora $\vec{a} \times \vec{b}$ otrzymanego na podstawie drugiej definicji jest zgodny z wynikiem definicji pierwszej.

Zad. 5.
(Zad. 36 str. 55 H&R&W, t.1)
Dane są trzy wektory: $\vec{A} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$, $\vec{B} = -3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ i $\vec{C} = 7\vec{e}_x - 8\vec{e}_y$. Oblicz $3\vec{C} \circ (2\vec{A} \times \vec{B})$.

Zad. 6.
(Zad. 34 str. 55 H&R&W, t.1)
W równaniu $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$ przyjmijmy, że (wyjątkowo pomijając jednostki): $q = 2$, $\vec{V} = 2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z$ oraz $\vec{F} = [4,-20,12]$. Oblicz składowe wektora $\vec{B} = [B_x, B_y, B_z]$ wiedząc, że $B_x = B_y$.

Zad. 7.
(pochodna wektora)
Składowe wektora położenia $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$ cząstki w funkcji czasu są opisane w pewnym kartezjańskim układzie odniesienia następującymi równaniami:
$x(t) = x_0 + V_0 t \cdot \cos\alpha$, $y(t) = y_0 + V_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
Oblicz wektory prędkości i przyspieszenia tej cząstki jako funkcje czasu.

Zad. 8.
Uzasadnij, że wartość prędkości punktu materialnego może być stała wtedy i tylko wtedy gdy wartość przyspieszenia jest zerowa albo gdy wektor przyspieszenia jest prostopadły do wektora prędkości. W tym celu skorzystaj ze wzoru na kwadrat długości wektora $V^2 = \vec{V} \circ \vec{V}$, ze wzoru wyrażającego iloczyn skalarny w układzie kartezjańskim oraz ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji. Rozważ wyrażenie: $\frac{d}{dt} V^2(t)$.
Podaj przykład ruchu ze stałą wartością prędkości, ale z niezerowym przyspieszeniem.

Zad. 9.
Składowe wektora położenia $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$ cząstki w funkcji czasu są opisane w pewnym kartezjańskim układzie odniesienia następującymi równaniami:
$x(t) = x_0 + a \cdot \cos\omega t$, $y(t) = y_0 + b \cdot \sin\omega t$
Oblicz wektory prędkości i przyspieszenia tej cząstki jako funkcje czasu. Czy wynik obliczeń zgadza się z twoją wiedzą w przypadku $a = b = R$? Oblicz wartość przyspieszenia jako funkcję wartości prędkości oraz R w przypadku ruchu po okręgu $a = b = R$.